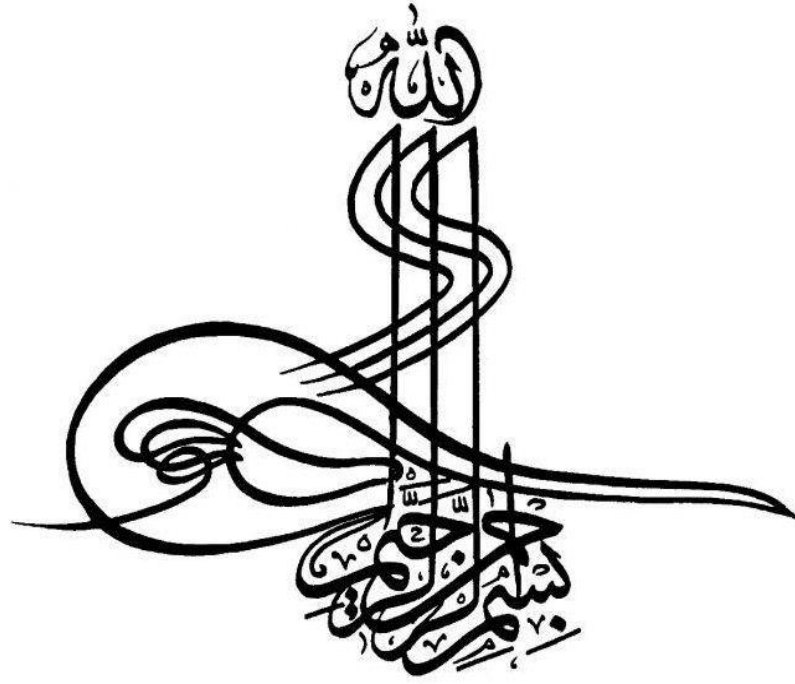




هم کلاسی
Hamkelasi.ir

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱



حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

مثلات

(فصل دوم ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی فیزیک)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی 

تمرین های برای آمادگی 

مؤلف:

حبيب هاشمی

۱۳۹۶

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

جهت تهیه جزوه کامل مثلثات (فصل دوم ریاضی پایه دهم)
تالیف **حبيب هاشمی** کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده
سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی
آموزش و پرورش و مدرس دانشگاه با شماره
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید..

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

مقدمه

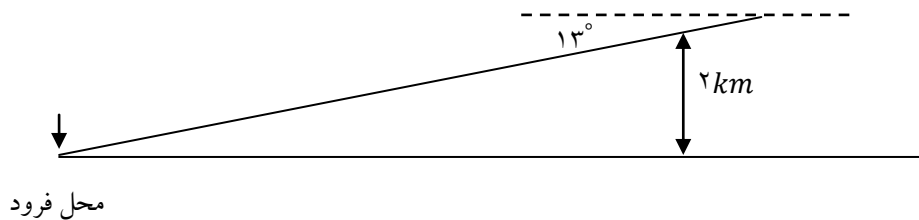
جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مثلثات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حیب هاشمی

درس اول: نسبت های مثلثاتی

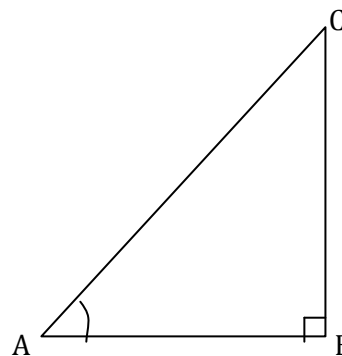
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، نجوم و غیره کاربرد دارد.



به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق 13° باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

در مثلث قائم الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویه ABC ، داریم.

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در

مثلث قائم الزویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزویه، ABC نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است

که آن را سینوس زاویه A می نامیم و با $\sin A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A

می نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

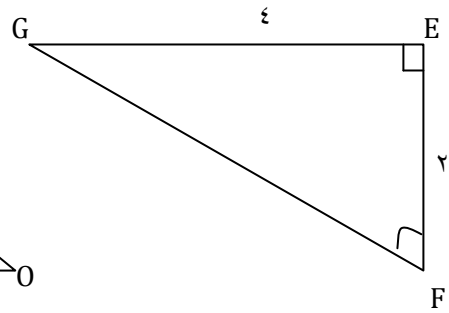
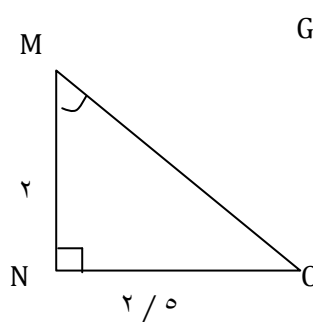
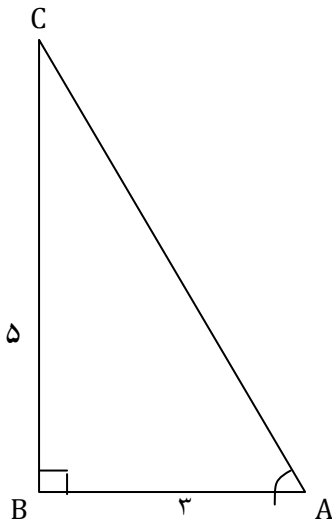
در یک مثلث قائم الزویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

نکته: به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزویه ABC ، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این رو

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ به طور مشابه، می توان دید } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

مثال: در هر يك از شكل های زیر، جاهای خالی را كامل كنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan G = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot G = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

مثال: در شكل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای α و β را بدست آورید.

$$5^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 25 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

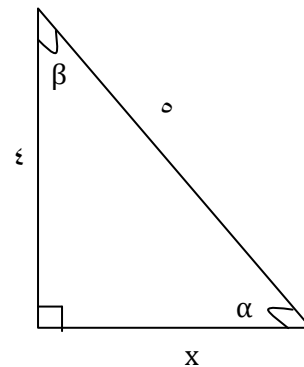
$$\cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \beta = \frac{4}{3}$$



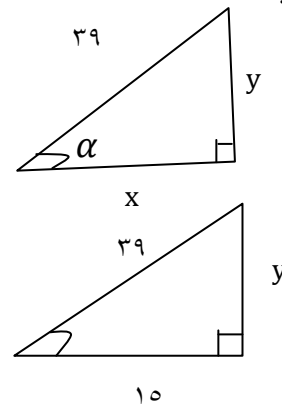
مثال: طول وتر يك مثلث قائم الزاويه ۳۹ و كسينوس يكي از زاويه های حاده ی آن $\frac{5}{13}$ باشد محیط مثلث را

بدست آورید.

