استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

احتمال

اگر S فضای نمونه‌ای محدود و شانس رخ دادن همه عضوها برابر باشد احتمال هر پیشامد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{کل } S}$$

روش‌های حل:

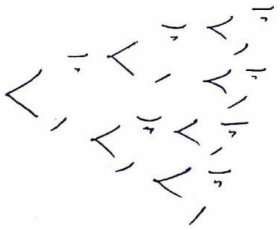
① نمودار درختی ② آمایزی ③ ترکیب

نکته: احتمال آمدن k رو در n پرتاب یک سکه:

$$P(r,k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب کرده‌ایم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف) دو بار شیر بیاید؟



$n(S)=8$

$P(A)=\frac{3}{n}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$

ب) حداقل دو بار شیر بیاید؟

$P(B)=\frac{\binom{3}{2}+1}{2^3}=\frac{3+1}{8}$

ج) حداکثر دو بار شیر بیاید؟

$P(C)=\frac{\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{7}{8}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

مثال 2

۶ نفر که دو نفر آنها برادر هستند به تصادف در یک ردیف می ایستند چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار هم باشند؟

ب) دو برادر در اول و آخر صف باشند؟

$n(S) = 6! = 720$

$n(A) = 5!\,2!$

$P(A) = \frac{5!\,2!}{6!} = \frac{1}{3}$

$P(B) = 2 \times 4! \longrightarrow P(B) = \frac{2! \times 4!}{6!} = \frac{1}{15}$

انواع پیشامدها

پیشامد حتمی $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

" نشدنی $P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(S)} = 0$

" سازگار $A \cap B \neq \phi$ (دارای عضو مشترک)

" ناسازگار $A \cap B = \phi$

مثال 3

دو تاس را پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه عدد رو شده در تاس دوم بزرگتر از عدد رو شده در تاس اول باشد چقدر است؟

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,4), (3,5), (3,6)
(4,5), (4,6)
(5,6)

$P(A) = \frac{15}{36}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

مثال 14

از ظرفی 5 مهره به شماره‌های 1، 2، 3، 4، 5 ریخته‌ایم، دو مهره با هم از ظرف بیرون می‌کنیم، مطلوبست:

احتمال اینکه مجموع شماره‌ها بزرگتر از 5 باشد.

(2,5), (1,5), (3,5), (4,5)
(4,3), (4,2)

$$P(A) = \frac{6}{\binom{5}{2}}$$

مثال 15 سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوبست: احتمال اینکه اعداد رو شده حاصلضرب سه باشند؟

$$P(A) = \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6}$$

ترکیب پیشامدها

اشتراک دو احتمال: پیشامد $A \cap B$ زمانی است که هم A و هم B رخ دهند (با هم)

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

قانون اجتماع دو احتمال: پیشامد $A \cup B$ زمانی است که پیشامد A یا پیشامد B یا هردو رخ دهند

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(اصل شمول (اجتماع))

نکته!

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \phi$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

مثال 6)

عددی از فضای نمونه‌ای {1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9} انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب 3 باشد را بدست آورید.

$$P(\text{زوج} \cup \text{مضرب 3}) = P(\text{زوج}) + P(\text{مضرب 3}) - P(\text{زوج} \cap \text{مضرب 3})$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$$

احتمال تفاضل دو پیشامد :

پیشامد $A-B$ یعنی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد یعنی :

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال 7

در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع 7 باشد ولی حاصل کدام عدد اول نباشد را بنویسید.

$$A = \{(5,2),(2,5),(4,3),(3,4),(6,1),(1,6)\}$$

$$B = \{(2,5),(5,2)\}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{4}{36}$$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

متمم یک پیشامد :

همه حالت‌ها به جز حالت‌های A ← $P(A') = 1 - P(A)$

مثال ۵

در پرتاب دو تاس احتمال آنکه دو تاس مساوی بیایند چقدر است؟

دو تاس مساوی $= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{36}$

مثال ۶

در یک خانواده چهار فرزندی، احتمال آنکه حداقل دو فرزند پسر باشند، چقدر است؟

(I) $P(\text{حداقل دو پسر}) = P(\text{دو پسر}) + P(\text{سه پسر}) + P(\text{چهار پسر})$

$= \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4}$

(II) $P(\text{حداقل دو پسر}) = 1 - \{P(\text{یک پسر}) + P(\text{هیچ پسر})\} = 1 - \frac{\binom{4}{1} + \binom{4}{0}}{2^4}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه رخ دادن هریک تأثیری در دیگری نداشته باشد

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال ۱۰

در پرتاب سه سکه احتمال آنکه اولی رو و دومی و سومی پشت بیاید چقدر است؟

$$P(\text{رو} \cap \text{پشت} \cap \text{پشت}) = P(\text{رو}) \times P(\text{پشت}) \times P(\text{پشت})$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

مثال ۱۱

احتمال بهبودی شخص A پس از پیوند کلیه ۸۰٪ و شخص B، ۶۰٪ است مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو نفر سلامتی خود را بازیابند

