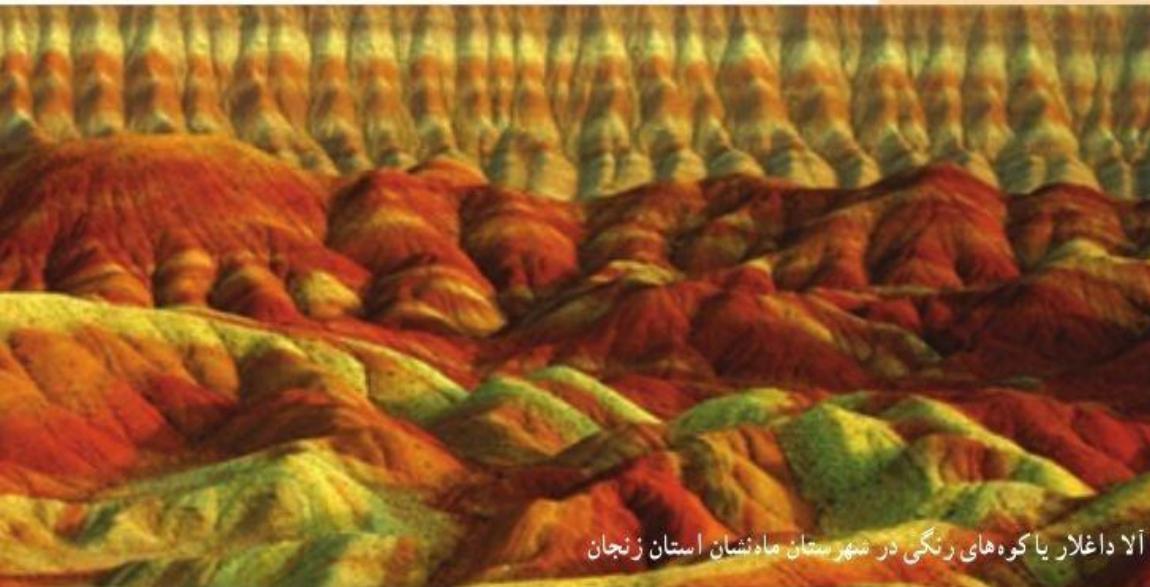


تئیه کنندگان:
جلبر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی



مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان مادنان شهرستان زنجان



درس اول مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوم متمم یک مجموعه

درس سوم الگو و دنباله

درس چهارم دنباله‌های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ بحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است.

برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

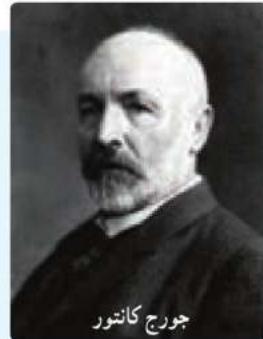
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$: مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت Q' مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$\mathbb{R} = Q \cup Q'$: مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر بنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی درباره مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرگلاس

۱) (الف) مجموعه $Q - \mathbb{R}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو

دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید. آن مجموعه‌ی اعداد گنگ است که با نماد Q' نمایش می‌دهیم

در شکل هاشور قرمز زده شده است. دو عضو آن عبارتند از: $\pi, \sqrt{2}, -\frac{1}{3}$

(ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشد و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

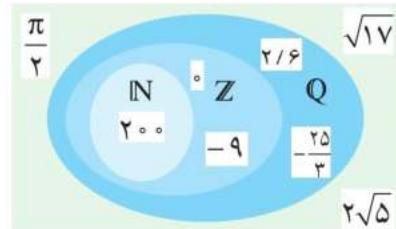
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

(ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضاء بنویسید. $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, \dots\}$

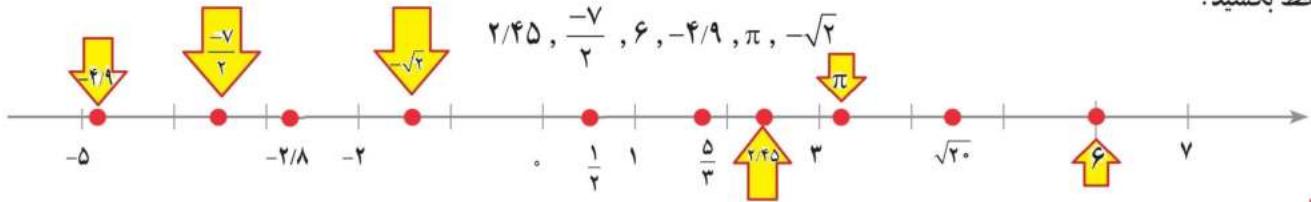
(ث) مجموعه $\mathbb{N} - W$ چند عضو دارد؟ یک عضو دارد زیرا $W = \{o\}$

توجه داشته باشید که $\mathbb{N} - W = \emptyset$



درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ است؟ زیر آنها خط بکشید.



بازه ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه های \mathbb{R} را در نظر می گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، بارنگ کردن مشخص کنید. آیا می توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟



خیر

زیرمجموعه هایی از \mathbb{R} را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص است، «بازه» یا «فاسله» می نامیم. بازه ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده تری استفاده شود. بنابراین A را با نماد $[-2, 1]$ نشان می دهیم و آن را بازه بسته از -2 تا 1 می نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه ای مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می آید که آن را بازه باز می نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می دهیم. به طور خلاصه :

$$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} \quad \text{؛ بازه بسته بین } -2 \text{ و } 1$$

$$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \quad \text{؛ بازه باز بین } -2 \text{ و } 1$$

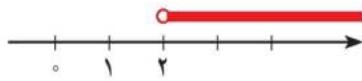
بازه های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید :

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله $x > 2$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+∞$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +∞)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty, 1]$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+∞$ و $-∞$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

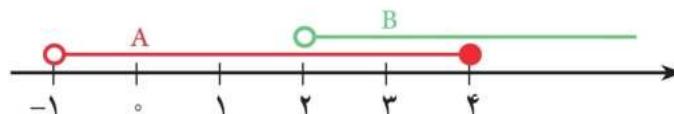
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$	
نیم باز	$[a, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} x < a\}$	
باز	$(-\infty, +∞)$	\mathbb{R}	
نیم باز	$[3, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} x < 5\}$	