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{39} \rightarrow \frac{5}{13} = \frac{x}{39} \rightarrow x = 15$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{39} \rightarrow (39)^2 = 15^2 + y^2 \rightarrow$$



مثال: در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی θ را بدست آورید.

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow x = 10$$

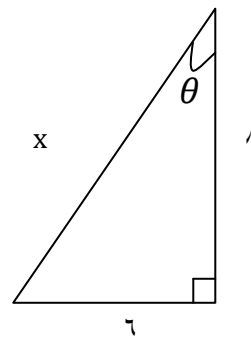
(الف)

$$\sin \theta = \frac{6}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{8}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{6}{8}$$

$$\cot \theta = \frac{8}{6}$$



$$(4\sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 + a^2$$

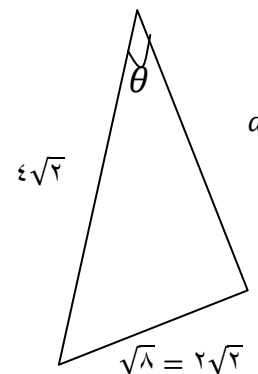
(ب)

$$32 = 8 + a^2 \rightarrow a^2 = 24 \rightarrow a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

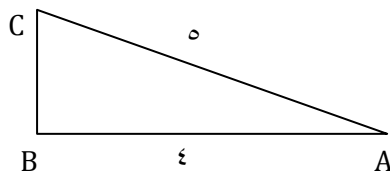


$$\cot\theta = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، $AB = 4$ و $AC = 5$ می باشند. مقدار $\tan A$ و $\cot A$ را

بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول ضلع BC را بدست می آوریم:



$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow BC = 3$$

$$\Rightarrow \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}, \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲، نسبت های مثلثاتی 30° و 60° را به دست آورید.

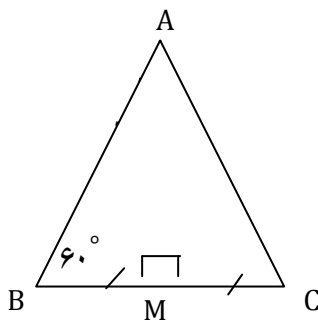
حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، نیمساز زاویه A را رسم می کنیم. (AM).

$$AM \text{ بر } BC \text{ عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: } BM = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABM ، داریم:

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{3}$$



نسبت های مثلثاتی زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

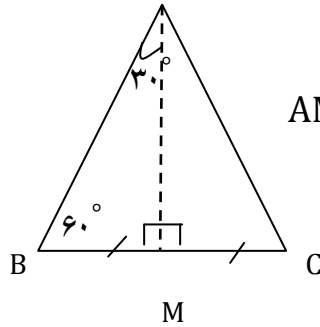
$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ ، نسبت های مثلثاتی 30° و 60° را به دست آورید

(حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، نیمساز زاویه A را رسم می کنیم (AM) .

$$AM \text{ بر } BC \text{ عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: } BM = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABM داریم:



$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$\Rightarrow AM = 3$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

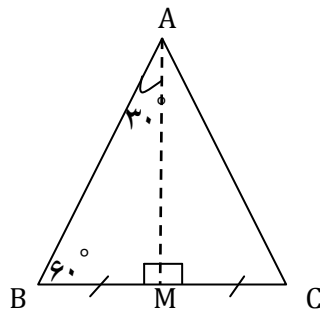
$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، نسبت های مثلثاتی 30° و 60° را به دست آورید

(حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، نیمساز زاویه A را رسم می کنیم. (AM).

$$BM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \text{ : بنابراین داریم: } AM \text{ بر } BC \text{ عمود است و آن را نصف می کند.}$$



بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABM ، داریم:

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه ABM :

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

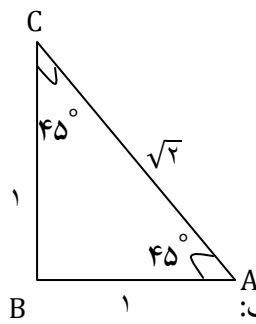
$$\cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱، نسبت های مثلثاتی 45° را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه A (یا C) در مثلث قائم الزاویه ABC به صورت زیر است:

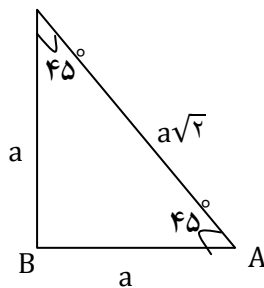
$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول a، نسبت های مثلثاتی 45°

را به دست آورید. حل) بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه A (یا C) در مثلث قائم الزاویه ABC به صورت زیر است:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1, \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای 60° و 45° و 30°

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال: مقدار عددی عبارت $3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ می باشند، داریم:

$$3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

مثال: مقدار عددی عبارت $\sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + 3 + 1 = 5 \end{aligned}$$

مثال: مقدار عددی عبارت $4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ \\ &= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 5(1) - 3 \times \frac{1}{2} = 4 - 5 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

مثال: مقدار عددی عبارت $8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ - \tan 60^\circ)$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & 8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ + \tan 60^\circ) \\ &= 8 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) = 4 + \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