ب) حداقل یکی از این دو نفر نجات یابند

الف) $P(\text{سلامتی هر دو}) = P(\text{سلامتی اولی}) \times P(\text{سلامتی دومی})$
$$= \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \%48$$

ب) $P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1)$
$$= \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{12}{25} = \%92$$

مثال ۱۲

۴۰ درصد مردان جامعه RH خون مثبت دارند مطلوبست احتمال آنکه فردی دارای RH منفی باشد

$P(\text{RH منفی}) = P(\text{مردان منفی}) = P(\text{مرد منفی پدر}) \times P(\text{مرد منفی مادر}) = 0.4 \times 0.4 = \%16$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

مثال 13

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه RH خون هر سه فرزند یکی نباشد؟

$$P(\text{هر سه } RH^+ \text{ یا هر سه } RH^-) = P(RH^+, RH^+, RH^+) + P(RH^-, RH^-, RH^-)$$
$$= (.84 \times .84 \times .84) + (.16 \times .16 \times .16)$$
$$= .16$$

$$P(\text{هر سه یکی نباشد } RH) = 1 - P(\text{هر سه یکی}) = 1 - .16 = .84$$

احتمال شرطی

احتمال پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B رخ داده باشد $P(B) \neq 0$ برابر است با:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

مثال 14

تاسی را پرتاب می‌کنیم می‌دانیم عدد رو شده زوج است. احتمال اینکه 2 آمده باشد چقدر است؟

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \longrightarrow \begin{cases} A = \{2\} \\ B = \{2, 4, 6\} \end{cases}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

قضیه 1

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه :

$$P(A/B) = P(A)$$

مثال 15

خانواده‌ای دارای سه فرزند است می‌دانیم فرزند اول پسر است. مطلوبست احتمال اینکه دو فرزند دیگر دختر باشند.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{دختر دوم} \cap \text{دختر سوم})}{P(\text{پسر اول})} = \frac{P(\text{دختر دوم}) \times P(\text{دختر سوم}) \times P(\text{پسر اول})}{P(\text{پسر اول})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

قضیه 2 :

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(A/B) = 0$$

قانون احتمال کل

اگر A_1 ، A_2 دو پیشامد ناسازگار و متمم هم باشند

$$A_1 \cup A_2 = S \quad , \quad A_1 \cap A_2 = \phi$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_1)$$

مثال 16

دو جعبه به ترتیب دارای 30 و 20 لامپ با تعداد 5 و 3 لامپ معیوب است. از دو جعبه یک لامپ انتخاب و در جعبه جدید می‌ریزیم حال از این جعبه لامپی خارج می‌کنیم احتمال اینکه معیوب باشد چقدر است؟

$$P(\text{معیوب}) = P(\text{جعبه اول}) \times P(\text{معیوب} / \text{جعبه اول}) + P(\text{جعبه دوم}) \times P(\text{معیوب} / \text{جعبه دوم}) = \frac{10}{18} \times \frac{5}{30} + \frac{8}{18} \times \frac{3}{20}$$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

مسائل ترکیبی

برداشتن مهره از داخل کیسه به دو صورت یکی یکی و چندتایی سؤال می‌شود که در حالت یکی یکی ترتیب قائل می‌شویم ولی در صورت چندتایی ترتیب نداریم و مسأله همیشه ترکیب $\binom{n}{k}$ قابل حل است. مثل:

(I) یکی یکی با ترتیب ← با جایگذاری ← فضای نمونه‌ای کم نمی‌شود
بدون ← هر دفعه یکی کم می‌شود

(II) چندتایی بدون ترتیب ← همیشه از نوع ترکیب $\binom{n}{k}$ می‌باشد.

مثال 17

در کیسه‌ای 5 مهره قرمز و 6 مهره سیاه داریم اگر دو مهره یکی یکی با جایگذاری خارج کنیم مطلوبست احتمال اینکه: الف) اولی قرمز و دومی سیاه
ب) یکی سیاه و یکی قرمز

الف) $P(\text{اولی قرمز و دومی سیاه}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11}$

ب) $P(\text{یکی سیاه و یکی قرمز}) = \begin{cases} P(\text{اولی قرمز و دومی سیاه}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} \\ P(\text{اولی سیاه و دومی قرمز}) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} \end{cases} + = \frac{60}{121}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

همکلاسی

دو پیشامد وابسته :

نسبت به هم مستقل و ناسازگار و دو مکمل :

$P(A \cap B) = 0 \; , \; P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

برقرار نباشد.