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $(-1, 4)$ و $(2, +∞)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم:



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از (-1) یعنی: $(-1, +∞) = (-1, 4) \cup (2, +∞)$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین 2 و 4 به همراه خود عدد 4 ؛ یعنی: $(-1, 4) \cap (2, +∞) = (2, 4]$ توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

زیرا 2 در بازه B نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

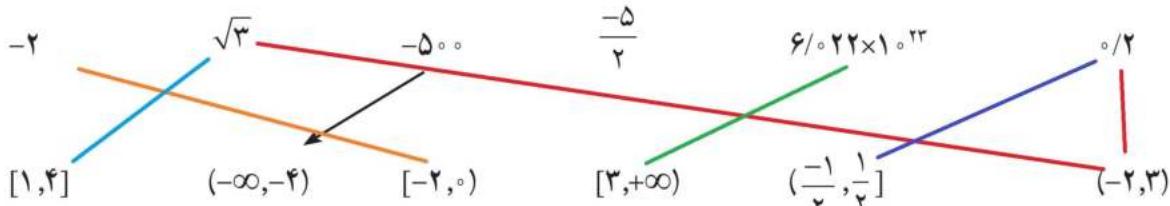
کار در کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

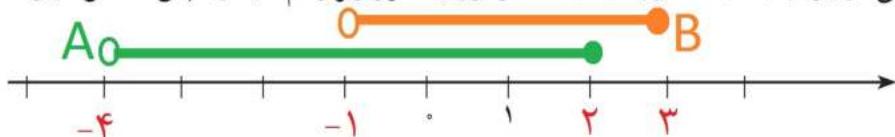
✓ $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2]$ (الف) $\times -2 \in (-2, 0]$ (ب) $\checkmark \quad \circ \in (-2, 0]$ (پ) $\checkmark -2 \in \{-2, 0\}$ (ت) $\times -1 \in \{-2, 0\}$ (ث)

$\times [-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ (ج) $\checkmark \quad \{ \circ, 1 \} \subseteq [-1, 2]$ (ح) $\checkmark \quad \emptyset \subseteq (-17, 0]$ (خ) $\times \sqrt{2} \in (2, 5)$ (د) $\times \sqrt{2} \in (0, 1)$

هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه های نظری آن وصل کنید.



۲ نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2)$ و $B = (-1, 3)$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



(الف) $A \cap B = (-1, 2]$ (ب) $A \cup B = (-4, 3]$ (پ) $A - B = (-4, -1]$ $B - A = (2, 3]$

مجموعه های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ عضو دارد

پ) درباره تعداد اعضای B چه می توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

کار در کلاس

- ۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
$\{2, 3, 5, 7\}$	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
۷۵.....	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
۵۳۰.....	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
۱۸۰	✓		مجموعه داش آموزان مدرسه شما
$10^1 - 10^9$	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
۳۹.....	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
		✓	(باشه ۱۰)
6×10^{23}	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

- ۲) دو مجموعه متناهی نام ببرید. ۱- مجموعه i دبیران ریاضی آبادان ۲- مجموعه i ماشین‌های پلاک آبادان

دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.
مجموعه i اعداد طبیعی که زیر مجموعه i اعداد حسابی است.

دو مجموعه نامتناهی مثل A و B بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

$$B = [1, 2] \quad A = [1, 2) \quad \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{2\} \end{cases}$$

تذکر: تعداد اعضا برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و بهدلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای برو، اکوادور، گویان، کلمبیا، و ترینیداد، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

فعالیت

الف $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب های دوستانان مقایسه کنید.

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \dots / \frac{2}{3}, \dots$$

ب آیا می توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ **بله**

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد 6.02×10^{23} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول های موجود در یک مول آب را که 18 گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش ترددیک به 20 میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است!

به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه ای می گیرید؟ **نامتناهی**

ت در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می توان گفت؟ **نامتناهی** است.

ث اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

تمرین

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد 5 باشد.

الف U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب U متناهی است یا نامتناهی؟ **نامتناهی**

پ یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.

ت دو زیر مجموعه نامتناهی C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$$D = \{10, 20, 30, \dots\}, \quad C = \{20, 40, 60, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف مجموعه اعداد طبیعی. **نامتناهی**

ب مجموعه شمارنده های طبیعی عدد 36 . **متناهی**

پ بازه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. **نامتناهی**

ت $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$. **متناهی زیرا**

ث مجموعه مضرب های طبیعی عدد 100 . **نامتناهی**

۳ دو مجموعه نامتناهی مثل بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

۴ حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید:

$$(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, \infty)$$

$$(-3, 5] = (-\infty, 5] \cap (-3, \infty)$$

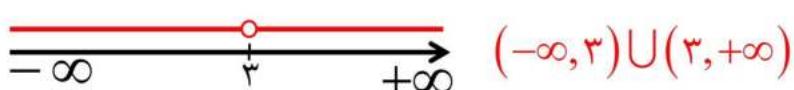
$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$$

$$[6, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10]$$

$$[2, 3] = [2, 4] - (3, +\infty)$$

$$[4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4]$$

۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{-3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



۶ اگر $B \subseteq A$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ **متناهی**



درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

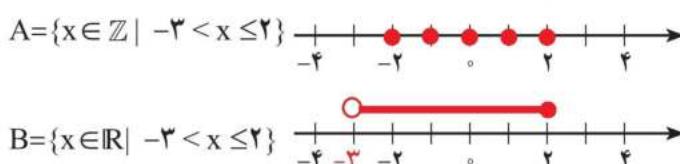
فرض کنیم U نشان‌دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان‌دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند،
مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم A** می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

فعالیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.



ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

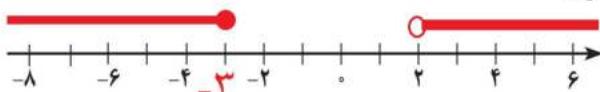
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = [-3, 2]$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 2, 3, \dots\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$$

ت در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نسخین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد



U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

A : کتاب‌های خطی

A' : کتاب‌های چاپی

درس دوم: مفهوم پلاک مجموعه



۱۶۸۴۴ ج ۱۲

نحوی بیکاری

جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نحوی بیکاری آن کشور خواهد بود.

$$A' = U - A$$

سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان وارد بیل

فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$$B' = U - B = \text{مجموعه‌ی اتومبیل‌های با پلاک زوج}$$

با فرض آنکه N مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متم خودش وصل کنید.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ | $\{1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$ |
| $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ | $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ |
| $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ | $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$ |
| $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ | $\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$ |

U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{c} U^{\emptyset'} = U \quad U^{U'} = \emptyset \quad U^{A \cup A'} = U \quad U^{A \cap A'} = \emptyset \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \end{array}$$

الف) اگر Z را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$N' = Z - N = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

ب) اگر R را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت N را روی محور نمایش دهید.

$$N' = R - N$$

فرض کنیم $\{1, 2, 3, 4, 5\} = U$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

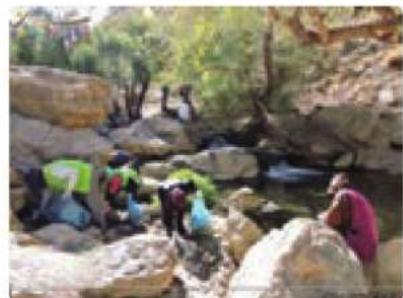
$(A')'$	$A' = \{4, 5\}$	$B' = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 2, 3\}$		$\Rightarrow (A')' = A$
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{5\}$	
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	
$A - B$	$A - (A \cap B)$	$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ بدست آوریم.

فعالیت

- ۱ یک تیم کوهنوردی مشکل از ۴ دانشآموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوههای اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می‌کنند.
اعضای دانشآموز این تیم مجموعه $\{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\} = A$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $\{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\} = B$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

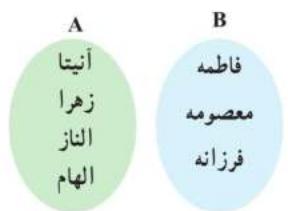


به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **مجزا** می‌گوییم.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{\text{فرزانه و معصومه و فاطمه و الهام و الناز و زهرا و آنیتا}\}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰



ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید. **جمع تعداد عضوهای A و B برابر با تعداد اعضای $A \cup B$ است.**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

$$A \cap B = \emptyset$$

الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$$

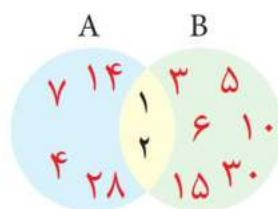
$$B = \{1, 2, 3, 5, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه ای را که در فعالیت (۱) بدست آورده؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های A و B عضوهای مشترک دارند یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار رو به رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس



۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که :

(الف) پویانمایی یا طنزند.

(ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل : مجموعه شامل تمام فیلم ها را با U ، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های طنز را با T نشان می دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب ها را بیابید.

$$\text{الف} \quad n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$$

$$\text{ب) } n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹.$$



روش دوم حل : در نمودار و ن مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتند اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت های (الف) و (ب) را بیابید.

$$= ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲ = \text{پویانمایی یا طنز (الف)}$$

$$= ۲۱ - ۱۲ = ۹ = \text{غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)}$$

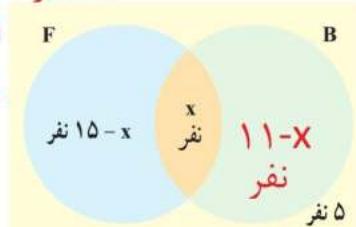
۷ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند.

مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را باید.

۲۵ نفر

$$\begin{aligned} (15-x) + x + (11-x) + 5 &= 25 \\ \Rightarrow 31 - x &= 25 \Rightarrow x = 6 \\ \Rightarrow n(B \cap F) &= 6 \end{aligned}$$



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

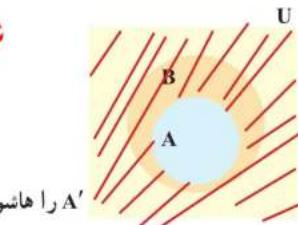
$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

۸ (الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

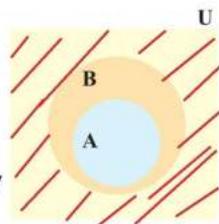
$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

(ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{c, d, e\}$ در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$A' = \{c, d, e\}, \quad B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subset A'$$

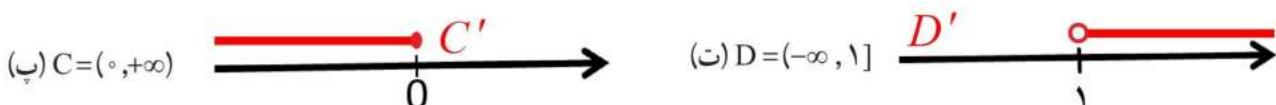
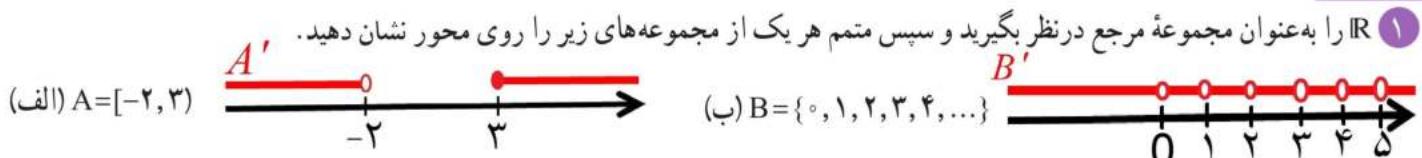


را هاشور بزنید



را هاشور بزنید

تمرین



۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج = $A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد = $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, \dots\} \quad B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{2, 3, 5, 7\} \quad C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