مثال: مقدار عددی عبارت $-\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & -\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \sqrt{3} + 2(1) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + 2 = \frac{-\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{-7\sqrt{3}}{2} + 2 \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. (زوایای داده شده بر حسب درجه هستند).

$$۱) \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$۲) 2\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4+2-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{a \sin^m \theta = a(\sin \theta)^m}$$

$$۳) \tan 30^\circ \cot 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$۴) \sqrt{3} \tan 60^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$۵) 1 - 2\sin^2 30^\circ + \frac{\cos^2 30^\circ}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱) 2\tan 30^\circ \cot 30^\circ - 3\cot 45^\circ \tan 45^\circ$$

$$۲) (\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$$

$$۳) \frac{1 + \tan 60^\circ + \tan^2 60^\circ}{1 + \cot 60^\circ + \tan^2 60^\circ}$$

مثال: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱) 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$۲) ۱ + \tan^2 60^\circ = \frac{1}{\cos^2 60^\circ} \rightarrow ۱ + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} \rightarrow ۱ + ۳ = \frac{1}{\frac{1}{4}} \rightarrow ۴ = ۴$$

تمرین: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱) \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 30^\circ$$

$$۲) \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = ۱$$

$$۳) \frac{\sin^2 45^\circ}{2} = \sin^2 30^\circ$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC , $\hat{B} = 90^\circ$, $AB = 4$ و $BC = 6$ می باشد، حاصل هر یک از عبارت

های زیر را به دست آورید.

$$(\cos A + \sin C)(\cos A - \sin C) \quad (\text{الف})$$

$$\tan A (\tan C + \cot C) \quad (\text{ب})$$

حل (مطابق شکل و با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول وتر AC را به دست می آوریم:

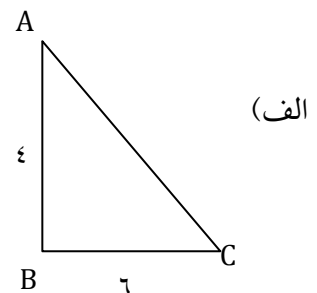
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 36 = 52$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}}, \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}}$$

$$(\cos A + \sin C)(\cos A - \sin C) = (\cos A)^2 - (\sin C)^2$$

$$= \frac{16}{52} - \frac{16}{52} = 0$$



(ب)

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\tan A (\tan C + \cot C) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{4+9}{6} \right) = \frac{13}{4}$$

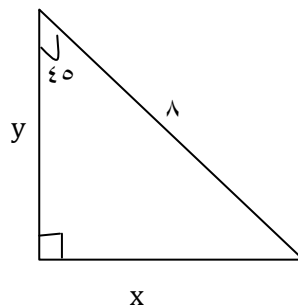
مثال: در هر شکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $\sin 45^\circ = \frac{x}{8}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{y}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{8} \rightarrow y = 4\sqrt{2}$$

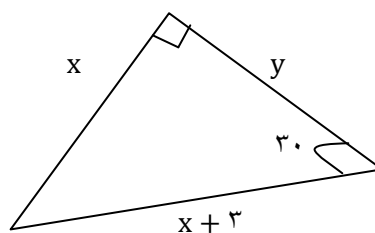


ب) $\sin 30^\circ = \frac{x}{x+3}$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x+3} \rightarrow 2x = x+3 \rightarrow x = 3$$

فیثاغورس $y^2 = 3^2 + 6^2$

$$y^2 = 9 + 36 \rightarrow y^2 = 45 \rightarrow y = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

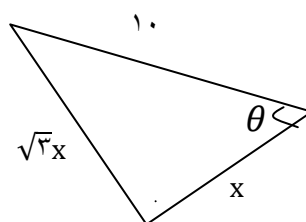


پ) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{x}{10}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{10}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 5$$

ت) $\sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{t} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{t} \Rightarrow t = 30$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ $\Rightarrow t^2 = (15\sqrt{3})^2 + x^2$

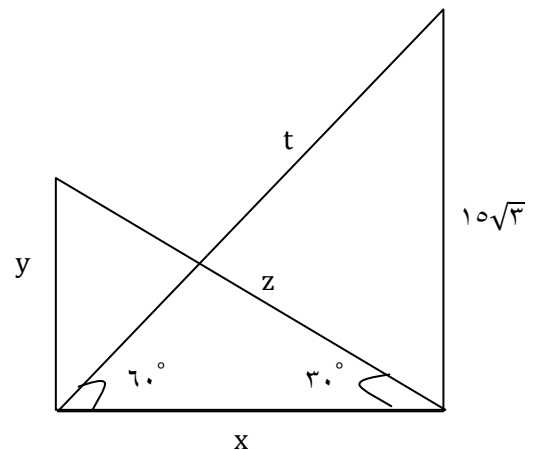
$$\Rightarrow 30^2 = 6\sqrt{5} + x^2$$

$$900 - 6\sqrt{5} = x^2 \Rightarrow 225 = x^2 \Rightarrow 15 = x$$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $\cos 30^\circ = \frac{x}{z}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{z} \rightarrow z = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{z} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10\sqrt{3}} \rightarrow y = 5\sqrt{3}$$



ث) $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$

$\sin 37^\circ = 4/5, \cos 37^\circ = 3/5$

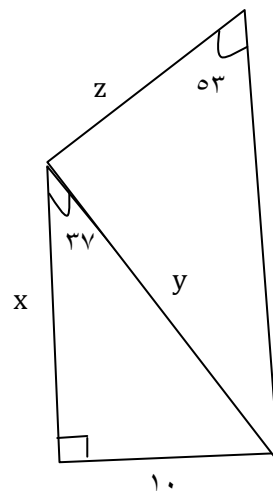
$$\sin 53^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow 4/5 = \frac{y}{z} \rightarrow z = \frac{5y}{4}$$

$$z = \frac{5y}{4}$$

$$\sin 37^\circ = \frac{10}{y}$$

$$4/5 = \frac{10}{y} \rightarrow y = \frac{125}{4}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{x}{y}, 3/5 = \frac{x}{125/4} \rightarrow x = \frac{3 \times 125}{5} = \frac{75}{1}$$