احتمال ها غیرهم شانس

اگر پیشامدهای A_1 , A_2 , A_3 از هم جدا باشند و مجموع آنها فضای نمونه را تشکیل دهند

$A_1 \cap A_2 = \phi$

$A_1 \cap A_3 = \phi \; , \; A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S \Rightarrow P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

$A_2 \cap A_3 \neq \phi$

مثال 18

سه نفر در مسابقه دوصیادی شرکت می کنند احتمال برنده شدن شخص A دو برابر شخص B و احتمال برنده شدن B دو برابر C می باشد مطلوب است احتمال :

الف) A برنده شود

ب) A یا C برنده شوند

ج) B برنده نشود

چون سابقه حتما برنده دارد پس $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

دارد $\begin{cases} P(A) = 2P(B) \\ P(B) = 2P(C) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P(A) = \frac{4}{7} \\ P(B) = \frac{2}{7} \\ P(C) = \frac{1}{7} \end{matrix}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{5}{7}$

$P(B') = 1 - P(B) = \frac{5}{7}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

استاد : دکتر محمدرضاحاتم آبادی

مبحث : درسنامه تفصیلی احتمال دهم و یازدهم دبیرستان

@iHamkelasi

iHamkelasi

تابع توزیع دوجمله‌ای

آزمایش تنها با دو نتیجه مرد یا مقبول را گویند.

تابع توزیع برنولی: $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n کل تکرار

x تعداد مطلوب

p احتمال مطلوب هر دفعه

مثال 19

سکه‌ای را پنج بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه 3 بار رو بیاید؟

$$\begin{cases} P(رو,3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{2^5} \\ \text{یا} \\ f(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \end{cases}$$

مثال 20

در یک جعبه 5 مهره قرمز و 4 مهره آبی داریم، 3 مهره با جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال آنکه 2 مهره آبی باشد چقدر است؟

$n=3$

$x=2$

$P(\text{آبی}) = \frac{4}{9}$

$f(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(1-\frac{4}{9}\right)^1$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

@iHamkelasi

iHamkelasi

متغیر تصادفی

اگر به هر چند نتیجه آزمایشی عددی نسبت دهیم، آن عدد را متغیر تصادفی می‌نامند

مثال 21

خانواده‌ای صاحب دو فرزند می‌شوند تمام حالات را به کمک درخت و روش متغیر تصادفی توصیف کنید.

$S=\{(د,د),(د,\bar{د}),(\bar{د},د),(\bar{د},\bar{د})\}$

$n=3$ متغیر تصادفی

$x=$ تعداد پسران

x	$x=0$	$x=1$	$x=2$
P			

جدول توزیع احتمال: جدولی که بیانگر تمامی حالات با احتمال آن باشد

مثال 22

در خانواده‌ای 3 فرزند به دنیا آمده است جدول توزیع احتمال تعداد پسران را در روش فوق حل کنید

احتمال سه پسر $=\frac{1}{8}$

احتمال دو پسر $=\frac{3}{8}$

احتمال یک پسر $=\frac{3}{8}$

احتمال صفر پسر $=\frac{1}{8}$

x	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

روش ۲:

$n=3$

$P=\frac{1}{2}$

x	$x=0$	$x=1$	$x=2$
P	$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$	$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$	$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

@iHamkelasi

iHamkelasi

مثال 23

در آزمایشگاهی 5 موش سفید و 4 موش سیاه دارم 3 موش را انتخاب می‌کنم جدول توزیع احتمال تعداد موش سفید را تشکیل دهید؟

x	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
P	$\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}$

نکته

برای منابع محدود ← فقط روش ترکیب مسائل کنید.

" نامحدود ← روش ضرب یا روش دوجمله‌ای تعداد زیاد

مثال 24

در کیسه‌ای 5 مهره قرمز، 4 مهره سفید، 3 مهره زرد داریم، دو مهره خارج می‌کنیم جدول توزیع احتمال تعداد مهره‌های سفید را بنویسید.

x	$x=0$	$x=1$	$x=2$
P	$\frac{\binom{4}{0}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{12}{2}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{8}{0}}{\binom{12}{2}}$

مثال 25

در آزمایشگاهی 5 موش سالم، 3 موش دیابتی نگهداری می‌شوند اگر دو موش از محفظه‌ای برنداشته باشند با کدام احتمال فقط یک موش دیابتی است؟

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}$$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید

مثال 25

در جعبه‌ای ۲۰ لامپ موجود است که ۵ تا از آن‌ها سوخته است. اگر ۳ لامپ انتخاب کنیم احتمال این‌که ۲ تا از آن‌ها سوخته باشد چقدر است؟

* منبع محدود

حل سؤال: $\begin{cases} n=3 \\ p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4} \\ x=2 \end{cases}$ $P(2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$

حل مسئله: $P(\text{لامپ سوخته})=\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{1}}{\binom{20}{3}}=\frac{5}{38}$

مثال 26

در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال این‌که RH خون فرزندان یک دوقلو مثبت باشد چقدر است؟

$P(\text{یک دوقلو}+)=P(RH^+,RH^-,RH^+,RH^-)+P(RH^-,RH^+,RH^-,RH^+)$

$=(,84\times,16\times,84\times,16)+(,16\times,84\times,16\times,84)$

برای دانلود جزوه های بیشتر به وبسایت همکلاسی به نشانی Hamkelasi.ir مراجعه کنید