اگر $n(A) = 15$, $n(B) = 5$, $n(A \cap B) = 3$, آنگاه $n(A \cup B) = 3 + 15 + 5 = 20$ محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 20 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه مرتع U باشند، به طوری که $n(A \cap B) = 2$, $n(A) = 6$, $n(U) = 10$ و $n(B) = 4$ مطلوب است:

$$(الف) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 6 + 4 - 2 = 8.$$

$$(ب) n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 2 = 4.$$

$$(پ) n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 - 2 = 2.$$

$$(ت) n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 10 - 8 = 2.$$

در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانشآموزان عضو گروه سرود و ۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانشآموزانی که فقط عضو گروه سرودند. 9

(ب) تعداد دانشآموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از

محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند

که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل =

به معنای اجتماع

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. $70 - 32 = 38$

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$A \cup B = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

$$A \cap B = n(A \cap B) = 32$$

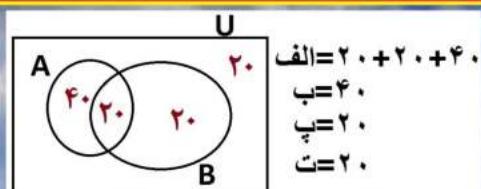
$$A \cup B = 95$$

$$A \cap B = 32$$

$$A \cup B = 95$$

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. $110 - 95 = 15$

توجه: مسائل فوق را با شکل راحت‌تر می‌توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده بفرمایید

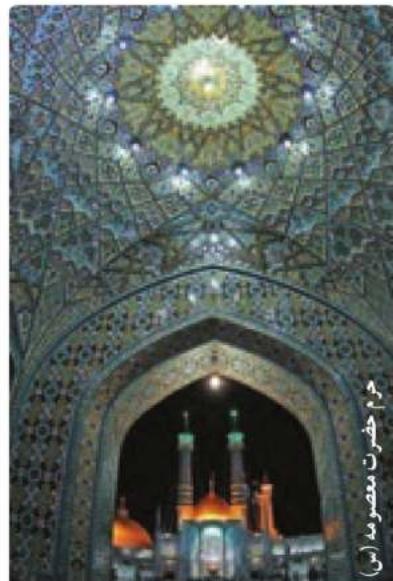
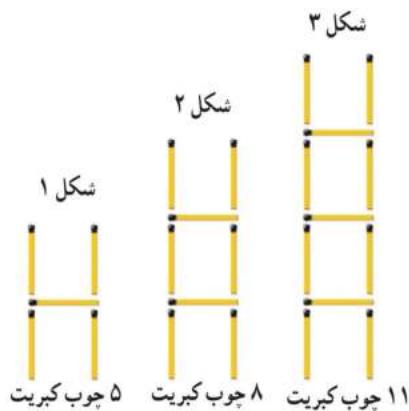


درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a_n	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	$a_n = \dots$...

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1 = 5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم : a_1 برابر ۵). عبارت‌های a_2, a_3, a_4 و a_n متغیرهای اندیس‌دار^۱ نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۸، ۱۱ و ۵ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الى آخر.

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 11$$

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلف است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا مارپیچ‌های روی میوه آناناس توجه شمارا به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

الف با این نمادگذاری، a_n نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

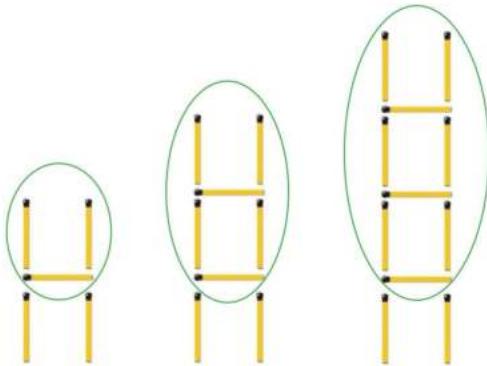
جمله‌ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می‌باشد.

ب a_n به چه معناست؟ **جمله‌ی n ام الگو است.**

ب آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n بدست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

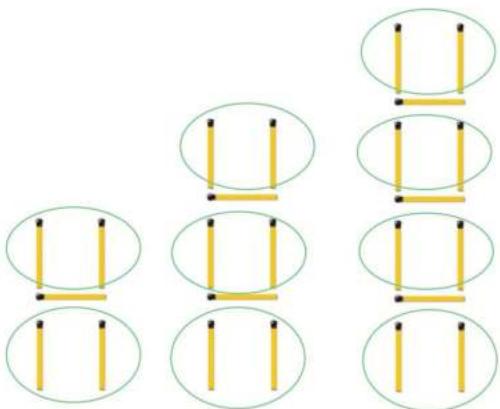
۱— در سال‌های گذشته با متغیرهای مثل x, y و z سروکار داشتمیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

فعالیت



۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت رو به رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آوردید.

$$a_1 = 1(2) + 2 \quad a_2 = 2(2) + 2 \quad a_3 = 3(2) + 2 \quad a_4 = 4(2) + 2 \quad \dots \quad a_n = 1 \cdot (3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$



۲ آیسا روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را درجای مشخص شده بنویسید.

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_n = 1 + (1 + n - 1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n + 1)2$$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = n + (n + 1)2$ و $a_n = 3n + 2$ به دست آورده اند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

$$\text{همان جواب آیدا است} \rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2 \rightarrow \text{جواب آیسا}$$

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بایابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

۷ تذکر: در مثال بالا دیدیم که $a_n = 3n + 2$ بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگوی نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.