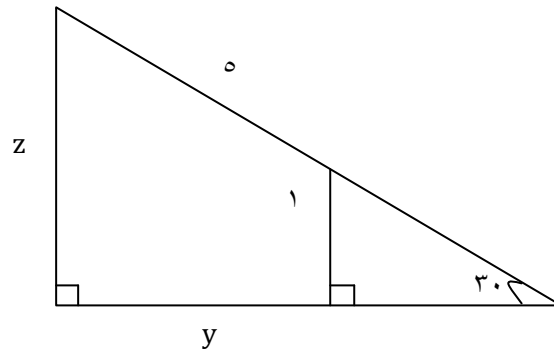


ج) در مثلث کوچک $\tan 30^\circ = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

در مثلث بزرگ $\sin 30^\circ = \frac{z}{5} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{5} \rightarrow z = \frac{5}{2}$

در مثلث بزرگ $\cos 30^\circ = \frac{x+y}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+y}{5} \rightarrow 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2y \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = y$

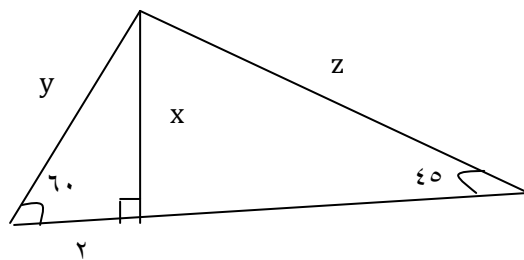
حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱



$$\text{ج) در مثل قائم الزاویه کوچک (ج) } \cos 60^\circ = \frac{2}{y} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{y} \rightarrow y = 4$$

$$\text{در مثل قائم الزاویه کوچک } \sin 60^\circ = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$\text{در مثل بزرگ } \sin 45^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{z} \rightarrow z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



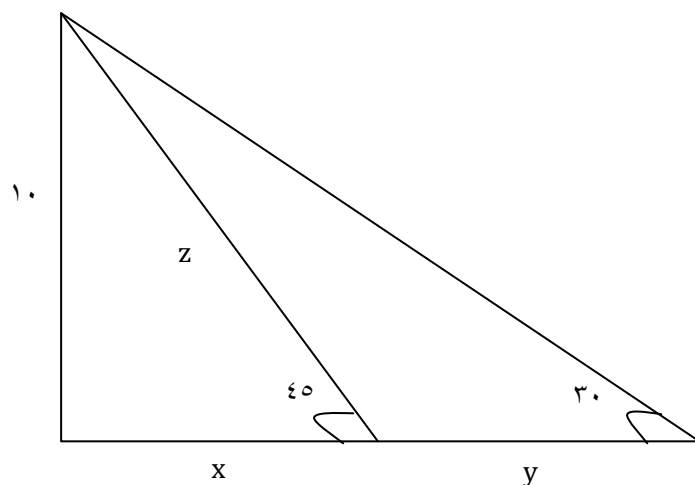
$$\text{ح) در مثل قائم الزاویه کوچک } \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{10}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{z} \rightarrow z = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

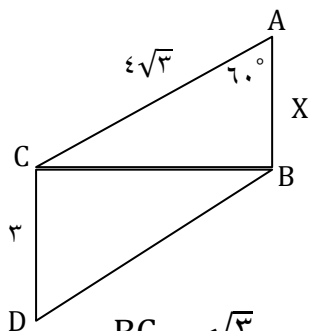
$$\text{در مثل قائم الزاویه کوچک } \cos 45^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{10\sqrt{2}} \rightarrow x = 10$$

$$\text{در مثل قائم الزاویه بزرگ } \tan 30^\circ = \frac{10}{x+y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{10+y}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} + \sqrt{3}y = 30 \rightarrow y = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$



مثال: در شکل رو به رو، نسبت های مثلثاتی زاویه D را به دست آورید.



حل (در مثلث قائم الزاویه ABC، داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{4\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

در مثلث قائم الزاویه BCD و با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

بنابراین:

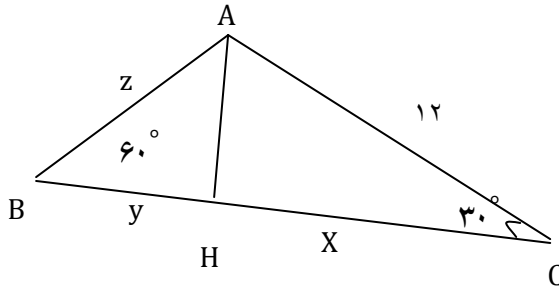
$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos D = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

$$\tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{6}{3} = 2, \quad \cot D = \frac{CD}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال: در مثلث روبه رو، مقادیر x, y, z را به دست آورید.



حل (در مثلث قائم الزاویه ACH داریم:

$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

حال برای به دست آوردن AH به دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} AH^2 &= AC^2 - CH^2 = 12^2 - (6\sqrt{3})^2 \\ &= 144 - 108 = 36 \Rightarrow AH = 6 \end{aligned}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{12} \Rightarrow AH = \frac{12}{2} = 6$$

در مثلث قائم الزاویه ABH، داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{z} \Rightarrow \sqrt{3}z = 12$$

$$\Rightarrow z = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

از دو روش برای به دست آوردن y استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = (4\sqrt{3})^2 - 6^2 = 48 - 36 = 12$$

$$\Rightarrow y = BH = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

روش دوم:

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

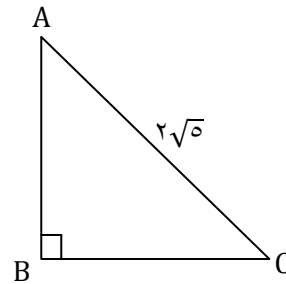
مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC , $B = 90^\circ$ ؛ طول وتر $2\sqrt{5}$ و $\tan C = 2$ می باشد.

(الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

(ب) نسبت های مثلثاتی زاویه A را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = 2 \Rightarrow AB = 2BC \quad (*)$$



بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \xrightarrow{(*)} (2\sqrt{5})^2 = (2BC)^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow 20 = 4BC^2 + BC^2 \Rightarrow 5BC^2 = 20 \Rightarrow BC^2 = \frac{20}{5} = 4$$

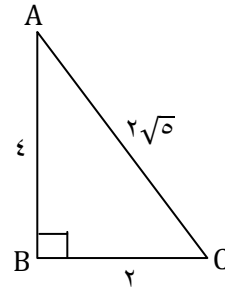
$$\Rightarrow BC = ۲ \xrightarrow{(*)} AB = ۴$$

(ب)

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{۲}{۲\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۲\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}, \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۲} = ۲$$



مثال: در هر يك از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

$$x \cos ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳} \tan ۳۰^\circ - ۴ \sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲} \cos ۴۵^\circ + \tan ۴۵^\circ} \quad (\text{الف})$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم.

سپس با حل معادله، مقدار X را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{۳} \tan ۶۰^\circ - ۴ \sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲} \cos ۴۵^\circ + \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} \times \frac{1}{\sqrt{۳}} - ۴ \times \frac{1}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + 1} = \frac{1 - ۲}{۲ + 1} = \frac{-1}{۳} \\ x \cos ۶۰^\circ = \frac{1}{۲} x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{۲} x = \frac{-1}{۳} \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^2 ۴۵^\circ = (\sin ۴۵^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^2 = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲ \times ۲} = \frac{1}{۲}$$

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

$$0^\circ < x < 90^\circ, \quad 2 \cdot \sin x = \frac{2 \tan 30^\circ + \cot 30^\circ}{\frac{1}{3}(\cot 45^\circ - \sin^2 45^\circ)} \quad (\text{ب})$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم.

سپس با حل معادله، مقدار X را به دست می آوریم:

$$\sin^2 45^\circ = (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \tan 30^\circ + \cot 30^\circ}{\frac{1}{3}(\cot 45^\circ - \sin^2 45^\circ)} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{6}} = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin x = 10\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

مثال: اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

$$-2 \sin \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha \quad (\text{الف})$$

حل) چون $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است، بنابراین: $\alpha = 30^\circ$

$$-2 \sin \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha = -2 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = -1 + 3 = 2$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cot(\alpha + 15^\circ) \quad (\text{ب})$$

حل)

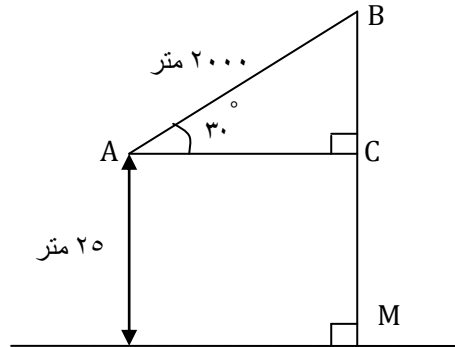
$$4 \cos^2 \alpha + \tan(\alpha + 15^\circ) = 4 \cos^2(30^\circ) + \cot(30^\circ + 15^\circ)$$

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

$$= 4 \cos 60^\circ + \cot 45^\circ = 4 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$$

مثال: يك موشك در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویه 30° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از

طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشك به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا يك مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید،

ارتفاع موشك از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + 25$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می دانیم $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. پس در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشك} = 1000 + 25 = 1025$$

مثال: يك موشك از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویه 60° پرتاب می شود. موشك پس از طی

$600\sqrt{3}$ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شكل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

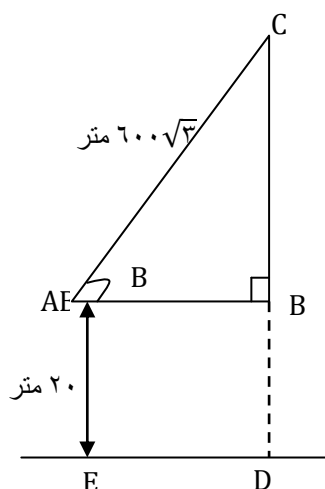
پس از طی $600\sqrt{3}$ متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر $DB + BC$ است. داریم:

$$\Delta ABC : \hat{B} = 90 \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{600\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 600\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 900$$

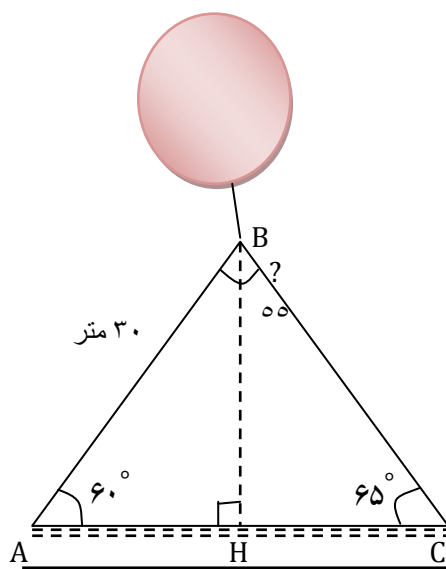
$$DB = AE = 20$$

$$\Rightarrow DC = DB + BC = 20 + 900 = 920$$



مثال: در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از

طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟ $\sin 65^\circ = 0.9$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BH می نامیم.

سپس طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست می آوریم.

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 = 15\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویه 65° طول طناب دوم را پیدا کنید.