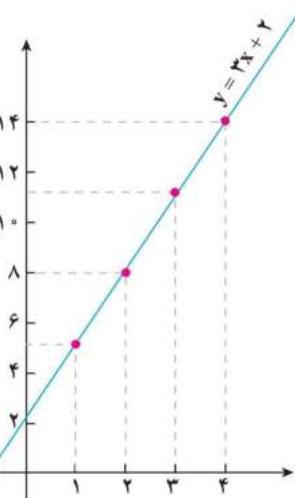
a_1	a_2	a_3	a_4	\dots
5	8	11	14	
+3	+3	+3		

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متولی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بی‌بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y = 3x + 2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y = 3x + 2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n = 3n + 2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متولی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، **الگوهای خطی** می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متولی برابر بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متولی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $C_n = 4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$



مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را باید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

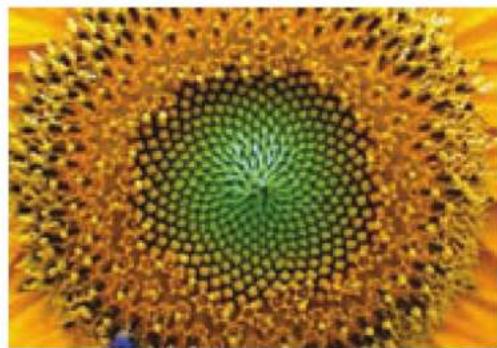
$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$

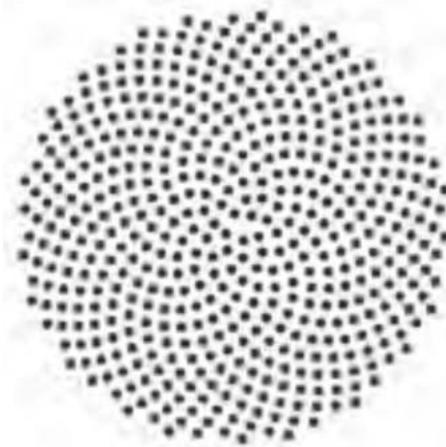
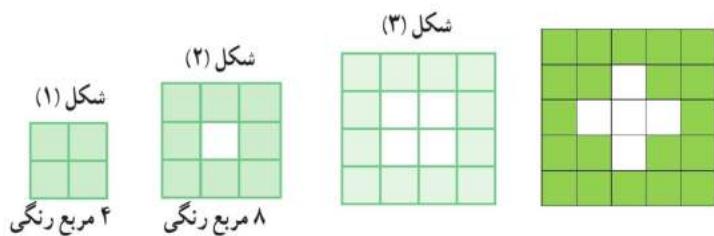


درس سوم: الگو و جدول



کار در کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محاسبه می‌شود.
چون اختلاف هر دو جمله‌ی متولی در آن، عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را باید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل b_n را به دست آورید.

۴ اختلاف هر دو جمله‌ی متولی برابر ۴ است پس $h=4$ و $a=0$ ، پس $b_n = 4n$.
۵ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟

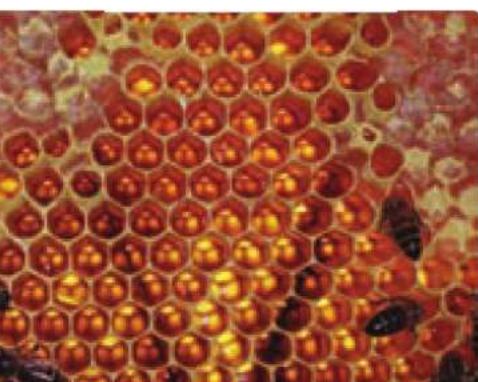
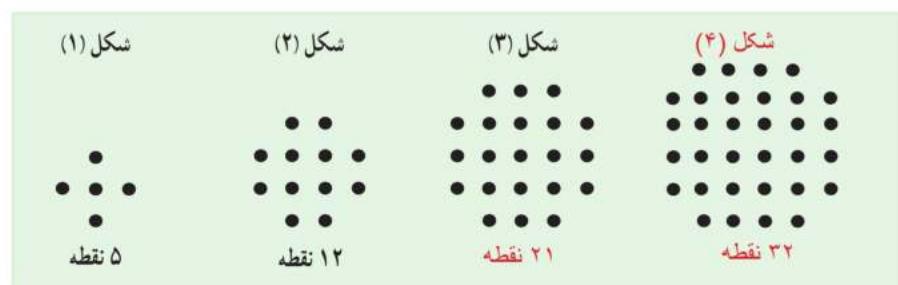
$$b_n = 4n \xrightarrow{n=25} b_{25} = 100$$

۶ در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟
یعنی در مرحله‌ی ۳۶ آم، ۱۴۴ مربع رنگی داریم.

الگوهای غیرخطی

فعالیت

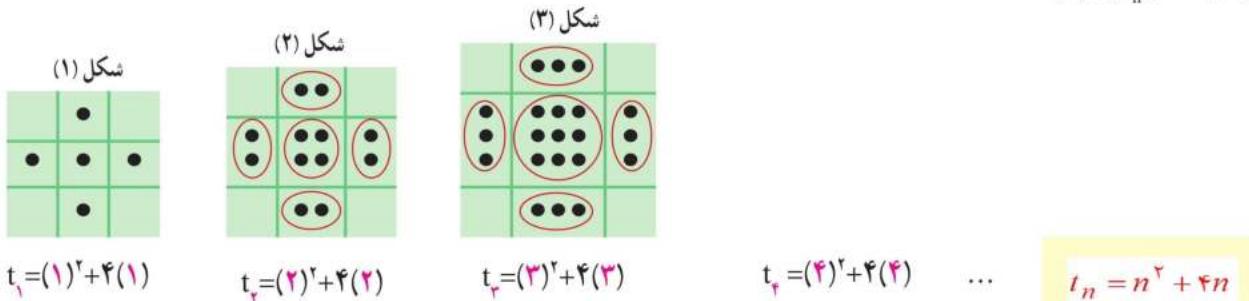
۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