Δ

$$BHC \rightarrow \sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 65^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{0.9} \cong 28 / 86$$

مثال: در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و

سرپائینی با سطح زمین به ترتیب 30° ، 45° است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

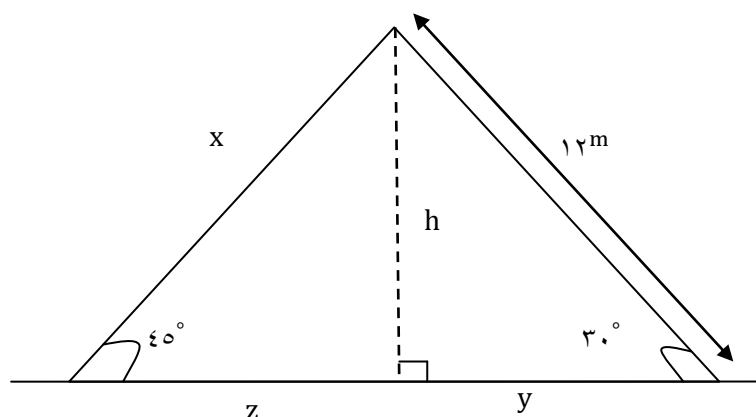
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی A و B چقدر است؟

الف) $\sin 30^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{12} \rightarrow h = 6$

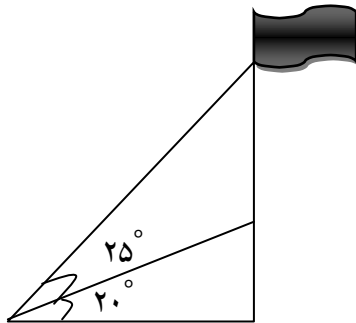
ب) $\sin 45^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ گویا

ج)
$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{y}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{12} \rightarrow y = 6\sqrt{3} \\ \cos 45^\circ = \frac{z}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z}{6\sqrt{2}} \rightarrow z = 6 \end{cases}$$
 طول تونل = $y + z = 6\sqrt{3} + 6$

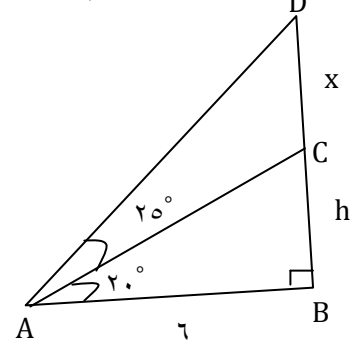


مثال: مطابق شکل، شخصی در فاصله ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میله پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض $\tan 20^\circ = 0.36$ به دست آورید.



حل (مطابق شکل داریم):



$$\triangle ABC: \tan 20^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow 0.36 = \frac{h}{6}$$

$$\Rightarrow h = 6 \times 0.36 = 2.16 \quad (*)$$

در مثلث قائم الزاویه ABD ، $A = 45^\circ$ داریم:

$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h+x}{6} \Rightarrow 1 = \frac{h+x}{6}$$

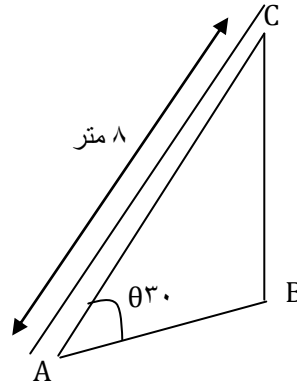
$$\stackrel{(*)}{\rightarrow} 2.16 + x = 6 \Rightarrow x = 3.84$$

بنابراین طول میله پرچم 3.84 متر است.

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی [@eshgheriazikonkour](https://t.me/eshgheriazikonkour)

مثال: مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با

سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

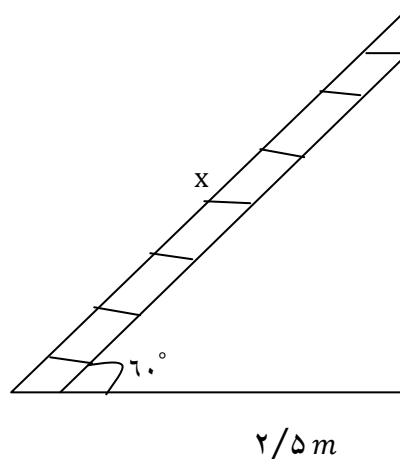
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

مثال: اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار $2/5 m$ باشد و زاویه

ای که نردبان با سطح افق می سازد، 60° باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از

سطح زمین قرار گرفته است؟

$$\cos 60^\circ = \frac{2/5}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2/5}{x} \rightarrow x = 5$$

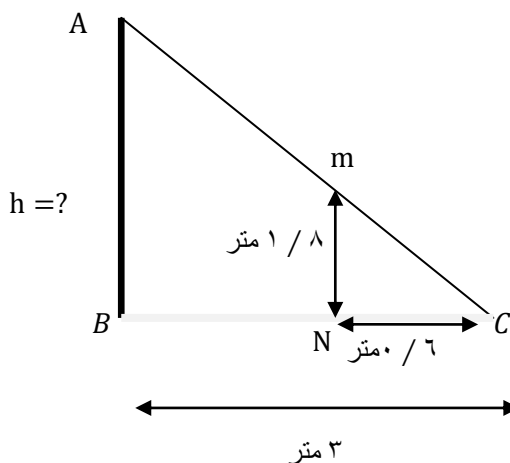


مثال: کيان می خواهد ارتفاع يک تير برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد کيان ۱/۸ متر و

سایه او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع تير برق چقدر است؟

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB} \rightarrow \frac{0/6}{3} = \frac{1/8}{h} \rightarrow h = \frac{0/6 \cdot 8}{3} = 9m$$

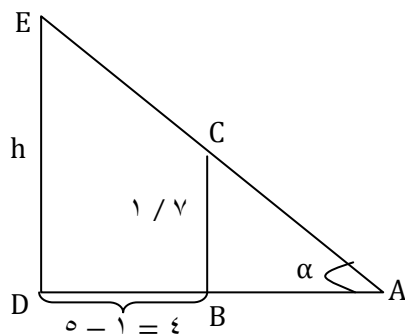


مثال: کميل می خواهد ارتفاع يک ميله را که طول سایه آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۷ متر و

طول سایه او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع ميله چه قدر است؟

حل) فرض کنیم ED ميله مورد نظر باشد. حال کميل بايد در نقطه ای قرار بگيرد که انتهای سایه های ميله و

خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم α زاویه پرتو تابش خورشيد با سطح افق باشد. در اين صورت:



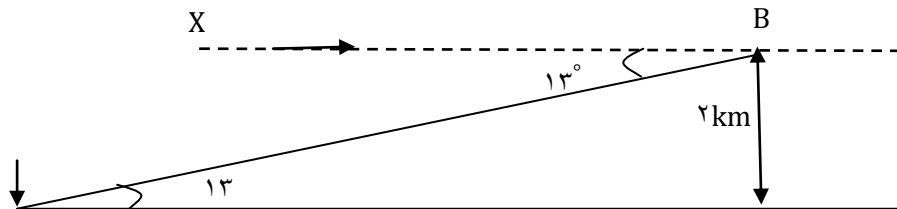
$$ABC: \tan \alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \quad ADE: \tan \alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Rightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

مثال: يك هواپيما در ارتفاع ۲ km از سطح زمين در حال فرود آمدن است. اگر زاويه هواپيما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپيما در چه فاصله ای از نقطه A فرود می آید.

$$\tan ۱۳^\circ \cong ۰/۲۳ \quad BX \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } CB} \hat{B}_1 = \hat{C} = ۱۳^\circ$$

$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \rightarrow AC \cong ۸/۶۹ \text{ km}$$

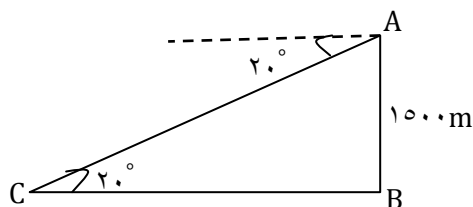


مثال: يك هواپيما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمين در حال فرود آمدن است. اگر زاويه هواپيما با افق محل فرود

۲۰° باشد، هواپيما تقريباً چه مسافتی را طی می کند تا روی زمين بنشیند؟ ($\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴$)

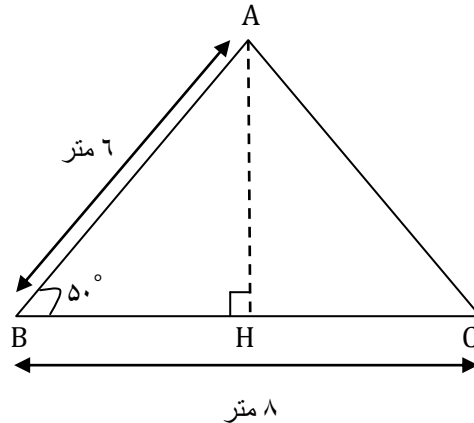
حل (مطابق شکل، اگر هواپيما در نقطه A باشد، آن گاه بنابر قضيه موازی و مورب، اندازه زاويه C برابر ۲۰° است و داريم (C محل فرود هواپيما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sin ۲۰^\circ = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



محاسبه مساحت مثلث با داشتن دوطرف و زاویه بین آن ها

می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:



$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin 50^\circ = 0.76$ ، داریم:

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 0.76 \times 6 = 4.56$$

ب) با توجه به قسمت الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4.56 \times 8 \approx 18.24$$

قضیه: در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$

به زبان ساده، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس

زاویه بین آنها

اثبات (در مثلث ABD ، ارتفاع BH را رسم می کنیم. داریم:

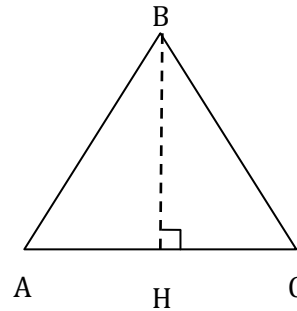
$$s = \frac{1}{2} \times BH \times AC \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه ABH ، داریم:

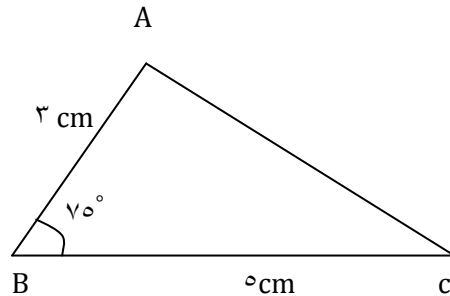
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \sin A \quad (۲)$$

$$(۱)(۲) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times (AB \times \sin A) \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$



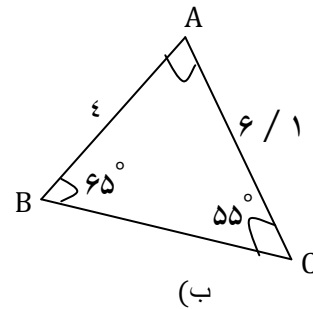
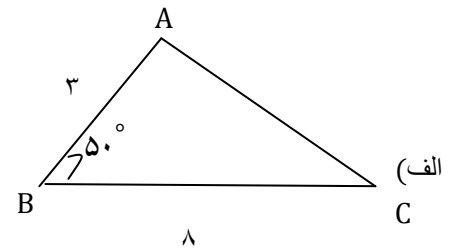
مثال: فرض کنید $\sin 75^\circ = \frac{4}{96}$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 75^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{4}{96} = \frac{5}{8}$$

مثال: در هر یک از شکل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید: ($\sin 50^\circ = 0.76$)



حل) مساحت مثلث ABC برابر است با:

(الف)

$$S = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin 50^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times 0.76 = 9.12$$

(ب) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر 180° است. پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 65^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6/1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{4} \sqrt{3}$$

مثال: در هر یک از قسمت های زیر، مساحت شکل را به دست آورید.