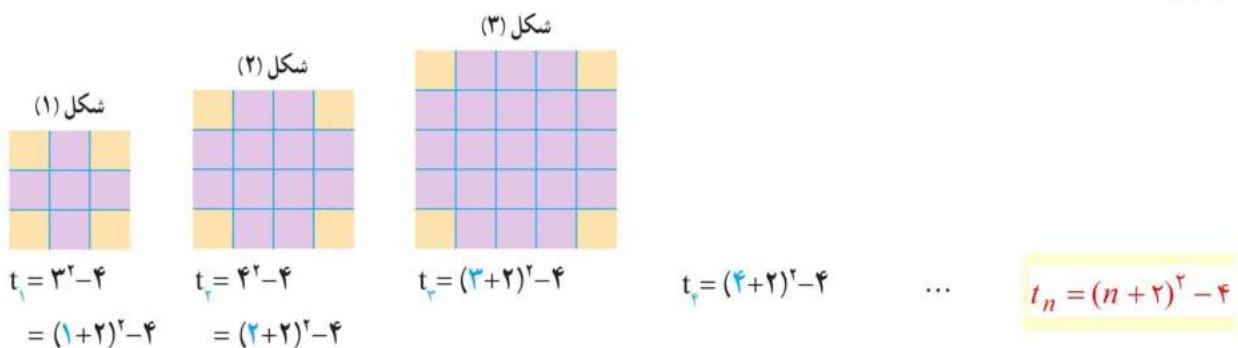
شکل (۱)	شکل (۲)	شکل (۳)	شکل (۴)
۵	۱۲	۲۱	۳۲
نقطه	نقطه	نقطه	نقطه

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟
خیر، زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متولی ، عددی ثابت نیست.

۲ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۳ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



۴ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

$$\text{جواب امیر رضا: } t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n \Rightarrow \text{جواب امیر محمد}$$

۵ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظری کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

درس سوم: الگو و دنباله

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید. ...، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ... : دنباله اعداد طبیعی زوج ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ... : دنباله فیبو ناتچی

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را بر کنید.

(الف) $a_n = n^2 - 1$: ...، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴

(ب) $b_n = -n + 4$: ۳، ۲، ۱، ۰، ...، -۲

(ج) $c_n = -13 + 2n$: -۱۱، -۹، -۷، -۵، -۳

در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	-n	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	n^2	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$...	$(\frac{1}{n})^n$...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^3$...
۵	۱۸	۲۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳	...		
-۲	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$...		
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳	...		
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	...		
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...		
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...		

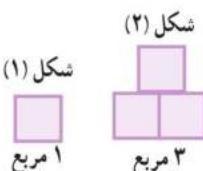
شکل (۴)



شکل (۳)



شکل (۲)



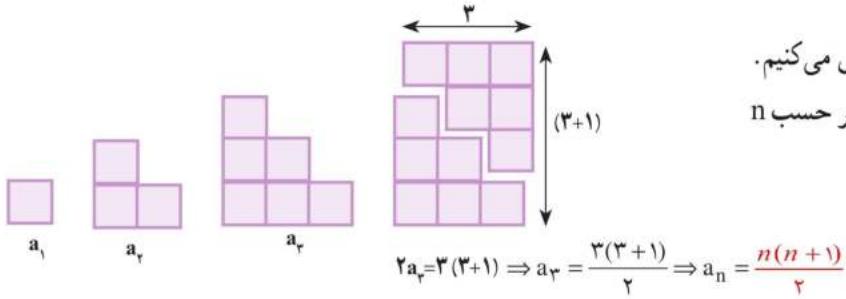
۱۹

۱) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۱ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ خیر چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله‌ی متولّی آن، عددی ثابت نیست.



پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم.
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n بدست آورید.

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

همان جمله‌ی n مرحله‌ی قبلی است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین

۱) به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. ...۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶

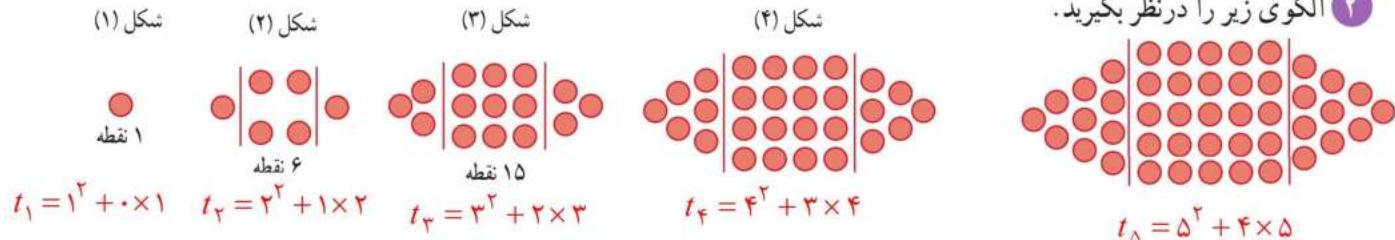
پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند است؟

$$\text{تعداد کاشی‌های سفید } 23 \text{ است. } t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$$

۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ...۶۴ و ۵۷ و ۴۵ و ۳۸ و ۲۸ و ۱۵ و ۹ و ۱

ب) جمله عمومی الگو را بیابید. $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$

۳) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$

... و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴

(ب) $b_n = 3n+1$

... و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴

(پ) $c_n = n^2 + 2$

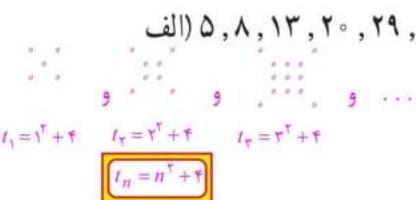
... و ۱۸ و ۱۱ و ۶ و ۳

(ت) $d_n = n^2 + n$

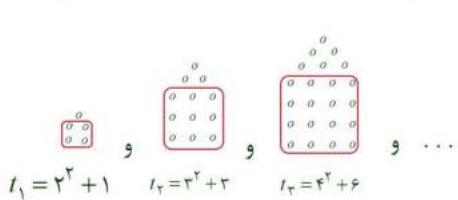
... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲

برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$



ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$



یاد آوری: دنباله ... و ۶ و ۳ و ۱ دنباله مثلثی

با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

بنابراین $t_n = (n+1)^2 + n$ و در نتیجه:

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

تهیه کنندگان:

جلبر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰,

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_5	...	t_n	...
۲۰۰۰	$2000 + 4(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 4(4)$...	$2000 + 8(4)$...	$2000 + (n-1)(4)$...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = 2000 + (24-1)(4) = 2092$$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$...	$t_1 + (n-1)d$...

همان طور که مشاهده شد،

جمله a_n یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

تاریخ کلاس

۱ در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

$$5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1)5 = 5n$$

$$(ب) 1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

$$(پ) 5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$$

$$(ت) 13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots, d=-6, d_n = 13 + (n-1)(-6) = -6n + 19$$

A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیرند.



سیم کارت های شرکت B

هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A

هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n

هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

$$(الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.$$

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ بله چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

زیرا جمله ای عمومی آنها به شکل یک دنباله خطی است. دلیل دیگر اینکه اختلاف هر دو جمله ای متواالی آنها مقدار ثابتی است.

$$a_n : d = 3200 - 2000 = 1200 \quad \text{و} \quad b_n : d = 3800 - 3000 = 800$$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه

می کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟

$$a_{15} = 3800, \quad b_{15} = 4200 \Rightarrow \text{به سارا سیم کارت شرکت A را پیشنهاد می کنیم.}$$

$$a_{15} = 6500, \quad b_{15} = 6000 \Rightarrow \text{به فاطمه سیم کارت شرکت B را پیشنهاد می کنیم.}$$

مثال

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.
حل: آرتن و آرکان این مثال را به روش های زیر حل کرده اند. شما کدام روش را می پسندید؟



آرتن: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \\ t_{16} &= t_1 + 15d \\ &= 4 + (15)(7) \\ &= 109 \end{aligned}$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدر نسبت 7 داریم. پس

$$\begin{aligned} t_n &= 7n + b \\ t_1 &= 7(1) + b \\ 4 &= 7 + b \Rightarrow b = -3 \\ t_n &= 7n - 3 \\ t_{16} &= 7(16) - 3 \\ t_{16} &= 109 \end{aligned}$$

کار در کلاس

- ۱) الف) یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.
ب) یک دنباله حسابی با قدر نسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.
پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند. ... و -۳ و -۱۹ و ۳ و ۵



بریانی روسف

الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدeneند. در این حالت می گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده ایم.
حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11 \quad \begin{array}{c} t_1 \\ 18 \\ 29 \\ 40 \\ 51 \\ 62 \end{array}$$

توضیح: برای محاسبه قدر نسبت می توان از رابطه $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$ نیز استفاده کرد.

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{62 - 18}{4} = 11$$

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{80 - 20}{2} = 30 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 50 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{80 - 20}{3} = 20 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{80 - 20}{4} = 15 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 35 \\ 50 \\ 65 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_6 - t_1}{6 - 1} = \frac{80 - 20}{5} = 12 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 32 \\ 44 \\ 56 \\ 68 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_7 - t_1}{7 - 1} = \frac{80 - 20}{6} = 10 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \end{array}$$

۱) از بين دنباله های زير، دنباله های حسابي را مشخص کنيد و در هر يك از آنها با تعين قدرنسبت، جمله بيست و يكم را بيايد.

$$d = 7 \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = 3 + 14 \cdot 7 = 143$$

$$\text{ناحسابي } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$d = \sqrt{3} \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$d = -3 \text{ و حسابي } 10, 7, 4, 1, \dots$$

$$t_1 = a + 2 \cdot d = 10 + (-6) = -5$$

$$d = 0 \text{ و حسابي } 2, 2, 2, \dots$$

$$t_1 = a + 2 \cdot d = 2 + 0 = 2$$

$$d = \frac{1}{5} \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 1}{5} = \frac{22}{5}$$

$$d = 20 \text{ و حسابي } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۲) در يك دنباله حسابي، جملات سوم و هفتم به ترتيب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنيد؛ يعني با بدست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنويسيد.

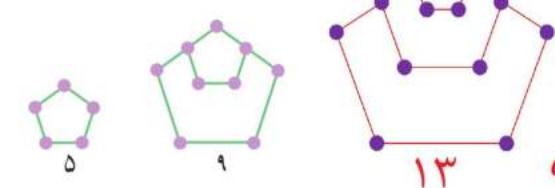
$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9 \quad t_3 = a + 2d = 20$$

$$a + 18 = 20 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{دنباله } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۳) در يك دنباله حسابي، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۲۹ است. دنباله را مشخص کنيد.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + 2d = 3 \\ a + 3d + a + 4d + a + 5d = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 29 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -3a - 3d = -3 \\ 3a + 12d = 29 \end{cases} \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -3$$

-۳, ۱, ۵, ۹, ... : دنباله



$$t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow n = 100$$

الف) دو جمله بعدی الگوي مقابل را با رسم شكل بيايد و نوع دنباله را مشخص کنيد.

دنباله از نوع حسابي است : ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

ب) جمله عمومي آن را مشخص کنيد.

$$a = 1, d = 4 \Rightarrow t_n = 1 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n - 3$$

پ) جمله چندم اين دنباله ۳۹۷ است؟

ب) واسطه حسابي بين ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$$

الف) واسطه حسابي بين ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{5}, 8, 11$$

پ) از دو قسمت قبل چه نتائج هاي مي گيريد؟ واسطه اي حسابي دو عدد، همان ميانگين آنها است.

به عبارت ديگر : اگر c و b سه جمله اي متالي يك دنباله اي حسابي باشند، b را واسطه اي حسابي نامide و داريم : $a + c = 2b$ يا $b = \frac{a+c}{2}$

مسئله زير در پاپروس رايind آمده است. آن را حل کنيد.

۱) فرق نان را بين ۵ مرد چنان تقسيم کنيد که سهم هاي دريافت شده، دنباله حسابي تشکيل دهنده و يك سوم مجموع سه سهم بزرگتر، مساوي مجموع دو سهم کوچک تر باشد».

دنباله اي حسابي تشکيل شده را t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 در نظر مي گيريم . طبق فرض سوال مى توان نوشت :

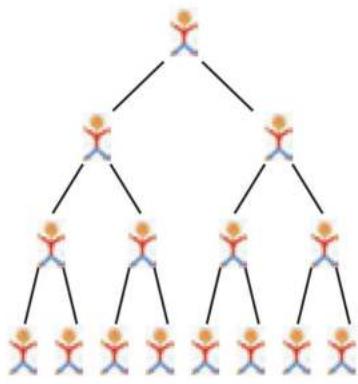
$$\left. \begin{array}{l} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \\ \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = t_1 + t_2 \xrightarrow{\times 3} 3a + 9d = 6a + 3d \Rightarrow a = 2d \end{array} \right\} \Rightarrow d = 5, a = 10$$

بنابراین دنباله به صورت ۳۰, ۲۵, ۲۰, ۱۵, ۱۰ می باشد.

دنباله هندسی



علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مرااعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.



فعالیت

روز n	t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند
۱	2 (امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
⋮	⋮
n	$t_n = 2^n$

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟ $t_{10} = 2^{10} = 1024$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ $t_{11} = 2^{11} = 2048$

۴ در روز چند تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر 16384 نفر می‌شود. $t_n = 16384 \Rightarrow n = 14$

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:
 $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متواالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متواالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهد بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$...	$t_1 r^{n-1}$...

$$\times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r$$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله t_n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدر نسبت می باشد.

کار در کلاس

۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمنی جمله دنباله هندسی ۱, ۳, ۹ روش های مقابله را به کار بردند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ نگار توضیح دهد.

برای محاسبه ای قدر نسبت باید هر جمله را برابر جمله ای قبلی آن تقسیم کرد. ولی متاسفانه نرگس جمله را برابر جمله ای بعدیش تقسیم نموده است. که غلط است.

۲) در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

(الف) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

(ب) $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

(پ) $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

(ت) $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-4}}$

نگار	$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	نرگس	$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$	$t_7 = 9(3)^{7-1}$	$= 6561$	



۱) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4 \end{cases} \quad 3 \quad | \quad 12 \quad | \quad 48 \quad \text{یا} \quad 3 \quad -12 \quad | \quad 48$$



* اگر t_m و t_n دو جمله ای متمایز دنباله هندسی باشند آنگاه $\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$ است.

اگر a, b, c سه جمله ای متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه a, b, c واسطه هندسی (میانگین هندسی) نامیده و خواهیم داشت: $ac = b^2$. ویردر آنفر برابر است با مریع و مطر

۲) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

خیر جواب یکتا نیست. بلکه دارای دو جواب است.

$$\Rightarrow r^{5-1} = \frac{t_5}{t_1} \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \quad 2 \quad | \quad 6 \quad | \quad 12 \quad | \quad 24 \quad | \quad 48 \quad \text{یا} \quad 2 \quad | \quad 6 \quad | \quad 12 \quad | \quad 24 \quad | \quad 48$$

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$$10 \quad | \quad b \quad | \quad 4000 \quad \Rightarrow b^2 = 10 \times 4000 = 40000 \Rightarrow b = \pm 200$$

$$t_1 = 10, \quad t_4 = 10 \dots \Rightarrow r^{4-1} = \frac{t_4}{t_1} \Rightarrow r^3 = 10 \dots \Rightarrow r = 20 \quad 10 \quad | \quad 200 \quad | \quad 4000 \quad | \quad 80000$$

$$t_1 = 4, \quad t_6 = 972 \Rightarrow r^{6-1} = \frac{t_6}{t_1} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r = 3 \quad 4 \quad | \quad 12 \quad | \quad 36 \quad | \quad 108 \quad | \quad 324 \quad | \quad 972$$

یک کوه بخی هزار تُنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.

پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نماند. ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند.

ب) تقریباً نصف آن آب می‌شود. ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

تصریف

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

هندسی نیست $\dots, 8\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (ب)

هندسی است $1, 5, 5, 5, \dots \rightarrow r = \frac{5}{5} = 1$ (ت)

هندسی است و $r = \frac{28}{7} = 4 \rightarrow 7, 28, 112, 448, \dots$ (الف)

هندسی است و $r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (ب)

$\dots, \frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \dots \rightarrow r = \frac{4}{5} = 1$: فرض

$\dots, -\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \dots \rightarrow r = -1 = -1$: فرض

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

با توجه به انتخاب جمله‌های اول دلخواه، بی شمار دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت داده شده می‌توان نوشت.

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. درست نیست، زیرا بی شمار دنباله می‌توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند، به عنوان نمونه دنباله مثلثی، مربعی، فیبوناچی و ... یا دنباله‌های غیر معروف مثل: $\dots, 2, 4, 6, \dots$

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست، دنباله‌هایی با اعداد ثابت ناچر، در نظر بگیرید این دنباله‌ها حسابی با قدر نسبت صفر و هندسی با قدر نسبت یک می‌باشند. مانند $\dots, 2, 2, 2$ و $\dots, 0, 0, 0$.

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال 2° درصد نسبت به سال

قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

بعد از یک سال بعد از سه سال بعد از دو سال

$$500000 \times \frac{80}{100} = 400000 \quad 400000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2 = 256000$$

کاهش ۲۰ درصدی قیمت به معنی آن است

$$t_n = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n$$

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\frac{2(21)}{2}} = 2^{210}$$

$$\text{توجه: حاصلضرب } n \text{ جمله نخست دنباله هندسی برابر است با: } P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. $\dots, 4, 8, 16, \dots$

$$\begin{array}{l} r=2, \\ r^2=4, \\ r^3=8, \\ r^4=16, \\ \vdots \\ r^{20}=2^{20} \end{array}$$

دنباله $3, 6, 12, \dots$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l} r=2, \\ r^2=4, \\ r^3=8, \\ r^4=16, \\ \vdots \\ r^{20}=2^{20} \end{array}$$

بنابرآمار منتشر شده از جانب پژوهشی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدنه‌ند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۴/۸	۱۴۹۶۷/۰۶	۱۴۲۱۸/۰۷	۱۳۵۰۷/۷۷۱	۱۲۸۳۲/۲۸۲	۱۲۱۹۰/۷۶۲

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $+95/90$

توجه داشته باشید که اگر هر سال ۵٪ کاهش یابد به این معنی است که هر سال برابر است با 95% سال قبل، پس باید هر سال را در $95/90$ ضرب کرد تا سال آینده‌ی آن بدست آید.