(الف) طول دو ضلع مثلث $3\sqrt{2}$ و 6 و زاویه بین آن ها 45° است.

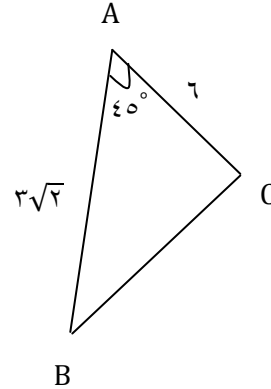
(ب) طول اضلاع متوازی اضلاع 7 و 16 و اندازه یک زاویه آن 60° است.

پ) طول ضلع لوزی ۸ و یک زاویه آن 30° است.

حل الف)

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 45^\circ$$

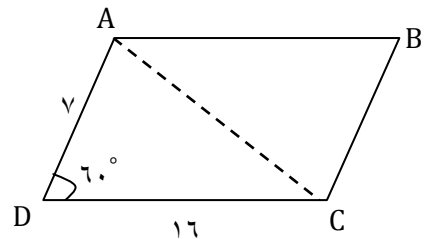
$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$$



ب) اگر قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \times DA \times DC \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$$



مساحت متوازی الاضلاع ABCD، دو برابر مساحت مثلث ADC است. پس:

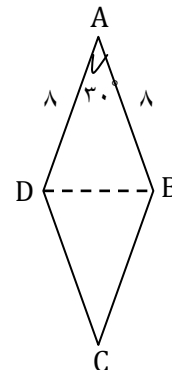
$$S_{ABCD} = 2 \times 28\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

پ) اگر قطر لوزی را رسم کنیم، لوزی به دو مثلث یکسان تقسیم می شود:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \times 16 = 32$$



حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

مثال: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.حل) در مثلث متساوی الاضلاع، طول هر سه ضلع برابر a و هر زاویه آن 60° می باشد، بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

مثال: مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع a را به دست آورید.حل اگر مرکز شش ضلعی منتظم را به رأس های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می شود مثلث OAB

متساوی الاضلاع است. زیرا:

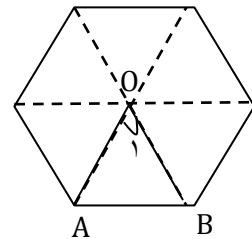
$$O_1 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, OA = OB$$

 \Rightarrow مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

$$\Rightarrow OA = OB = AB = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



بنابراین:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

مثال: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع 3 را به دست آورید.

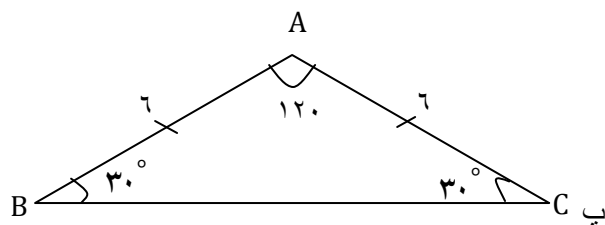
$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} 3^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

مثال: در مثلث ABC ، $AC = 4$ ، $BC = 6$ و $\hat{C} = 25^\circ$ می باشد، با فرض $\sin 25^\circ = 0/42$ ، مساحت مثلث

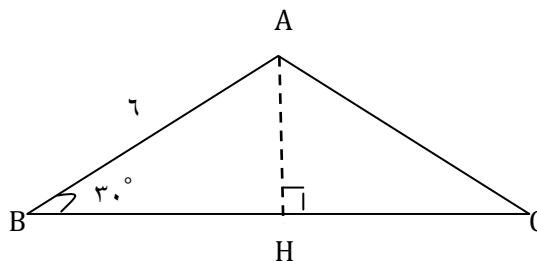
ABC را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 25^\circ = 12 \times 0/42 = 5/04$$

مثال: مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



حل) مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین:



$$\hat{C} = \hat{B} = 30^\circ, AC = AB = 6$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. داریم:

$$\Delta$$

$$ABH = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

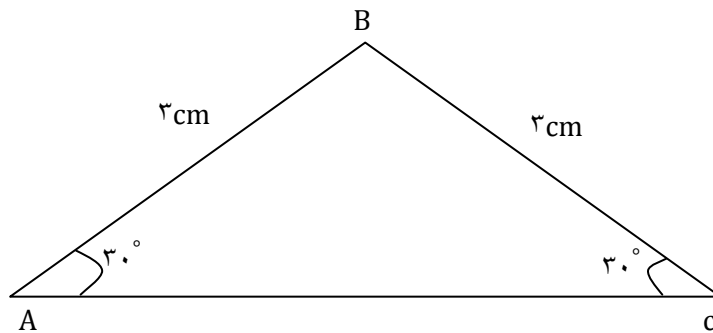
$$\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 36 - 9 = 27$$

حبيب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

$$\Rightarrow BH = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2BH = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3 \times 6\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

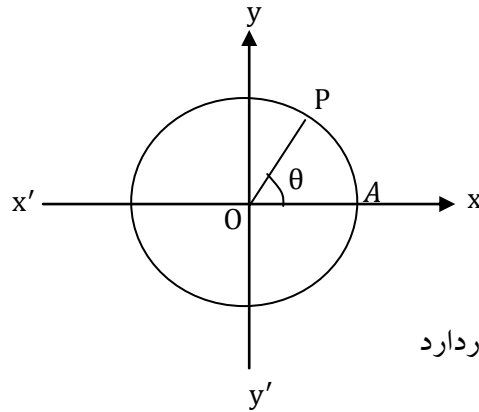
تمرین: مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیر که دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوئیم.



۱- مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار دارد

۲- شعاع دایره ۱ است

۳- نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

قرار داد: گر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و

اگر حرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour