هم کلاسی

Hamkelasi.ir

۱. در مثلثی معادله‌ی دو ضلع AB و AC به ترتیب $y+x=۲$ و $۴x+۳y=۸$ است. مجموع مختصات راس A کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۲. در مثلث با رئوس $A(۳,۲)$ ، $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,۶)$، شیب ارتفاع CH کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۵ ۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) -۵

۳. دسته خطوطی که از نقطه‌ی $A|_{۲}^{۱}$ می‌گذرند کدامشان بر خط $y=x+۱$ عمود است؟

۱) $y=-x-۱$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=x-۱$ ۴) $y=-x+۳$

۴. دسته خطوط $(m+۱)x+(۲m-۱)y+۲m+۵=۰$ از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند. فاصله‌ی این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

۵. معادله‌ی خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع کرده و بر خط $۲x+۳y=-۱$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $۲y=۳x+۹$ ۲) $۲y+۳x=۹$ ۳) $۳y=۲x+۶$ ۴) $y-۳x=۲$

۶. فاصله‌ی بین دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

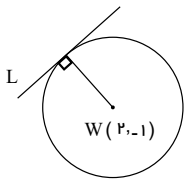
۷. اگر یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله‌ی $y=x+۲$ و نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۹ ۴) $\frac{۶}{\sqrt{۲}}$

۸. اگر دو خط $۲y-۳x=۱$ و $y=mx+۵$ با هم موازی باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) -۳

۹. خط $L: ۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

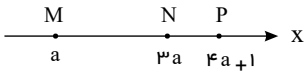


۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۰. اگر نقاط $A(۰,۱)$، $B(۱,۴)$ و $C(۳,۰)$ رئوس مثلث ABC باشند، با مشخص کردن طول اضلاع، نوع این مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) متساوی‌الساقین با یک زاویه‌ی منفرجه
۴) قائم‌الزاویه با یک زاویه‌ی ۳۰°

۱۱. در شکل مقابل داریم : $۲MN + MP = ۲۲$، اندازه‌ی پاره‌خط NP کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴

۱۲. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a-۱, b-۵)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-۱,۴)$، نقطه‌ی $B(۲b+۵, ۲a+۱)$ می‌باشد. ab کدام است؟

۱) ۴۰
۲) -۴۰
۳) ۸۰
۴) -۸۰

۱۳. نقاط $A(۷,۵)$ و $C(۳,۹)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) $۴\sqrt{۱۰}$
۴) ۲۴

۱۴. چند نقطه روی تابع $y = |x+۲|$ وجود دارد که از مبداء مختصات به فاصله سه باشند؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۵. سه نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}۰\\-۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۱\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۲\\-۴\end{vmatrix}$ سه رأس یک مثلث هستند. این مثلث همواره چگونه است؟

۱) مختلف‌الاضلاع است.
۲) متساوی‌الساقین است ولی قائم‌الزاویه نیست.
۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین است.
۴) قائم‌الزاویه است ولی متساوی‌الساقین نیست.

۱۶. مثلثی با رئوس $C(۲,۳), B(-۲,۵), A(۲,۶)$ مفروض است. طول میانه‌ی AM کدام است؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) ۸

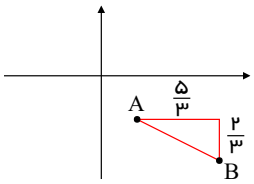
۱۷. مساحت مثلثی با رئوس $(۵,۲)$، $(۴,۰)$ و $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

۱۸. نقاط $A\begin{vmatrix}۶\\۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۵\\۵\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۶\\۸\end{vmatrix}$ سه رأس یک لوزی هستند. مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۲۴
۴) ۳

۱۹. در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه‌ی B, A می‌گذرد کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $-\frac{۲}{۵}$
۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲۰. معادله‌ی خطی که به موازات نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه‌ی دوم را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ قطع می‌کند کدام است؟

۱) $y + x = ۴$ ۲) $y + x = -۴$ ۳) $y - x = ۴$ ۴) $y - x = -۴$

۲۱. اگر خطوط $y = (k+۲)x + ۳$ و $ky - x - ۵ = ۰$ معادلات قطرهای یک مربع باشند فاصله‌ی محل تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $\sqrt{۱۸}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

۲۲. رأس‌های مثلثی $A(-۵,۶)$, $B(-۱,-۴)$ و $C(۳,۲)$ هستند. معادله‌ی ارتفاع BH از مثلث مذکور کدام است؟

۱) $-۲x + y + ۵ = ۰$ ۲) $۲y + x + ۹ = ۰$ ۳) $۲y - x + ۷ = ۰$ ۴) $۲x - y - ۲ = ۰$

۲۳. در مثلثی با رئوس $A(-۱,-۴)$ ، $B(-۵,۶)$ و $C(۳,۲)$، معادله‌ی ارتفاع AH کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۲$ ۲) $۲y + x + ۹ = ۰$ ۳) $y = ۴x$ ۴) $y - ۲x - ۶$

۲۴. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB : ۲y - x = ۳$ و $AC : y - ۲x = ۵$ و $BC : ۲y + ۳x = ۶$ می‌باشند ارتفاع AH از این مثلث محور طول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۶}$

۲۵. نقاط $A\begin{vmatrix} m \\ m-۱ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۵ \\ -۴ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} ۱ \\ -۲ \end{vmatrix}$ رئوس مثلث ABC هستند که در رأس C قائمه است. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۲۰}$ ۴) $۲\sqrt{۲۰}$

۲۶. اگر $A\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۳ \\ ۰ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} ۱ \\ -۲ \end{vmatrix}$ سه رأس مثلث ABC باشند ارتفاع AH محور عرض را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۷. خطی که از نقاط متمایز $A(m\ ,\ -۱)$, $B(۱\ ,\ ۱ - ۲m)$ می‌گذرد، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است. این خط محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) $-۱/۵$ ۴) $-۲/۵$

۲۸. یک راس مربعی، نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و یک ضلع آن واقع بر خط $۳x + ۴y = ۱$ است. مساحت مربع کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۰۴

۲۹. مرکز مربعی، نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و معادله‌ی یک ضلع آن $۴x - ۳y = ۱$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۳/۲۴ ۲) ۳/۶ ۳) ۹/۶۴ ۴) ۱۲/۹۶

۳۰. نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ رأس مربعی است که یک قطر آن منطبق بر خط به معادله‌ی $x + y = ۵$ است محیط این مربع، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶

۳۱. فاصله‌ی خطی که دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ را به هم وصل می‌کند از خطی که دو نقطه‌ی $C\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۲. فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۲)$ از خط $۲x+y=۶$ چند برابر فاصله‌ی این خط از خط $۲y=۱-۴x$ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۳۳. دو نقطه‌ی روی نیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه‌ی $A(۱,۲)$ به فاصله‌ی ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۳۴. نقاط $A(۲,۵)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۰,۲)$ سه راس مثلثی هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۵}{۲}$ و $\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۲}$ و $\frac{-۱}{۲})$

۳۵. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول، مثلثی به مساحت $\frac{۹}{۲}$ بسازد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶. دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x+۲y=۰$ به فاصله $۲\sqrt{۵}$ هستند اگر این دو نقطه از A و B و بنامیم و نقطه C روی محور عرض به عرض ۳ باشد در این صورت مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $\frac{۱۹۰}{۳}$ ۴) $\frac{۹۵}{۳}$

۳۷. خطی با شیب m از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ گذشته و با محورهای مختصات مساحتی برابر ۴ واحد مربع می‌سازد حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

۳۸. اگر دو خط $y=۴x+۲$ و $y=۴x+m^۲-۷$، بر دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع منطبق باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) m هر عددی می‌تواند باشد.
۲) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳
۳) m هر عددی می‌تواند باشد به جز -۳
۴) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳ و -۳

۳۹. اگر خط به معادله‌ی $ay+x=b$ بر خط به معادله‌ی $ax+by=۱$ عمود باشد و از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ بگذرد، آنگاه $a+b$ کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۲

۴۰. دو خط به معادله‌ی $my - x = -7$ و $x + y = 2m^3$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟

۱) صفر **۲) ۱** **۳) ۲** **۴) ۳**

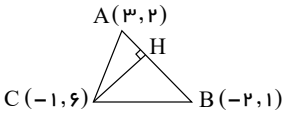
۱.گزینه ۴ رأس A محل برخورد دو ضلع AB و AC است پس کافی است با معادلات داده شده تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی A بدست آید.

$$-۳\begin{cases} y+x=۲ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳y-۳x=-۶ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \rightarrow x=۲\ ,\ y=۰$$

$$\Rightarrow A(۲,۰) \Rightarrow A \text{ مجموع مختصات رأس} = ۲$$

۲.گزینه ۴ ارتفاع CH از راس C بر ضلع AB عمود می‌شود. بنابراین شیب آن عکس و قرینه‌ی شیب AB است.

$$mAB=\frac{yA-yB}{xA-xB}=\frac{۲-۱}{۳-(-۲)}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow mCH=\frac{-۱}{mAB}=-۵$$



۳.گزینه ۴ گزینه‌ای درست است که نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ در آن صدق کند و در ضمن شیب خط برابر -۱ باشد زیرا:

$$y=x+۱ \rightarrow m=۱ \xrightarrow{\text{عمود}} m'=-۱$$

۴.گزینه ۳ برای پیدا کردن نقطه‌ی ثابت دسته خطوط کافی است به m دو مقدار مختلف داده و با دو خط به دست آمده تشکیل دستگاه دهیم و y,x را پیدا کنیم.

$$m=-۱ \rightarrow -۳y-۲+۵=۰ \rightarrow y=۱$$
$$m=\frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{۳}{۲}x+۱+۵=۰ \rightarrow x=-۴ \rightarrow A\left|\begin{matrix}-۴\\۱\end{matrix}\right. \text{ نقطه‌ی ثابت}$$
$$A\left|\begin{matrix}-۴\\۱\end{matrix}\right. \text{و} O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \rightarrow AO=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$$

۵.گزینه ۱ هر نقطه روی محور xها دارای ارتفاع صفر می‌باشد یعنی $A(-۳,۰)$، هرگاه دو خط بر هم عمود باشند شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است پس داریم:

$$۲x+۳y=-۱ \Rightarrow ۳y=-۲x-۱ \Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m'=+\frac{۳}{۲}$$

حال معادله خط مورد نظر برابر است با:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)$$

$$y-۰=\frac{۳}{۲}(x-(-۳)) \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}(x+۳) \xrightarrow{\times ۲} ۲y=۳(x+۳) \Rightarrow ۲y=۳x+۹$$

۶.گزینه ۲

راه حل اول:

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی دو خط موازی کافیست یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله‌ی آن را از خط دیگر به‌دست آورید.

نقطه‌ی $M(۸,۴)$ در معادله‌ی خط $۵x-۱۲y+۸=۰$ صدق می‌کند، فاصله‌ی M از خط $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|-۱۰\times(۸)+۲۴\times(۴)+۱۰|}{\sqrt{۱۰^۲+۲۴^۲}}=\frac{|۲۶|}{۲۶}=۱$$

راه حل دوم:

ابتدا با تغییراتی معادلات هر خط را به یک فرم تبدیل می‌نمائیم.

$$-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰ \xrightarrow{\div(-۲)} ۵x-۱۲y-۵=۰$$

حال با استفاده از رابطه زیر فاصله دو خط را محاسبه می‌نماییم.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۵-۸|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۱۳}{۱۳}=۱$$

۷.**گزینه ۱** نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ در معادله‌ی $y=x+۲$ صدق نمی‌کند. پس رأس A روی این خط قرار ندارد.

اندازه‌ی ضلع مربع برابر با فاصله‌ی A تا خط $x-y+۲=۰$ است.

طول ضلع مربع : $d=\frac{|۳-(-۱)+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$

$$S=\left(\frac{۶}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$$

۸.**گزینه ۲** نکته: در معادله‌ی استاندارد خط به‌صورت $y=ax+b$، مقدار a را شیب و مقدار b را عرض از مبدأ می نامیم.

نکته: دو خط زمانی با هم موازی‌اند که شیب‌هایشان برابر باشند.

صورت استاندارد معادله‌ی خط $۲y-۳x=۱$، به صورت $y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}$ است. پس شیب آن برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض، خط $y=mx+۵$ با این خط موازی است، بنابراین: $m=\frac{۳}{۲}$

۹.**گزینه ۲** نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته: اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، آن‌گا فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط، برابر شعاع دایره است.

کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی W را از خط L حساب کنیم.

$$L: ۳x-۴y=۰\ ,\ W(۲,-۱): \quad R=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

۱۰.**گزینه ۱** نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

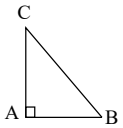
$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

نکته (عکس قضیه‌ی فیثاغورس): اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

$$AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$AC=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}\ ,\ BC=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

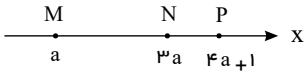
بنابراین $AB=AC$ و $BC^۲=AB^۲+AC^۲$. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



۱۱.**گزینه ۴** نکته‌ی ۱: اگر A و B دو نقطه‌ی هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه: $AB=|x_B-x_A|$

نکته‌ی ۲: اگر A و B دو نقطه‌ی هم طول در صفحه باشند، آن‌گاه: $AB = |yB - yA|$

با توجه به اینکه هر سه نقطه روی محور xها واقع‌اند، پس هم‌عرض هستند، بنابراین با استفاده از نکته‌ی بالا می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} MN = xN - xM = ۳a - a = ۲a \\ MP = xP - xM = ۴a + ۱ - a = ۳a + ۱ \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر بالا در معادله‌ی $۲MN + MP = ۲۲$**، خواهیم داشت:**

$$۲(۲a) + ۳a + ۱ = ۲۲ \Rightarrow ۷a + ۱ = ۲۲ \Rightarrow \boxed{a = ۳}$$

پس اندازه‌ی پاره‌خط NP برابر است با:

$$NP = xP - xN = ۴a + ۱ - ۳a = a + ۱ = ۳ + ۱ = ۴ \Rightarrow \boxed{NP = ۴}$$

۱۲. گزینه ۴ **راه حل اول:**

نکته: مختصات وسط پاره‌خط AB، عبارت است از: $M(\frac{xA + xB}{۲}, \frac{yA + yB}{۲})$

نقاط A و B نسبت به نقطه‌ی M قرینه‌اند، پس نقطه M وسط آن‌ها قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{xA + xB}{۲} = xM \Rightarrow \frac{a - ۱ + ۲b + ۵}{۲} = -۱ \\ \frac{yA + yB}{۲} = yM \Rightarrow \frac{b - ۵ + ۲a + ۱}{۲} = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + ۲b = -۶ \\ ۲a + b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۰ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = -۸۰}$$

راه حل دوم:

نکته: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ **نسبت به نقطه‌ی** $M(x_M, y_M)$**، عبارت است از:**

$$B(۲x_M - x_A\ ,\ ۲y_M - y_A)$$

با توجه به نکته‌ی بالا، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a - ۱, b - ۵)$ **نسبت به نقطه‌ی** $M(-۱, ۴)$ **عبارت است از:**

$$B(-۲ - a + ۱, ۸ - b + ۵) = B(-a - ۱, -b + ۱۳)$$

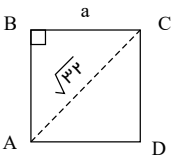
طبق فرض مختصات این نقطه به‌صورت $B(۲b + ۵, ۲a + ۱)$ **است. پس :**

$$\begin{cases} ۲b + ۵ = -a - ۱ \\ ۲a + ۱ = -b + ۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + ۲b = -۶ \\ ۲a + b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۰ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = ۸۰}$$

۱۳. گزینه ۱

نکته: فاصله‌ی نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با: $AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$

نکته (قضیه‌ی فیثاغورس): در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.



طول پاره‌خط AC برابر طول قطر مربع است که با توجه به نکته‌ی بالا برابر است با:

طول قطر مربع : $d = AC = \sqrt{(۳ - ۷)^۲ + (۹ - ۵)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۱۶} = \sqrt{۳۲}$

اگر طول ضلع مربع a باشد، طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC خواهیم داشت:

$$a^۲ + a^۲ = (\sqrt{۳۲})^۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow \boxed{a = ۴}$$

بنابراین محیط این مربع برابر است با: $۴ \times ۴ = ۱۶$

تذکر: در مربعی به‌طول ضلع a، طول قطر برابر $d = \sqrt{۲}a$ **است.**

۱۴. گزینه ۳ **یک نقطه دلخواه روی تابع** $y = |x + ۲|$ **در نظر می‌گیریم** $A\begin{vmatrix} x \\ |x + ۲| \end{vmatrix}$ **و فاصله‌ی آن از مبدأ یعنی** $O\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ **را حساب می‌کنیم .**

دو ریشه مختلف العلامت دارد

$$OA=\sqrt{x^{۲}+(x+۲)^{۲}}=۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲}+x^{۲}+۴+۴x=۹ \Rightarrow ۲x^{۲}+۴x-۵=۰ \xrightarrow{\frac{c}{a}<۰}$$

۱۵.گزینه ۳ کافی است طول سه ضلع مثلث را حساب کنیم.

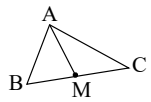
$$AB=\sqrt{(۰-۳)^{۲}+(-۱-۱)^{۲}}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$
$$AC=\sqrt{(۰-۲)^{۲}+(-۱+۴)^{۲}}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow$$ مثلث متساوی الساقین است.
$$BC=\sqrt{(۳-۲)^{۲}+(۱+۴)^{۲}}=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}$$

برای این که مشخص کنیم این مثلث، قائم‌الزاویه است یا خیر باید رابطه‌ی فیثاغورث را چک کنید.

$$(\sqrt{۲۶})^{۲}=(\sqrt{۱۳})^{۲}+(\sqrt{۱۳})^{۲} \rightarrow ۲۶=۱۳+۱۳ \rightarrow ۲۶=۲۶ \rightarrow$$ مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۶.گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی M (وسط ضلع BC) را می‌یابیم:

$$M\left|\begin{matrix}\frac{xB+xC}{۲}\\ \frac{yB+yC}{۲}\end{matrix}\right. \rightarrow M\left|\begin{matrix}۰\\ ۴\end{matrix}\right.$$



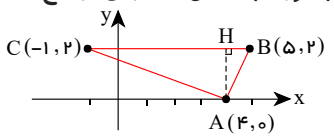
حال کافی است طول AM را به دست بیاوریم:

$$AM=\sqrt{(۰-۲)^{۲}+(۴-۶)^{۲}}=\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۱۷.گزینه ۳ هرگاه از سه رأس داده شده مثلث، دو نقطه دارای طول‌ها یا عرض‌های مساوی باشند برای پیدا کردن مساحت مثلث از رسم شکل استفاده کنید.

با توجه به شکل، اندازه‌ی ارتفاع AH، برابر ۲ و اندازه‌ی قاعده‌ی BC برابر $۶=(-۱)-۵$ است. بنابراین:

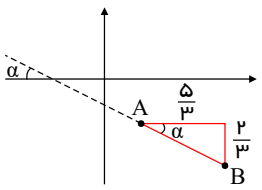
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶=۶$$



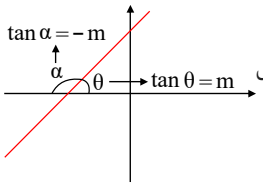
۱۸.گزینه ۱ این سه رأس لوزی به هر ترتیبی که باشند با یکدیگر مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحت آن نصف مساحت لوزی است پس مساحت مثلث تولید شده توسط این سه رأس را به دست آورده و حاصل را دو برابر می‌کنیم.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$
$$=\frac{۱}{۲}|۶(۵-۸)+۵(۸-۲)+۶(۲-۵)|=\frac{۱}{۲}|-۱۸+۳۰-۱۸|=\frac{۶}{۲}=۳ \rightarrow S_{\text{لوزی}}=۲\times ۳=۶$$

۱۹.گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



$$\text{پس}: \tan\alpha=-m=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۲}{۵} \rightarrow m=-\frac{۲}{۵}$$

۲۰. گزینه ۴ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y=x$ است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط ،نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم $(y=-x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس عرض آن $y=-2$ است.

$$A\left|{2 \atop -2}\right., m=1 \rightarrow y-(-2)=1(x-2) \rightarrow y+2=x-2 \rightarrow y-x=-4$$

۲۱. گزینه ۲ قطرهای مربع بر هم عمودند پس شیب قطرها عکس و قرینه هم هستند.

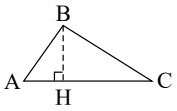
$$y=(k+2)x+3 \rightarrow m=k+2 \xrightarrow[mm'=-1]{\text{شرط عمود بودن}} \frac{k+2}{k}=-1 \rightarrow k+2=-k=-1$$
$$ky-x-5=0 \rightarrow m'=\frac{1}{k}$$

حال با معلوم بودن k ، معادلات دو خط را نوشته و آنها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k=-1 \rightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ -y-x-5=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x=-4\ ,\quad y=-1$$
$$A\left|{-4 \atop -1}\right., O\left|{0 \atop 0}\right. \rightarrow AO=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$$

۲۲. گزینه ۴ ارتفاع BH از رأس B بر ضلع AC عمود می‌شود:

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{6-2}{-5-3}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow m_{BH}=2$$

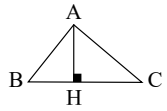


حال، با داشتن شیب و یک نقطه، معادله‌ی ارتفاع را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0) \xrightarrow[m=2]{B(-1,-4)} y+4=2(x+1) \Rightarrow y=2x-2 \Rightarrow 2x-y-2=0$$

۲۳. گزینه ۱ ارتفاع AH از راس A بر امتداد BC عمود است. پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است. بنابراین:

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{6-2}{-5-3}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow m_{AH}=2$$



حال معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(-1,-4)$ با شیب ۲ را می‌نویسیم:

$$y+4=2(x+1) \Rightarrow y=2x-2$$

۲۴. گزینه ۲ ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است پس شیب آن عکس و قرینه‌ی شیب ضلع BC است.

$$2y+3x=6 \rightarrow m_{BC}=-\frac{3}{2} \rightarrow m_{AH}=\frac{2}{3}$$

اگر معادلات دو ضلع AB و AC را با هم تلاقی دهیم رأس A بدست می‌آید.

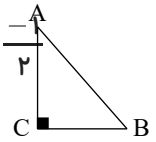
$$\begin{cases} 2y-x=3 \\ y-2x=5 \end{cases} \rightarrow x=-\frac{7}{3}\ ,\ y=\frac{1}{3}$$

حال، با داشتن نقطه و شیب معادله‌ی ارتفاع AH را می‌نویسیم.

$$A\left|{-\frac{7}{3} \atop \frac{1}{3}}\right.\ ,\ m=\frac{2}{3} \rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3}) \xrightarrow{y=0} -\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{14}{9} \rightarrow \frac{2}{3}x=-\frac{17}{9} \rightarrow x=-\frac{17}{6}$$

۲۵. گزینه ۱

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{m-1+2}{m-1}=\frac{m+1}{m-1} \quad , \quad m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{xB-x_C}=\frac{-4+2}{5-1}=-\frac{1}{2}$$
$$\xrightarrow{AC \text{ بر } BC \text{ عمود است}} m_{AC}\cdot m_{BC}=-1$$



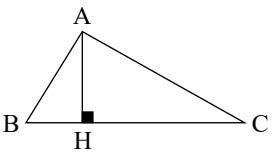
چون ضلع AC بر ضلع BC عمود است بنابراین حاصل‌ضرب شیب‌هایشان -1 می‌باشد.

$$\Longrightarrow \frac{-m-1}{2m-2}=-1 \rightarrow -m-1=-2m+2 \rightarrow m=3$$
$$\text{وتر}=AB=\sqrt{(x_A-xB)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(m-5)^2+(m-1+4)^2}$$
$$=\sqrt{(m-5)^2+(m+3)^2} \xrightarrow{m=3} \sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$$

۲۶.گزینه ۱

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۰+۲}{۳-۱}=۱ \xrightarrow{AH\perp BC} m_{AH}=-۱, A\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\to y-۲=-۱(x+۱)\to y=-x+۱ \xrightarrow{x=۰} y=۱$$



۲۷.گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(m\,,\,-۱)\ ,\ B(۱\,,\,۱-۲m)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y+۱}{x-m}=\frac{-۱-۱+۲m}{m-۱}=\frac{۲m-۲}{m-۱}=\frac{۲(m-۱)}{m-۱}=۲$$

$$\to y+۱=۲x-۲m\to y=۲x-۲m-۱$$

چون خط، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، بنابراین:

$$(۰\,,\,۳)\in \text{خط} \ \Rightarrow\ ۳=۰-۲\,m-۱\ \Rightarrow\ m=-۲$$

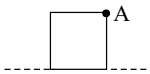
پس معادله‌ی خط به صورت $y=۲x+۴-۱=۲x+۳$ است.

حال برای یافتن نقطه‌ی تقاطع خط با محور xها، $y=۰$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:

$$۰=۲x+۳\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

۲۸.گزینه ۴

مختصات نقطه‌ی داده شده در معادله‌ی خط، صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی ضلع داده شده قرار ندارد.



$$۳x+۴y-۱=۰$$

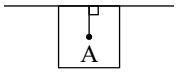
$$\text{ضلع مربع}=۳x+۴y-۱=۰\ \text{از خط}\ (۲,-۱)\ \text{فاصله‌ی نقطه‌ی}=\frac{|۳\times ۲+۴(-۱)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱}{۵}$$

$$\text{مساحت مربع}=(\frac{۱}{۵})^۲=۰/۰۴$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۲۹.گزینه ۴

فاصله‌ی مرکز مربع از هر یک از اضلاع آن، نصف طول ضلع است.

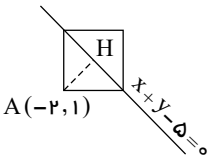


نصف طول ضلع $=\frac{|۴(۱)-۳(۴)-۱|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۹}{۵}$ فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط $۴x-۳y-۱=۰$

طول ضلع $=\frac{۱۸}{۵}=۳٫۶ \Rightarrow$ مساحت $=(۳٫۶)^۲=۱۲٫۹۶$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۳۰. **گزینه ۲**



مختصات نقطه‌ی داده شده در معادله‌ی خط، صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی ضلع داده شده قرار ندارد.

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا قطر $\rightarrow AH=\frac{|-۲+۱-۵|}{\sqrt{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow$ قطر $=۶\sqrt{۲}(*)$ برابر نصف طول قطر مربع است

قطر $=$ (طول ضلع) $\times\sqrt{۲}\overset{*}{\rightarrow}۶\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$(طول ضلع) $\Rightarrow$ طول ضلع $=۶\Rightarrow$ محیط $=۴\times۶=۲۴$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۳۱. **گزینه ۳**

معادلات خطوط AB و CDرا می‌نویسیم.

معادله‌ی خط AB : $\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\rightarrow\frac{y}{x}=\frac{-۱}{-۱}\rightarrow y=x\rightarrow x-y=۰$

معادله‌ی خط CD : $\frac{y-y_C}{x-x_C}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}\rightarrow\frac{y-۳}{x-۱}=\frac{۳-۴}{۱-۲}=۱\rightarrow y-۳=x-۱\rightarrow x-y+۲=۰$

حال، فاصله این دو خط موازی را از یکدیگر بدست می‌آوریم.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۳۲. **گزینه ۴** ۱): فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(\alpha,\beta)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ ، برابر است با:

$$AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲): فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ ، برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

با استفاده از شماره‌ی (۱) داریم:

فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۲)$ از خط $۲x+y-۶=۰$ $= \frac{|۲(۱)+۲-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

حال با استفاده از شماره‌ی (۲)، داریم:

$$۲y = ۱-۴x \Rightarrow ۴x+۲y-۱=۰ \Rightarrow ۲x+y-\frac{۱}{۲}=۰ \ , \ ۲x+y-۶=۰$$

فاصله‌ی دو خط موازی $\rightarrow = \frac{|-\frac{۱}{۲}+۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{\frac{۱۱}{۲}}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}$

نسبت این دو مقدار، برابر $\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}} = \frac{۴}{۱۱}$ است.

۳۳. گزینه ۳ نقاط مذکور به صورت $M(\alpha,\alpha)$ هستند. (چون معادله خط نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y=x$ است)

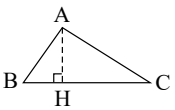
طبق فرض داریم:

$$AM = ۲ \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-۲)^۲} = ۲ \Rightarrow (\alpha-۱)^۲+(\alpha-۲)^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow \alpha^۲-۲\alpha+۱+\alpha^۲-۴\alpha+۴=۴ \Rightarrow ۲\alpha^۲-۶\alpha+۱=۰$$

مجموع طول‌ها $= \alpha_۱+\alpha_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{(-۶)}{۲} = ۳$

۳۴. گزینه ۳

کافی است معادلات ارتفاع AH و ضلع BC را بنویسیم سپس با آنها تشکیل دستگاه دهیم:



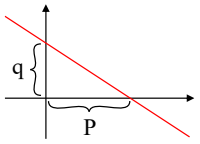
معادله‌ی ضلع BC : $C: \frac{y-yB}{x-xB} = \frac{yB-yC}{xB-xC} \rightarrow \frac{y+۱}{x-۳} = \frac{-۱-۲}{۳-۰} = -۱ \rightarrow y+۱ = -x+۳ \rightarrow y = -x+۲$

معادله‌ی ارتفاع AH : $\begin{cases} A(۲,۵) \\ m_{BC} = -۱ \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = ۱ \end{cases} \Rightarrow y-۵ = ۱(x-۲) \Rightarrow y = x+۳$

$$\begin{cases} y = -x+۲ \\ y = x+۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} y = \frac{۵}{۲} \ , \ x = -\frac{۱}{۲}$$

۳۵. گزینه ۲ شیب خط مورد نظر را m در نظر گرفته و معادله‌ی خطی را که از نقطه‌ی $\left|\frac{۱}{۲}\right.$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$y-۲=m(x-۱)\to y=mx-m+۲$



حال یک بار به x و یک‌بار به y صفر می‌دهیم. تا محل برخورد خط با محورهای مختصات را به دست آوریم.

$x=۰\to y=-m+۲\to q=۲-m$

$y=۰\to ۰=mx-m+۲\to x=\dfrac{m-۲}{m}\to p=\dfrac{m-۲}{m}$

$S=\dfrac{۱}{۲}|pq|\xrightarrow[\text{هر دو مثبت هستند } q,p]{\text{باتوجه به‌صورت سوال}}\dfrac{۹}{۲}=\dfrac{۱}{۲}(۲-m)(\dfrac{m-۲}{m})\to ۹=\dfrac{-(m-۲)^{۲}}{m}$

$\to ۹m=-m^{۲}+۴m-۴\to m^{۲}+۵m+۴=۰\to (m+۱)(m+۴)=۰$

بنابراین دو خط با این ویژگی وجود دارند که اگر معادلات آنها خواسته شد به‌صورت زیر می‌باشند:

$m=-۱\to y=-x+۱+۲\to y=-x+۳$

$m=-۴\to y=-۴x+۴+۲\to y=-۴x+۶$

۳۶.گزینه ۱ هر نقطه روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $(y=x)$ قرار دارد مختصاتش به صورت $|^{\alpha}_{\alpha}$ می‌باشد حال، کافی‌است فاصله‌ی نقطه‌ی $|^{\alpha}_{\alpha}$ را از خط به معادله‌ی $x+y=۰$ بدست آوریم تا مختصات نقاط A و B بدست آیند.

$۲\sqrt{۵}=\dfrac{|\alpha+۲\alpha+۰|}{\sqrt{۱+۴}}\to ۲\sqrt{۵}=\dfrac{|۳\alpha|}{\sqrt{۵}}\to |۳\alpha|=۱۰\to |۳\alpha|=\pm ۱۰\to \alpha=\pm\dfrac{۱۰}{۳}$

حال با داشتن مختصات سه رأس مثلث یعنی $A\left|\begin{matrix}\frac{۱۰}{۳}\\ \frac{۱۰}{۳}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-\frac{۱۰}{۳}\\ -\frac{۱۰}{۳}\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\ ۳\end{matrix}\right.$ مساحت مثلث را حساب می‌کنیم.

$S_{ABC}=\dfrac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_c(y_A-y_B)|$

$=\dfrac{۱}{۲}\left|\dfrac{۱۰}{۳}(-\dfrac{۱۰}{۳}-۳)-\dfrac{۱۰}{۳}(۳-\dfrac{۱۰}{۳})+۰(\dfrac{۱۰}{۳}+\dfrac{۱۰}{۳})\right|$

$=\dfrac{۱}{۲}\left|\dfrac{۱۰}{۳}(-\dfrac{۱۹}{۳})-\dfrac{۱۰}{۳}(-\dfrac{۱}{۳})\right|=\dfrac{۱}{۲}\left|-۱\dfrac{۹۰}{۹}+\dfrac{۱۰}{۹}\right|=\dfrac{۱}{۲}\left|-\dfrac{۱۸۰}{۹}\right|=\dfrac{۱}{۲}(\dfrac{۱۸۰}{۹})=۱۰$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ بدست می‌آید.

۳۷.گزینه ۲ شیب خط مورد نظر را m در نظر گرفته و معادله‌ی خطی را که از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$y-۲=m(x-۱)\to y=mx-m+۲$

حال، یک‌بار به x و یک بار به y صفر می‌دهیم تا محل برخورد خط با محورهای مختصات را به دست آوریم.

$x=۰\to y=-m+۲\to q=-m+۲$ (عرض از مبدأ)

$y=۰\to ۰=mx-m+۲\to x=\dfrac{m-۲}{m}\to p=\dfrac{m-۲}{m}$ (طول از مبدأ)

$S=\dfrac{۱}{۲}|pq|\to ۴=\dfrac{۱}{۲}|(\dfrac{m-۲}{m})(-m+۲)|\to ۸=|-\dfrac{(m-۲)^{۲}}{m}|\to ۸=\dfrac{(m-۲)^{۲}}{|m|}$

$=\dfrac{m^{۲}-۴m+۴}{|m|}\longrightarrow\begin{cases}m>۰\longrightarrow m^{۲}-۴m+۴=۸m\longrightarrow m^{۲}-۱۲m+۴=۰\xrightarrow{\text{حل به روش }\Delta}m=۶\pm ۴\sqrt{۲}\\ m<۰\longrightarrow m^{۲}-۴m+۴=-۸m\longrightarrow m^{۲}+۴m+۴=۰\longrightarrow (m+۲)^{۲}=۰\longrightarrow m=-۲\end{cases}$

حاصل ضرب مقادیر ممکن برای $m=\underbrace{(۶+۴\sqrt{۲})(۶-۴\sqrt{۲})}_{\text{مزدوج}}(-۲)=(۴)(-۲)=-۸$

۳۸.گزینه ۴ باتوجه به اینکه دو ضلع متوازی‌الاضلاع موازی و غیر منطبق هستند داریم:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی و غیرمنطبق}} \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

حال کافیست همین شرط را بررسی نمائیم:

$$\begin{cases} ۴x-y+۲=۰ \\ ۴x-y+m^۲-۷=۰ \end{cases} \rightarrow \frac{۴}{۴} \neq \frac{m^۲-۷}{۲} \rightarrow m^۲-۷ \neq ۲ \rightarrow m \neq \pm ۳$$

پس m هر عددی می‌تواند باشد به جز ± ۳

۳۹. گزینه ۴ ابتدا دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم تا شیب هر کدام مشخص شود.

$$ay+x=b \rightarrow ay=-x+b \rightarrow y=-\frac{۱}{a}x+\frac{b}{a}$$

$$ay+by=۱ \rightarrow by=-ax+۱ \rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{۱}{a}$$

حاصلضرب شیب خطوط عمود برابر -۱ می‌باشد پس داریم:

$$-\frac{۱}{a}\times-\frac{a}{b}=-۱ \xrightarrow{a\neq ۰} \frac{۱}{b}=-۱ \rightarrow b=-۱ \rightarrow ay+x=b \xrightarrow{b=-۱} ay+x=-۱$$

خط $ay+x=-۱$ از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ عبور می‌نماید، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$a(-۲)+۱=-۱ \rightarrow -۲a=-۲ \rightarrow a=۱ \rightarrow a+b=۱+(-۱)=۰$$

۴۰. گزینه ۳ این دو خط ممکن دو ضلع موازی یا هر ضلع عمود بر هم باشند لذا باید هر دو حالت را بررسی نماییم.

حالت اول: دو ضلع موازی باشند، در این حالت شیب دو خط برابر است. خطوط را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$my-x=-۷ \rightarrow y=\underbrace{\boxed{\frac{۱}{m}}}_{\text{شیب}}x-\frac{۷}{m}$$

$$m^۳x+y=۲ \rightarrow y=\underbrace{\boxed{-m^۳}}_{\text{شیب}}x+۲$$

شرط موازی بودن $\frac{۱}{m}=-m^۳ \rightarrow m^۴=-۱$ غیر ممکن

پس دو ضلع موازی نیستند.

حالت دوم: دو خط بر هم عمود باشد که حاصلضرب با شیب‌ها -۱ خواهد بود.

$$\frac{۱}{m}\times-m^۳=-۱ \rightarrow m^۳=m \rightarrow m^۳-m=۰$$

$$m(m-۱)(m+۱)=۰ \quad \begin{cases} m=-۱ \\ m=۰ \\ m=+۱ \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۲۴۹۲۷

۱- ۴	۲- ۴	۳- ۴	۴- ۳	۵- ۱
۶- ۲	۷- ۱	۸- ۲	۹- ۲	۱۰- ۱
۱۱- ۴	۱۲- ۴	۱۳- ۱	۱۴- ۳	۱۵- ۳
۱۶- ۲	۱۷- ۳	۱۸- ۱	۱۹- ۳	۲۰- ۴
۲۱- ۲	۲۲- ۴	۲۳- ۱	۲۴- ۲	۲۵- ۱
۲۶- ۱	۲۷- ۳	۲۸- ۴	۲۹- ۴	۳۰- ۲
۳۱- ۳	۳۲- ۴	۳۳- ۳	۳۴- ۳	۳۵- ۲
۳۶- ۱	۳۷- ۲	۳۸- ۴	۳۹- ۴	۴۰- ۳

۱. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - mx + m = ۰$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

۱) $m < ۴$ ۲) $m < ۰$ ۳) $۰ < m < ۴$ ۴) $\varnothing$

۲. به ازای کدام مقدار m معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - m - x = ۰$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۱) هیچ مقدار ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۳. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - mx + m - ۱ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $m > ۲$ ۲) R ۳) $\varnothing$ ۴) $m \neq ۲$

۴. به ازای کدام مقدار a عبارت $y = x^۲ - ax + ۲a$ به صورت مربع کامل یک دو جمله ای درمی آید؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) -۴ ۴) ۴

۵. مجموع ریشه های معادله‌ی $(x-۱)^۲ = (۱ - \sqrt{۲})^۲$ برابر است با:

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۶. حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد ۴ واحد بزرگ تر است آن عدد کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۳

۷. اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + x + k^۲ - ۱ = ۰$ صفر باشد. ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{۳}$

۸. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})x + \sqrt{۶} = ۰$ چقدر است؟

۱) $۵ + ۲\sqrt{۶}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۵} + ۲$ ۴) ۶

۹. اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ + x - ۳ = ۰$ باشند. حاصل $\alpha^۳ + \beta^۳ + \alpha^۲ + \beta^۲$ برابر است با:

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰. در معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ حاصل $x_۱^۸ + x_۲^۸$ کدام است؟

۱) ۲۵۷ ۲) ۱۵۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۶۸

۱۱. اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - (a+۳)x + ۳a = ۰$ مساوی ۴ باشد. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۲. معادله‌ی $-۶x^۲ + ۲x + k^۲ + ۳ = ۰$ دارای:

۱) دو ریشه ی مثبت است. ۲) دو ریشه ی منفی است.
۳) دو ریشه مختلف العلامت است. ۴) ریشه حقیقی نیست.

۱۳. جواب‌های کدام معادله، معکوس ریشه‌های معادله $۳x^۲ - ۵x - ۴ = ۰$ است؟

۱) $۴x^۲ - x - ۳ = ۰$ ۲) $۴x^۲ - ۵x - ۳ = ۰$

۳) $۴x^۲ + x - ۳ = ۰$ ۴) $۴x^۲ + ۵x - ۳ = ۰$

۱۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $۲ - \sqrt{۴ - a}$ و $۲ + \sqrt{۴ - a}$ باشد. کدام است؟

۱) $x^۲ - ۴x + a = ۰$ ۲) $x^۲ + ax - ۴ = ۰$

۳) $x^۲ + ۴x - a = ۰$ ۴) $x^۲ - ax + ۴ = ۰$

۱۵. معادله درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله‌ی $x^۲ + x - ۳ = ۰$ باشد. کدام است؟

۱) $x^۲ + ۹x - ۲۴۳ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۹x - ۲۷ = ۰$

۳) $x^۲ + ۱۸x - ۲۴۳ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۱۸x - ۲۷ = ۰$

۱۶. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله‌ی $۵x^۲ - ۱۳x - ۱ = ۰$ باشد. کدام است؟

۱) $-۵x^۲ + ۱۳x + ۱ = ۰$ ۲) $۵x^۲ + ۱۳x - ۱ = ۰$

۳) $x^۲ + ۱۳x - ۵ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۰$

۱۷. در معادله‌ی $x^۴ - ۳۶x^۲ + ۴۹ = ۰$، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۸. محور تقارن نمودار تابع $y = (x - ۱)(x - ۳) - x$ کدام خط است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x = \frac{۵}{۲}$ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = \frac{۷}{۲}$

۱۹. کدام تابع ماکسیمم دارد و مینیمم ندارد؟

۱) $y = x^۲ - ۴x$ ۲) $y = ۴x - ۲x^۲$ ۳) $y = x^۳ - ۲x$ ۴) $y = x - x^۳$

۲۰. کدام تابع مینیمم دارد و ماکسیمم ندارد؟

۱) $y = -۲x^۲ + ۲$ ۲) $y = ۳x^۲ + ۲x + ۱$ ۳) $y = -\sqrt{۶}x^۲ + ۲$ ۴) $y = x - x^۲$

۲۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ + ax + ۱$ روی خط $y = ۱$ دارای می‌نیمم است. a کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۲. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ + bx + ۱$ روی محور oy دارای می‌نیمم است، b کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳. نمودار $y = (x + ۲)^۲ - ۲$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۴. به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $a > ۶$ یا $a < ۲$ ۲) $a > ۴$ یا $a < ۳$ ۳) $۲ < a < ۶$ ۴) $۳ < a < ۴$

۲۵. مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷

۲۶. به ازای کدام مقادیر a عبارت $y = x^۲ - (a+۲)x + ۲a$ به صورت مربع کامل یک دوجمله‌ای در می آید؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۷. به ازای کدام مقدار m فقط یکی ار ریشه های معادله ی $۲x^۲ + (m^۲ - ۱)x + m^۲ - ۳m + ۲ = ۰$ برابر صفر است؟

۱) فقط ۲ ۲) فقط ۱ ۳) ۲ و ۱ ۴) ± ۱

۲۸. اگر معادله‌های $x^۲ + ۲x + a = ۰$ و $x^۲ - x - ۲a = ۰$ ریشه‌ی مشترک داشته باشند آن ریشه‌ی مشترک کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

۲۹. در معادله‌ی $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ حاصل $\frac{x_۲}{x_۱^۲} + \frac{x_۱}{x_۲^۲}$ کدام است؟ ($x_۱, x_۲$ ریشه‌های معادله هستند)

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۴۰ ۳) -۱۴۰ ۴) -۱۱۰

۳۰. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ حاصل $x_۱^۳ + ۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۱x_۲^۲ + x_۲^۳$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) -۲۷ ۴) ۲۷

۳۱. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ حاصل عبارت $(x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۲)(x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۴)$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۲. به ازای کدام مقدار m، رابطه‌ی $x_۱x_۲ + x_۱ + x_۲ = ۴$ بین ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^۲ + (۲m - ۱)x = ۵$ برقرار است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) هیچ مقدار m

۳۳. به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - x - m = ۰$ برابر ۴ است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۴. حدود m برای آن که معادله ی $(m-۱)x^۲ + mx + m - ۳ = ۰$ دارای دو ریشه ی مختلف‌العلامه باشد. کدام است؟

۱) $m > ۲$ ۲) $۱ < m < ۳$ ۳) $m < ۱$ ۴) $۰ < m < ۱$

۳۵. اگر به هر یک از جواب‌های معادله‌ی $x^۲ - x - ۱ = ۰$ یک واحد اضافه کنیم. به حاصل ضرب آن‌ها چقدر اضافه می شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $۱ + \sqrt{۲}$ ۴) ۱

۳۶. در معادله ی $x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$ حاصل $\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲}$ کدام است؟ ($x_۱, x_۲$ ریشه های معادله هستند)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳۷. به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵mx + ۱۶ = ۰$ رابطه ی $x_۱^۳ = x_۲ > ۰$ برقرار است؟

۱) $m = ۲$ و $m = -۲$ ۲) $m = -۲$ ۳) $m = ۲$ ۴) $m = ۸$

۳۸. اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - (a+۱)x - ۶ + ۲a = ۰$ برابر ۱ باشد. ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) -۳ ۴) -۲

۳۹. اگر x' و x'' ریشه های معادله ی $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ باشند، حاصل $x'^۴ x'' + x''^۴ x'$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۸۰

۴۰. اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ باشند. حاصل $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۴۱. ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$
۳) $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ۴) $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$

۴۲. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - (۲m+۱)x + m^۲ + ۳ = ۰$، دو عدد طبیعی متوالی است، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که هریک از ریشه هایش نصف ریشه های معادله ی $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ باشد کدام است؟

۱) $x^۲ - ۳x + ۴ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$
۳) $x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$

۴۴. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - \left(\frac{۱}{a^۴} + a^۲\right)x + \frac{۱}{a^۲} = ۰$ حاصل $\frac{x_۱}{x_۲} + \frac{x_۲}{x_۱}$ کدام است؟

۱) $a^۸ + \frac{۱}{a^۸}$ ۲) $a^۴ + \frac{۱}{a^۲}$
۳) $a^۴ + \frac{۱}{a^۴}$ ۴) $a^۶ + \frac{۱}{a^۶}$

۴۵. در معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$ اگر α, β ریشه‌های معادله باشند، حاصل $(\alpha^۲ - ۴)^۲ + ۴\beta^۲$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۴۶. در معادله‌ی درجه دوم $x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$ حاصل $x_۱^۳ - ۲x_۲^۲ + ۴x_۲$ کدام است ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم هستند)

۱) -۱۶ ۲) ۰ ۳) ۱۶ ۴) -۳۲

۴۷. در معادله‌ی درجه دوم $x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ حاصل $x_۱^۴ + ۴x_۲^۲ - ۴x_۲$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۴۸. کدام یک از معادلات زیر فقط دارای دو ریشه‌ی قرینه می باشند؟

۱) $x^۴ - ۴x^۲ + ۱ = ۰$ ۲) $x^۴ + ۳x^۲ + ۱ = ۰$
۳) $x^۴ - x^۲ - ۱ = ۰$ ۴) $x^۴ - ۲x^۲ + ۵ = ۰$

۴۹. منحنی نمودار تابع $y = ۲x^۲ + bx + ۶$ بر قسمت مثبت محور xها، مماس است. مقدار b کدام است؟

۱) $-۴\sqrt{۳}$ ۲) $\pm ۲\sqrt{۳}$ ۳) $\pm ۴\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۵۰. اگر عبارت $y = ax(x + ۱) + ۱$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۱.گزینه ۳ باید $\Delta < ۰$ باشد:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۴(۱)(m) = m^۲ - ۴m < ۰$$

حال عبارت $m^۲ - ۴m$ را تعیین علامت کرده و نواحی مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m^۲ - ۴m < ۰$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow ۰ < m < ۴$$

۲.گزینه ۲ زمانی یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد که در آن $\Delta = ۰$ باشد.

$$x^۲ - x - m = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac} \Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-m) = ۱ + ۴m = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۴}$$

۳.گزینه ۴ باید $\Delta > ۰$ باشد:$(b^۲ - ۴ac > ۰)$

$$\Delta = (-m)^۲ - ۴(m - ۱) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m - ۲)^۲ > ۰$$

این نامساوی همواره برقرار است به غیر از حالتی که $m = ۲$ باشد.

۴.گزینه ۲ شرط آن که یک عبارت درجه‌ی دوم، مربع کامل باشد آن است که $\Delta = ۰$ باشد.

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۸a = ۰ \begin{cases} a = ۰ \text{ غ ق ق} \\ a = ۸ \end{cases} \rightarrow$$ عبارت به صورت $y = x^۲$ می شود.

۵.گزینه ۲

روش اول:

$$x^۲ - ۲x + ۱ = (۱ - \sqrt{۲})^۲ \rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ - (۱ - \sqrt{۲})^۲ = ۰ \rightarrow S = \frac{-b}{a} = ۲$$

روش دوم:

$$(x - ۱)^۲ = (۱ - \sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x - ۱ = \pm(۱ - \sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۱ - \sqrt{۲} \Rightarrow x_۱ = ۲ - \sqrt{۲} \\ x - ۱ = -۱ + \sqrt{۲} \Rightarrow x_۲ = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲$$

۶.گزینه ۳

عدد مورد نظر را x در نظر می گیریم.

$$x \times x = ۳x + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۱) = ۰ \begin{cases} x = ۴ & \surd \\ x = -۱ & \times \end{cases}$$

۷.گزینه ۲ اگر یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم صفر باشد ریشه‌ی دیگر $-\frac{b}{a}$ است. پس $x = -\frac{b}{a} = -۱$ است.

۸.گزینه ۲

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = \sqrt{۳} + \sqrt{۲} \quad , \quad P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = \sqrt{۶}$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ = (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^۲ - ۲\sqrt{۶} = ۳ + ۲ + ۲\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۶} = ۵$$

۹.گزینه ۱

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۱\ \ ,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۳$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=-۱+۹(-۱)=-۱۰$$
$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=(-۱)^{۲}-۲(-۳)=۷$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\alpha^{۲}+\beta^{۲}=-۱۰+۷=-۳$$

۱۰.گزینه ۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ یعنی ۲ است.

$$\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=۲\end{cases}\Rightarrow ۱^{۸}+۲^{۸}=۱+۲۵۶=۲۵۷$$

۱۱.گزینه ۱

$$S=\text{مجموع ریشه ها}=\frac{-b}{a}=\frac{a+۳}{۱}=۴\Rightarrow a=۱$$
$$P=\text{ضرب ریشه ها}=\frac{c}{a}=\frac{۳a}{۱}\xrightarrow{a=۱}P=۳$$

۱۲.گزینه ۳ چون $\frac{c}{a}$ منفی است $(\frac{k^{۲}+۳}{-۶}<۰)$ Δ صد در صد مثبت است و معادله ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف العلامت است.

۱۳.گزینه ۴

کافی است جای a و c را عوض کنیم. $۳x^{۲}-۵x-۴=۰\rightarrow -۴x^{۲}-۵x+۳=۰\rightarrow ۴x^{۲}+۵x-۳=۰$

ریشه های دو معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ و $cx^{۲}+bx+a=۰$ معکوس یکدیگرند.

۱۴.گزینه ۱

$$S=x_۱+x_۲=۲+\sqrt{۴-a}+۲-\sqrt{۴-a}=۴$$
$$P=x_۱\times x_۲=(۲+\sqrt{۴-a})(۲-\sqrt{۴-a})=۴-(۴-a)=a$$
$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۴x+a=۰$$

۱۵.گزینه ۱ روش اول: اگر y ریشه ی معادله ی جدید و x ریشه های معادله ی قدیم باشد. آنگاه $y=۹x$ پس: $x=\frac{y}{۹}$

لذا:

$$x^{۲}+x-۳=۰\Rightarrow(\frac{y}{۹})^{۲}+\frac{y}{۹}-۳=۰\Rightarrow y^{۲}+۹y-۲۴۳=۰$$

روش دوم: کافی است b را در ۹ و c را در $۹^{۲}$ ضرب کنید.

$$x^{۲}+x-۳=۰\Rightarrow x^{۲}+۹x-۲۴۳=۰$$

(ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bkx+ck^{۲}=۰$ ، k برابر ریشه‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ می‌باشند.)

۱۶.گزینه ۳

روش اول: اگر ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y و ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x در نظر بگیریم داریم:

$$y=\frac{۱}{x}\Rightarrow x=\frac{۱}{y}$$
$$\xrightarrow{\text{معادله}}۵(\frac{۱}{y})^{۲}-۱۳(\frac{۱}{y})-۱=۰\Rightarrow\frac{۵}{y^{۲}}-\frac{۱۳}{y}-۱=۰$$
$$\xrightarrow{\times y^{۲}}۵-۱۳y-y^{۲}=۰\Rightarrow y^{۲}+۱۳y-۵=۰$$

روش دوم: کافی است فقط جای a و c را عوض کنید. (ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ و $cx^۲+bx+a=۰$ عکس یکدیگر می باشند)

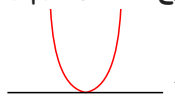
$$-x^۲-۱۳x+۵=۰ \Rightarrow x^۲+۱۳x-۵=۰$$

۱۷.**گزینه ۱** در معادله‌ی دومجذوری اگر ریشه وجود داشته باشد مجموع ریشه ها همواره صفر است.

۱۸.**گزینه ۲** این تابع به شکل $y = x^۲ - ۴x + ۳ - x = x^۲ - ۵x + ۳$ در می‌آید و معادله‌ی محور تقارن آن $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۵}{۲}$ است.

۱۹.**گزینه ۲** در تابع درجه‌ی دوم وقتی ضریب $x^۲$ ، منفی است تابع فقط Max دارد.

۲۰.**گزینه ۲** در تابع درجه‌ی دوم وقتی ضریب $x^۲$ ، مثبت است تابع فقط Min دارد.

۲۱.**گزینه ۱** 

← یعنی عرض نقطه‌ی S برابر ۱ می باشد.

$$\frac{-\Delta}{۴a} = ۱$$

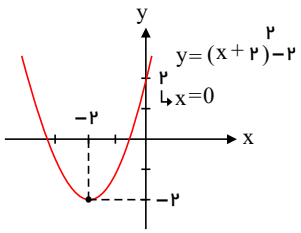
$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۱ \Rightarrow \frac{۴ - a^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow ۴ - a^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۰$$

۲۲.**گزینه ۱**

هر نقطه‌ای روی محور عرض قرار دارد طولش صفر است یعنی طول نقطه‌ی S برابر صفر می باشد.

$$x = \frac{-b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

۲۳.**گزینه ۴** کافی است نمودار $y = x^۲$ را دو واحد به سمت چپ و دو واحد به پایین انتقال دهیم.



۲۴.گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۶) > ۰$$

a	$-\infty$		۲		۶		$+\infty$
عبارت<۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\rightarrow \Rightarrow \begin{cases} a > ۶ \\ a < ۲ \end{cases}$$

۲۵.گزینه ۲

دو عدد متوالی را x و $x+۱$ در نظر می گیریم.

$$x^۲ + (x+۱)^۲ = ۹۲۵ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ = ۹۲۵ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۹۲۴ = ۰$$

$$x^۲ + x - ۴۶۲ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۸۴۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲۱ \\ x_۲ = -۲۲ \end{cases} \Rightarrow ۲۱ + (۲۱+۱) = ۴۳$$

۲۶.گزینه ۲ شرط آن‌که یک عبارت درجه دوم مربع کامل باشد آن است که $\Delta = ۰$ باشد.

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow (a+۲)^۲ - ۴(۱)(۲a) = ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a + ۴ - ۸a = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

۲۷.گزینه ۱ اگر فقط یکی از ریشه ها برابر صفر باشد باید $c = ۰$ باشد.

$$c = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۳m + ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۲) = ۰ \Rightarrow m = ۱ \ , \ m = ۲$$

هر دو ریشه صفر است:

$$\begin{cases} m = ۱ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ m = ۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲ + ۳x = ۰ \Rightarrow x(۲x+۳) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{-۳}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

پس به ازای $m = ۲$ فقط یکی از ریشه ها برابر صفر است.

۲۸.گزینه ۴ برای پیدا کردن ریشه‌ی مشترک، کافی است عبارت‌های درجه‌ی دوم را در هر دو معادله، حذف کرده و معادله‌ی درجه‌ی اول حاصل را حل کنید.

$$-\begin{cases} x^۲ + ۲x + a = ۰ \\ x^۲ - x - ۲a = ۰ \end{cases} \rightarrow ۳x + ۳a = ۰ \rightarrow x = -a \ : \quad \text{ریشه‌ی مشترک}$$

ریشه‌ی مشترک در هر دو معادله صدق می کند کافی است آن را در یکی از دو معادله، صدق دهید.

$$x = -a \xrightarrow[\text{صدق}]{x^۲+۲x+a=۰} a^۲ - ۲a + a = ۰ \rightarrow a^۲ - a = ۰$$

$$\rightarrow a(a-۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} a = ۰ \ (a > ۰) \ \text{غ ق ق} \\ a = ۱ \rightarrow \text{ریشه‌ی مشترک} = -a = -۱ \end{cases}$$

۲۹.گزینه ۲

$$P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = -۱ \ , \ S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = ۵$$

$$\frac{x_۱}{x_۲^۲} + \frac{x_۲}{x_۱^۲} = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲ \cdot x_۲^۲} = \frac{(x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱x_۲)^۲} = \frac{۱۲۵ + ۱۵}{۱} = ۱۴۰$$

۳۰.گزینه ۳

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = -۳ \\ x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases} \rightarrow x_۱^۳ + ۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۱x_۲^۲ + x_۲^۳ = (x_۱ + x_۲)^۳ = (-۳)^۳ = -۲۷$$

توجه کنید $a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = (a+b)^۳$ **می باشد.**

۳۱.گزینه ۲

$x_۱, x_۲$ **ریشه های معادله هستند پس در خود معادله صدق می کنند لذا:**

$$x_۱ \xrightarrow{\text{صدق}} x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱^۲ - ۴x_۱ = -۱$$

$$x_۲ \xrightarrow{\text{صدق}} x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۲^۲ - ۴x_۲ = -۱$$

پس: $(x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۴)(x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۲) = (-۱ + ۴)(-۱ + ۲) = ۳$

۳۲.گزینه ۴ **معادله‌ی درجه‌ی دوم را مرتب می کنیم:** $mx^۲ + (۲m - ۱)x - ۵ = ۰$

$$x_۱x_۲ + x_۱ + x_۲ = ۴ \rightarrow -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = ۴ \rightarrow \frac{۱ - ۲m}{m} - \frac{۵}{m} = ۴$$

$$\xrightarrow{\times m} ۱ - ۲m - ۵ = ۴m \rightarrow ۶m = -۴ \rightarrow m = -\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} -\frac{۲}{۳}x^۲ - \frac{۷}{۳}x - ۵ = ۰ \rightarrow \Delta < ۰ \quad : \text{غ ق ق}$$

۳۳.گزینه ۳

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۱ \quad , \quad x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = -m$$

$$\text{مجموع معکوس ریشه ها} = \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{x_۲ + x_۱}{x_۱ \cdot x_۲} = \frac{۱}{-m} \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=} ۴ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۴}$$

۳۴.گزینه ۲ **شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که** $\frac{c}{a}$ **منفی باشد.**

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۳}{m-۱} < ۰ \Rightarrow$$

m	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$m-۳$		$-$		$-$	۰	$+$	
$m-۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
عبارت < ۰		$+$	ن	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow ۱ < m < ۳$$

۳۵.گزینه ۲

$$x_۲ - x - ۱ = ۰ \rightarrow x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۱ \quad , \quad x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = -۱$$

حاصل‌ضرب ریشه ها وقتی یک واحد اضافه شده است= $(x_۱ + ۱)(x_۲ + ۱) = x_۱x_۲ + x_۱ + x_۲ + ۱ = -۱ + ۱ + ۱ = ۱$

به حاصل‌ضرب ریشه‌ها، ۲ واحد اضافه شده است.

۳۶.گزینه ۱ **اگر** x' **و** x'' **ریشه‌های معادله‌ی** $ax^۲ + bx + c = ۰$ **باشند** $(x', x'' > ۰)$ **حاصل** $\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲}$ **از رابطه‌ی** $\sqrt{S + ۲\sqrt{P}}$ **به دست می آید.**

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۸ \quad , \quad P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = ۴$$
$$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}} = \sqrt{۸ + ۲\sqrt{۴}} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

۳۷.گزینه ۳

$$x_۱^۳ = x_۲ \xrightarrow{\text{طرفین را در } x_۱ \text{ ضرب می کنیم}} x_۱^۴ = x_۱ x_۲ \Rightarrow x_۱^۴ = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۱^۴ = ۱۶ \Rightarrow x_۱ = ۲ \ , \ x_۱ = -۲$$

که چون ریشه ها مثبت هستند $x_۱ = ۲$ قابل قبول است، ریشه‌ی معادله در معادله صدق می کند.

$$x_۱ = ۲ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۴ - ۱۰m + ۱۶ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

۳۸.گزینه ۱ چون یکی از ریشه‌ها ۱ است. پس مجموع ضرایب برابر صفر و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است. پس $x = ۱$ را در معادله، صدق می‌دهیم.

$$\text{ریشه‌ی دیگر} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۲ = \frac{-۶ + ۲a}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$
$$۲ - (a + ۱) - ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow -۵ + a = ۰ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow$$

۳۹.گزینه ۴

$$+ x'' = -\frac{b}{a} = ۴ \quad , \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = ۲$$
$$^{۵} x'' + x''^{۴} x' = x' x''(x'^{۳} + x''^{۳}) = x' x'' \Big((x' + x'')^{۳} - ۳x' x''(x' + x'')\Big) = ۲(۶۴ - ۲۴) = ۸۰$$

۴۰.گزینه ۳

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳ \quad , \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

چون هر دو ریشه، مثبت هستند می توانیم تفکیک کنیم.

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow{\alpha \ , \ \beta > ۰} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \frac{۳}{\sqrt{۱}} = ۳$$

۴۱.گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌ای باشد باید b را در k و c را در $k^۲$ ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x + k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰ \xrightarrow[c \text{ در } ۲^۲]{b \text{ در } ۲} ۲x^۲ - ۱۰x + ۴ = ۰ \xrightarrow{x \to x+۱} ۲(x+۱)^۲ - ۱۰(x+۱) + ۴ = ۰$$
$$\to ۲x^۲ + ۴x + ۲ - ۱۰x - ۱۰ + ۴ = ۰ \ \to \ ۲x^۲ - ۶x - ۴ = ۰ \ \to \ x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$$

۴۲.گزینه ۳ قدر مطلق تفاضل دو عدد طبیعی برابر یک می باشد.

$$|x' - x''| = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{|۱|} = ۱ \Rightarrow \sqrt{(۲m+۱)^۲ - ۴(m^۲ + ۳)} = ۱$$
$$\Rightarrow \sqrt{۴m^۲ + ۱ + ۴m - ۴m^۲ - ۱۲} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴m - ۱۱} = ۱$$
$$\Rightarrow ۴m - ۱۱ = ۱ \Rightarrow ۴m = ۱۲ \Rightarrow m = ۳$$

۴۳.گزینه ۴ اگر y ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم قدیم باشد داریم :

$$y = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۲y \xrightarrow{\text{معادله}} (۲y)^۲ - ۶(۲y) + ۴ = ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۱۲y + ۴ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۳y + ۱ = ۰$$

۴۴. گزینه ۴ چون مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ یعنی $a^۲+\frac{۱}{a^۴}$ و حاصلضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a}$ یعنی $a^۲\times\frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{a^۲}$ می باشد پس ریشه‌ها $a^۲$ و $\frac{۱}{a^۴}$ می‌باشند در نتیجه داریم:

$$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{a^۲}{\left(\frac{۱}{a^۴}\right)}+\frac{\left(\frac{۱}{a^۴}\right)}{a^۲}=a^۶+\frac{۱}{a^۶}$$

۴۵. گزینه ۱

می‌دانیم که $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۴$ است.
α ریشه‌ی معادله است پس در معادله، صدق می کند.

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق}}\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰\Rightarrow\alpha^۲-۴=۲\alpha$$
$$(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲=(۲\alpha)^۲+۴\beta^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=۴(۴+۸)=۴۸$$

۴۶. گزینه ۴

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۲\ ,\ x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-۴$$

$x_۱$ ریشه‌ی معادله است در معادله صدق می کند $\Rightarrow x_۱^۲+۲x_۱-۴=۰\Rightarrow x_۱^۲=-۲x_۱+۴$

$$\Rightarrow x_۱^۳=-۲x_۱^۲+۴x_۱$$

در عبارت خواسته شده به جای $x_۱^۳$ عبارت معادل را قرار می‌دهیم:

$$x_۱^۳-۲x_۲^۲+۴x_۲=-۲x_۱^۲+۴x_۱-۲x_۲^۲+۴x_۱=-۲(x_۱^۲+x_۲^۲)+۴(x_۱+x_۲)$$
$$=-۲((x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲)+۴(x_۱+x_۲)=-۲(۴+۸)+۴(-۲)=-۳۲$$

۴۷. گزینه ۲ دقت کنید که $x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۲$ و $x_۱x_۲=\frac{c}{a}=-۱$ می‌باشد.

$$x_۱\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}x_۱^۲+۲x_۱-۱=۰\to x_۱^۲=-۲x_۱+۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}x_۱^۴=۴x_۱^۲+۱-۴x_۱$$

پس: $x_۱^۴+۴x_۲^۲-۴x_۲=۴x_۱^۲+۱-۴x_۱+۴x_۲^۲-۴x_۲=۴(x_۱^۲+x_۲^۲)-۴(x_۱+x_۲)+۱$

$$=۴((x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲)-۴(x_۱+x_۲)+۱=۴(۴+۲)-۴(-۲)+۱=۳۳$$

۴۸. گزینه ۳

$$ax^۴+bx^۲+c=۰\xrightarrow{x^۲=t}at^۲+bt+c=۰$$

اگر Δ معادله‌ی فوق مثبت باشد. معادله دو ریشه دارد. اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد. دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد. لذا با توجه به این که $x^۲=t$، فقط جواب مثبت آن قابل قبول است که دو ریشه‌ی قرینه برای x حاصل می شود. پس اگر در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a}<۰$ باشد فقط دو ریشه‌ی قرینه دارد. که این شرط فقط در گزینه ی (۳) وجود دارد.

۴۹. گزینه ۱ معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و مقدار این ریشه (طول نقطه‌ی تماس) برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

معادله‌ی $y=۰$ باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد:

$$۲x^۲+bx+۶=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^۲-۴(۲)(۶)=۰\Rightarrow b^۲=۴۸\Rightarrow b=\pm۴\sqrt{۳}$$

باید $\frac{-b}{۲a}>۰$ باشد یعنی $\frac{-b}{۴}>۰$ پس $b=-۴\sqrt{۳}$.

۵۰. گزینه ۲ **برای آن که عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط مقابل همواره برقرار باشد:**

۱) $\Delta < ۰$ **۲)** $a > ۰$

ابتدا عبارت داده شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y = ax(x+۱) + ۱ \Rightarrow y = ax^۲ + ax + ۱$$

حال برای آن که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a < ۰ \Rightarrow a(a-۴) < ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۴ \\ a > ۰ \Rightarrow a > ۰ \end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $۰ < a < ۴$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجه‌ی دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a = ۰$ باشد نیز عبارت $y = ax^۲ + ax + ۱$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a = ۰$ نیز درست است:

$$y = ax^۲ + ax + ۱ \xrightarrow{a=۰} y = ۰ + ۰ + ۱ = ۱$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با: $(۰ < a < ۴) \cup \{۰\} = ۰ \leq a < ۴$

که در بازه‌ی فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۲۴۹۴۰

۱- ۳	۲- ۲	۳- ۴	۴- ۲	۵- ۲
۶- ۳	۷- ۲	۸- ۲	۹- ۱	۱۰- ۱
۱۱- ۱	۱۲- ۳	۱۳- ۴	۱۴- ۱	۱۵- ۱
۱۶- ۳	۱۷- ۱	۱۸- ۲	۱۹- ۲	۲۰- ۲
۲۱- ۱	۲۲- ۱	۲۳- ۴	۲۴- ۱	۲۵- ۲
۲۶- ۲	۲۷- ۱	۲۸- ۴	۲۹- ۲	۳۰- ۳
۳۱- ۲	۳۲- ۴	۳۳- ۳	۳۴- ۲	۳۵- ۲
۳۶- ۱	۳۷- ۳	۳۸- ۱	۳۹- ۴	۴۰- ۳
۴۱- ۲	۴۲- ۳	۴۳- ۴	۴۴- ۴	۴۵- ۱
۴۶- ۴	۴۷- ۲	۴۸- ۳	۴۹- ۱	۵۰- ۲

۱. در معادله‌ی $\sqrt{۳}=\sqrt{۳+\sqrt{x-x^{۳}}}$ مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۲

۲. به ازای کدام k مجموعه جواب معادله‌ی زیر برابر $A=\{-۲\}$ می‌باشد؟

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۳۸}{k}=\frac{۳x}{x+۱}$$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳. اگر ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x+۱}{x-۲}+\frac{x-۱}{x+۲}=\frac{x^{۲}+۵x}{x^{۲}-۴}$ مقادیر α و β باشد، مقدار $\beta\sqrt{\alpha}+\alpha\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

۴. به ازای کدام مقدار a ، $x=۰$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x+a}{۳x+۶}+\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{a+۲}{۴-x^{۲}}$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۵. معادله‌ی $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+۳}=۳x-۱$ دارای ..... می‌باشد.

۱) یک ریشه‌ی مثبت ۲) دو ریشه‌ی مثبت
۳) یک ریشه‌ی منفی ۴) دو ریشه‌ی منفی

۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x\sqrt{۴-x^{۲}}+۳\sqrt{۴-x^{۲}}=۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۷. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{۳-۳P}=۳+\sqrt{۳P+۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۸. به ازای چه مقدار از k، معادله‌ی $\frac{۳x}{x-۲}=\frac{۶}{k}+\frac{۱}{x+۲}$ دارای جواب $x=۱$ است؟

۱) ۱٫۸ ۲) $-۱٫۸$ ۳) ۱٫۲ ۴) $-۱٫۲$

۹. مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{x-۱}{x-۳}=\frac{x+۱}{x+۴}+\frac{۲x}{x-۳}$ کدام است؟

۱) $\left\{-۱,\frac{۱}{۲}\right\}$ ۲) $\left\{۱,-\frac{۱}{۲}\right\}$ ۳) $\left\{-۱,-\frac{۱}{۲}\right\}$ ۴) $\left\{۱,\frac{۱}{۲}\right\}$

۱۰. اگر k جواب معادله‌ی $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$ باشد، جواب معادله‌ی $\sqrt{x+k}=k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۵ ۴) ۹

۱۱. بزرگترین ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}=\frac{۵}{۲x-۱}+۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) -۲

۱۲. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x+۱}{x-۲}+\frac{x-۱}{x+۲}=\frac{x^۲+۵x}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۳. اگر $x=a$ یک جواب معادله‌ی $\frac{a-۱}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-a}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر a چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۴. معادله‌ی $x=\frac{۴}{x-۲}+\frac{۴}{x+۲}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵. به ازای کدام مقدار k، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{k}{x}+\frac{x}{x-۳}=۲$ برابر ۷ است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۶. به ازای چند مقدار صحیح x، مجموع دو کسر $\frac{x-۱}{x-۲}$ ، $\frac{۱+x}{x}$ برابر کسر $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۷. جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{۲x+۵}-۲x=۵$ چگونه است؟

۱) یک ریشه‌ی منفی
۲) دو ریشه‌ی منفی
۳) دو ریشه‌ی مثبت
۴) یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

۱۸. معادله‌ی $\sqrt{۲+\sqrt{x-۵}}=\sqrt{۱۳-x}$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر α,β ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲-۶x+۹}-۲=\frac{x+۱}{x-۳}$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۷}$ ۳) $-\frac{۹}{۸}$ ۴) $-\frac{۸}{۷}$

۲۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $\frac{-۲}{(۳k-۱)^۲} = \frac{۵}{۳k-۱} + ۲$ باشد $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $+\frac{۵}{۶}$ ۴) $+\frac{۱}{۶}$

۲۱. اگر α ریشه معادله $\frac{۶}{x^۲-۲x+۴} = \frac{۲}{x^۲-۲x+۳} + \frac{۱}{x^۲-۲x+۲}$ باشد حاصل $۷\alpha^۲ - ۵\alpha + ۱$ کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۲. در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر با هم کار می‌کنند و کار را در ۱۸ روز تمام می‌نمایند. اگر هر کدام به تنهائی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کرد. کارگر اول چند روزه کار را تمام می‌کرد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

۲۳. اگر محلول آب نمک ۷٪ مطلوب باشد و ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴٪ داشته باشیم، چقدر آب باید تبخیر شود به محلول مطلوب برسیم؟

۱) $\frac{۶۰۰}{۷}$ ۲) ۱۰۰ ۳) $\frac{۵۰۰}{۷}$ ۴) ۱۱۰

۲۴. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{۲}{x+۱} = \frac{۱}{x^۳+x^۲}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $+\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۲۵. در معادله‌ی $\frac{ax^۲-۲}{x^۲-x} = \frac{۲x-۱}{x-۱} + \frac{x+۲}{x}$ اگر ..... آن‌گاه معادله ..... جواب دارد.

۱) $a \neq ۳$، دو ۲) $a \neq ۳$، یک ۳) $a = ۳$، صفر ۴) $a = ۳$، بی‌شمار

۲۶. معادله‌ی $\frac{۳x^۲}{x^۲+x-۲} = \frac{x+۱}{x-۱} + \frac{۲x}{x+۲}$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۷. در مورد معادله‌ی $\frac{۲x-۳}{۲x+۲} = \frac{۵}{x^۲-۱} - \frac{۲x+۳}{۲x-۲}$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) فقط یک جواب مثبت دارد. ۲) فقط یک جواب منفی دارد.
۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. ۴) جواب حقیقی ندارد.

۲۸. معادله‌ی $\sqrt{x^۴-x^۳+۹x-۶} + \sqrt{x^۳-۴x} = ۰$:

۱) یک جواب منفی دارد. ۲) یک جواب مثبت دارد. ۳) دو جواب دارد. ۴) سه جواب دارد.

۲۹. اگر قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادله‌ی $\frac{x-۱}{x+۱}-\frac{x+۱}{x-۱}=ax(۱-\frac{x-۱}{x+۱})$ برابر ۲ باشد، آنگاه a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰. اگر $x\sqrt{۲}=\left(\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}\right)^{\frac{۳}{۲}}-\left(\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}\right)$ باشد، x کدام است؟

۱) $(۲)^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$ ۲) $(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۱. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۲(۳x-\frac{۱}{x})^{۲}-۵(۳x-\frac{۱}{x})+۲=۰$ کدام گزینه است؟

۱) $+\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۳۲. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x^{۲}-۲x-۳}+۳=\frac{\sqrt{x^{۲}-۲x-۳}+۷}{۲\sqrt{x^{۲}-۲x-۳}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۶ ۴) -۶

۳۳. اگر α و β ریشه‌های معادله $۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲x^{۲}+\frac{۲}{x^{۲}}$ باشد، حاصلضرب آنها کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) -۱

۳۴. آقای عماد چند اسباب‌بازی یکسان برای هدیه‌ی خرید که در مجموع ۱۲٫۰۰۰ تومان شد. اگر برای هر اسباب‌بازی ۱۰۰ تومان تخفیف بگیرد، با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌تواند بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی چقدر است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۰۰

۳۵. مجموعه جواب معادلهٔ $\sqrt{۱۶۹-x^{۲}}=x-۱۷$ کدام است؟

۱) $[-۱۳,۱۳]$ ۲) R ۳) $[-۱۳,۱۷]$ ۴) $\varnothing$

۱. گزینه ۳

$$\sqrt{۳+\sqrt{x-x^{۳}}}=\sqrt{۳}\Rightarrow \text{۲ توان}\Rightarrow ۳+\sqrt{x-x^{۳}}=۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-x^{۳}}=۰\Rightarrow x-x^{۳}=۰\Rightarrow x(۱-x)^{۲}=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در معادله صدق می‌کنند و مجموع ریشه‌ها صفر است.

۲. گزینه ۴ برای محاسبه کافیست $x=-۲$ را در معادله جایگذاری نمائیم:

$$\frac{۱}{-۲-۱}+\frac{۳۸}{k}=\frac{-۶}{-۱}\rightarrow -\frac{۱}{۳}+\frac{۳۸}{k}=۶$$

$$\xrightarrow{\times ۳k} -k+۱۱۴=۱۸k\rightarrow ۱۹k=۱۱۴\rightarrow k=۶$$

۳. گزینه ۱ اگر بین عبارت طرف اول مخرج مشترک بگیریم داریم:

$$\frac{(x+۱)(x+۲)+(x-۱)(x-۲)}{x^{۲}-۴}=\frac{x^{۲}+۵x}{x^{۲}-۴}\rightarrow \frac{۲x^{۲}+۴}{x^{۲}-۴}=\frac{x^{۲}+۵x}{x^{۲}-۴}$$

باتوجه به برابر بودن مخرج‌ها، صورتها نیز باید با هم برابر باشند، پس:

$$۲x^{۲}+۴=x^{۲}+۵x\rightarrow x^{۲}-۵x+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a}=۴ \end{cases}$$

هر دو ریشه هم قابل قبول می‌باشند، لذا داریم:

$$\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}\ \underline{\alpha=۴\ ,\ \beta=۱}\ \ ۴\sqrt{۱}+۱\sqrt{۴}=۸$$

۴. گزینه ۱ $x=۰$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق}}\frac{a}{۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{a+۲}{۴}\xrightarrow{\times ۱۲}۲a+۶=۳a+۶\rightarrow a=۰$$

۵. گزینه ۱ می‌توان عبارت را به فرم دیگری بازنویسی کرد:

$$\sqrt{x^{۲}+۳x}=۳x-۱\xrightarrow{(\ )^{۲}}x^{۲}+۳x=۹x^{۲}-۶x+۱$$

مجموع ضرایب معادله صفر می‌باشد پس:

$$۸x^{۲}-۹x+۱=۰\rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

با جایگذاری ریشه در معادله فقط $x=۱$ در معادله صدق می‌کند.

۶. گزینه ۴ با فاکتورگیری معادله به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود

$$\sqrt{۴-x^{۲}}(x+۳)=۰\rightarrow\begin{cases} x+۳=۰\rightarrow x=-۳ \\ \sqrt{۴-x^{۲}}=۰\rightarrow ۴-x^{۲}=۰\rightarrow x=\pm ۲ \end{cases}$$

با جایگذاری این ریشه‌ها در معادله مشخص می‌شود که $x=-۳$ در معادله صدق نمی‌نماید و فقط $x=\pm ۲$ قابل قبول هستند و مجموع آنها برابر صفر است.

۷.گزینه ۱ کافیست دو طرف را به توان دو برسانیم.

$$۳-۳P=۹+۳P+۲+۶\sqrt{۳P+۲}$$

$$\rightarrow -۶P-۸=۶\sqrt{۳P+۲} \xrightarrow{\div ۲} -۳P-۴=۳\sqrt{۳P+۲}$$

$$\xrightarrow{(\ )^۲} ۹P^۲+۲۴P+۱۶=۲۷P+۱۸ \rightarrow ۹P^۲-۳P-۲=۰$$

$$\Delta=۸۱ \rightarrow \begin{cases} P=\frac{۲}{۳} \\ P=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله مشخص می‌شود که هیچکدام از ریشه‌ها قابل قبول نیستند.

۸.گزینه ۲ ریشه‌های یک معادله در معادله صدق می‌کند، لذا کافیست $x=۱$ را در معادله قرار دهیم

$$\frac{۱}{x+۲}+\frac{۶}{k}=\frac{۳x}{x-۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱}{۳}+\frac{۶}{k}=۳ \xrightarrow{\times ۳k} k+۱۸=-۹k$$

$$\rightarrow -۱۰k=۱۸ \rightarrow k=-۱٫۸$$

۹.گزینه ۳ می‌توان معادله را از حالت کسری خارج کرد، لذا معادله را در ک.م.م مخارج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳} \xrightarrow[x\neq ۳,-۴]{\times (x-۳)(x+۴)} ۲x(x+۴)+(x+۱)(x-۳)=(x-۱)(x+۴)$$

$$\rightarrow ۲x^۲+۸x+x^۲-۲x-۳=x^۲+۳x-۴ \rightarrow ۲x^۲+۳x+۱=۰$$

$$\rightarrow (۲x+۱)(x+۱)=۰ \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱۰.گزینه ۱

برای حل ابتدا یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم منتقل می‌نماییم.

$$\sqrt{x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۵} \xrightarrow{(\ )^۲} x+۱=۱+۲x-۵+۲\sqrt{۲x-۵}$$

$$\rightarrow -x+۵=۲\sqrt{۲x-۵} \xrightarrow{(\ )^۲} x^۲-۱۰x+۲۵=۴(۲x-۵)$$

$$\rightarrow x^۲-۱۰x+۲۵=۸x-۲۰ \rightarrow x^۲-۱۸x+۴۵=۰$$

$$(x-۳)(x-۱۵)=۰ \begin{cases} x=۳ \rightarrow k=۳ \\ x=۱۵ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

حال باید معادله‌ی نهائی را بسازیم.

$$\sqrt{x+k}=k \xrightarrow{k=۳} \sqrt{x+۳}=۳ \xrightarrow{(\ )^۲} x+۳=۹ \rightarrow x=۶$$

۱۱.گزینه ۳

$$\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}=\frac{۵}{۲x-۱}+۵\rightarrow\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۵+۱۰x-۵}{۲x-۱}\rightarrow\frac{x-۲}{x+۱}=\frac{۱۰x}{۲x-۱}$$
$$\rightarrow ۲x^۲-x-۴x+۲=۱۰x^۲+۱۰x\rightarrow ۸x^۲+۱۵x-۲=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۲۲۵+۶۴=۲۸۹\Rightarrow x_۱=\frac{-۱۵+۱۷}{۱۶}=\frac{۱}{۸}\quad x_۲=\frac{-۱۵-۱۷}{۱۶}=-۲$$

ریشه‌ی بزرگتر، $x=\frac{۱}{۸}$ است.

۱۲.گزینه ۳ ابتدا با مخرج مشترک گیری، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x+۱)(x+۲)+(x-۱)(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x^۲+۵x}{x^۲-۴}\Rightarrow\frac{(x^۲+۳x+۲)+(x^۲-۳x+۲)}{x^۲-۴}=\frac{x^۲+۵x}{x^۲-۴}$$
$$\xrightarrow{x\neq\pm۲} ۲x^۲+۴=x^۲+۵x\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow(x-۴)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۱,۴$$

دقت کنید هیچ یک از جواب‌ها مخرج را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر دو قابل قبول هستند، پس مجموع ریشه‌ها ۵ است.

۱۳.گزینه ۲

با جایگذاری a در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{a-۱}{a+۲}+\frac{۲}{a}=\frac{۴a-۴}{a^۲-a}\Rightarrow\frac{a^۲-a+۲a+۴}{a(a+۲)}=\frac{۴a-۴}{a(a-۱)}$$
$$\Rightarrow\frac{a^۲+a+۴}{a(a+۲)}=\frac{۴(a-۱)}{a(a-۱)}\xrightarrow{a\neq۰,۱}\frac{a^۲+a+۴}{a+۲}=۴$$
$$\xrightarrow{a\neq-۲} a^۲+a+۴=۴a+۸\Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a+۱)=۰\Rightarrow a=۴,-۱$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. زیرا مخرج هیچ‌کدام از کسرها را صفر نمی‌کنند.

۱۴.گزینه ۴

$$\frac{۴}{x+۲}+\frac{۴}{x-۲}=x\Rightarrow\frac{۴(x-۲)+۴(x+۲)}{(x+۲)(x-۲)}=x\Rightarrow\frac{۸x}{x^۲-۴}=x$$
$$\frac{۸x}{x^۲-۴}-x=۰\Rightarrow x(\frac{۸}{x^۲-۴}-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{۸}{x^۲-۴}=۱\Rightarrow x^۲-۴=۸\Rightarrow x^۲=۱۲\Rightarrow x=\pm۲\sqrt{۳}\\ x=۰\end{cases}$$

هیچ‌کدام از این جواب‌ها ریشه‌ی مخرج معادله نیستند، پس هر سه قابل قبول هستند.

۱۵.گزینه ۱

$$\frac{k}{x}+\frac{x}{x-۳}=۲\Rightarrow\frac{k(x-۳)+x^۲}{x(x-۳)}=۲\xrightarrow{x\neq۰,۳}kx-۳k+x^۲=۲x^۲-۶x$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x-kx+۳k=۰\Rightarrow x^۲-(۶+k)x+۳k=۰$$

چون مجموع ریشه‌ها برابر ۷ است، بنابراین:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow ۷=-\frac{-(۶+k)}{۱}\Rightarrow ۶+k=۷\Rightarrow k=۱$$

۱۶.گزینه ۱ مجموع دو کسر $\frac{x-۱}{x-۲}$, $\frac{۱+x}{x}$ برابر $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ است. این جمله را به زبان ریاضی به صورت معادله‌ی زیر بیان کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱+x}{x}+\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$$
$$\Rightarrow \frac{(۱+x)(x-۲)+x(x-۱)}{x(x-۲)}=\frac{x^۲-۲x+۲}{x(x-۲)}$$
$$\Rightarrow (x^۲-x-۲)+(x^۲-x)=x^۲-۲x+۲ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{غ ق ق (مخرج را صفر می کند)} \\ x=-۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۷.گزینه ۲

$$\sqrt{۲x+۵}=۵+۲x \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x+۵=۴x^۲+۲۰x+۲۵ \rightarrow ۴x^۲+۱۸x+۲۰=۰$$
$$\rightarrow ۲x^۲+۹x+۱۰=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۸۱-۸۰=۱ \rightarrow x=\frac{-۹\pm ۱}{۴}=-۲\ ,\ -\frac{۵}{۲}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۱۸.گزینه ۲

$$\sqrt{۲+\sqrt{x-۵}}=\sqrt{۱۳-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲+\sqrt{x-۵}=۱۳-x \rightarrow \sqrt{x-۵}=۱۱-x$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۵=۱۲۱+x^۲-۲۲x \rightarrow x^۲-۲۳x+۱۲۶=۰ \rightarrow (x-۱۴)(x-۹)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=۱۴ & \text{غ ق ق (زیر رادیکال را منفی می‌کند)} \\ x=۹ & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین این معادله دارای یک ریشه می‌باشد.

۱۹.گزینه ۲ ابتدا ساختار معادله را تغییر می‌دهیم

$$\frac{(x+۱)^۲}{(x-۳)^۲}-۲=\frac{x+۱}{x-۳} \rightarrow (\frac{x+۱}{x-۳})^۲-۲=\frac{x+۱}{x-۳}$$

حال با تغییر متغیر $\frac{x+۱}{x-۳}=t$ داریم:

$$t^۲-۲=t \rightarrow t^۲-t-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t=-۱ \\ t=۲ \end{cases}$$

حالا به جای t عبارت مورد نظر را جایگذاری می‌نمائیم

$$\frac{x+۱}{x-۳}=-۱ \rightarrow ۲x+۱=-x+۳ \rightarrow x=۲ \rightarrow x=۱ \quad \checkmark$$

$$\frac{x+۱}{x-۳}=۲ \rightarrow ۲x-۶=x+۱ \rightarrow x=۷ \quad \checkmark$$

با جایگذاری ریشه‌ها مشاهده می‌شود هر دو ریشه صدق می‌نمایند پس داریم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۱+\frac{۱}{۷}=\frac{۸}{۷}$$

۲۰.گزینه ۳

$$۲+\frac{۵}{۳k-۱}=\frac{-۲}{(۳k-۱)^۲}$$

می‌توان با تغییر متغیر $t = \frac{۱}{۳k - ۱}$ معادله را به فرم دیگری بازنویسی کرد.

$$۲+۵t=-۲t^{۲}\rightarrow ۲t^{۲}+۵t+۲=۰\rightarrow \Delta=۲۵-۱۶=۹$$

$$t_{۱}=\frac{-۵+\sqrt{۹}}{۴}=-\frac{۱}{۲}\rightarrow \frac{۱}{۳k-۱}=-\frac{۱}{۲}\rightarrow ۳k-۱=-۲\rightarrow k=\frac{-۱}{۳}$$

$$t_{۲}=\frac{-۵-\sqrt{۹}}{۴}=-۲\rightarrow \frac{۱}{۳k-۱}=-۲\rightarrow -۶k+۲=۱\rightarrow k=\frac{۱}{۶}$$

با جایگذاری در معادله واضح است که هر دو ریشه در معادله صدق می‌نماید. پس جمع هر دو ریشه برابر است با:

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۶}$$

۲۱.گزینه ۴ برای حل می‌توان عبارت $x^{۲}-۲x+۳$ را t در نظر گرفت و پس معادله را در ک.م.م مخارج ضرب کرد:

$$\frac{۱}{t-۱}+\frac{۲}{t}=\frac{۶}{t+۱}$$

$$\xrightarrow{\times(t-۱)t(t+۱)} t(t+۱)+۲(t-۱)(t+۱)=۶t(t-۱)$$

$$\rightarrow\ t^{۲}+t+۲t^{۲}-۲=۶t^{۲}-۶t\rightarrow\ ۳t^{۲}-۷t+۲=۰\rightarrow \Delta=۲۵$$

$$t_{۱}=\frac{۷+۵}{۶}=۲\rightarrow x^{۲}-۲x+۳=۲\rightarrow x^{۲}-۲x+۱=۰\rightarrow x=۱$$

$$t_{۲}=\frac{۷-۵}{۶}=\frac{۱}{۳}\rightarrow x^{۲}-۲x+۳=\frac{۱}{۳}\rightarrow x^{۲}-۲x+\frac{۸}{۳}=۰\rightarrow \Delta<۰$$

پس عبارت مورد نظر مسئله برابر است با:

$$۷\alpha^{۲}-۵\alpha+۱\ \underline{\underline{\alpha=۱}}\ +۳$$

۲۲.گزینه ۲ برای حل مسئله باید میزان کار انجام شده در یک روز را در حالتهای مختلف محاسبه کرد:

مقدار کار انجام شده در یک روز $\rightarrow$ هر دو با هم ۱۸ روز $=\frac{۱}{۱۸}$

فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را انجام دهد پس:

کار انجام شده بوسیله‌ی کارگر اول در یک روز $=\frac{۱}{x}$

کارگر دوم در $x+۱۵$ روز کار را انجام می‌دهد، پس:

مقدار کار انجام شده بوسیله‌ی کارگر دوم در یک روز $=\frac{۱}{x+۱۵}$

حال می‌توان معادله‌ی زیر را تشکیل داد:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\xrightarrow{۱۸x(x+۱۵)} ۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵)$$

$$\rightarrow ۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^{۲}+۱۵x\rightarrow x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰\rightarrow (x-۳۰)(x+۹)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=۳۰\ \checkmark \\ x=\ -۹ \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۲۳.گزینه ۱ ابتدا میزان نمک موجود در محلول را محاسبه می‌نماییم

$$\frac{?}{۲۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰} \rightarrow \text{نمک موجود} = ۲۰۰ \times \frac{۴}{۱۰۰} = ۸kg$$

حال باید به مقدار y از وزن آب تبخیر شود تا به محلول مطلوب برسیم

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}\rightarrow ۱۴۰۰-۷y=۸۰۰\rightarrow ۷y=۶۰۰\rightarrow y=\frac{۶۰۰}{۷}kg$$

۲۴.گزینه ۱ برای حل می‌توان معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$\frac{۱}{x^۲(x+۱)}=\frac{۲}{x+۱}$$

می‌توان عامل را از دو طرف ساده کرد، چون این عامل به دلیل حضور در مخرج کسر الزاماً $x+۱\neq ۰$ می‌باشد.

$$\frac{۱}{x^۲}=۲\rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مجموع دو ریشه قرینه‌ی صفر می‌باشد.

۲۵.گزینه ۴ برای رسیدن به گزینه‌ی صحیح ابتدا معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌نماییم.

$$\frac{(x+۲)(x-۱)+x(۲x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{ax^۲-۲}{x^۲-x}$$

$$\frac{۳x^۲-۲}{x^۲-x}=\frac{ax^۲-۲}{x^۲-x}$$

باتوجه به اینکه $x^۲-x\neq ۰$ می‌باشد می‌توان از دو طرف معادله حذف نمود و داریم:

$$۳x^۲-۲=ax^۲-۲$$

حال دو حالت وجود داد:

$(I)\ a=۳\rightarrow ۳x^۲-۲=۳x^۲-۲\rightarrow$ بی‌شمار جواب

$(II)\ a\neq ۳\rightarrow ۳x^۲-۲=ax^۲-۲\rightarrow\ (a-۳)x^۲=۰\rightarrow x=۰$

که این ریشه به دلیل اینکه ریشه‌ی مخرج هم می‌باشد قابل قبول نیست و معادله فاقد ریشه است.

۲۶.گزینه ۱

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳x^۲}{x^۲+x-۲}\rightarrow\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳x^۲}{(x+۲)(x-۱)}$$

$$\xrightarrow{\times(x+۲)(x-۱)}(x+۲)(x+۱)+۲x(x-۱)=۳x^۲\rightarrow x^۲+x+۲x+۲+۲x^۲-۲x=۳x^۲$$

$$\rightarrow ۳x^۲+x+۲=۳x^۲\rightarrow x=-۲$$

این جواب غیرقابل قبول می‌باشد زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۲۷.گزینه ۴

$$\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}\rightarrow\frac{۲x+۳}{۲(x-۱)}-\frac{۵}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۲x-۳}{۲(x+۱)}$$

$$\xrightarrow{\times۲(x+۱)(x-۱)}(۲x+۳)(x+۱)-۱۰=(۲x-۳)(x-۱)$$

$$\rightarrow ۲x^۲+۲x+۳x+۳-۱۰=۲x^۲-۲x-۳x+۳\rightarrow ۱۰x=۱۰\rightarrow x=۱$$

این جواب غیر قابل قبول است چون مخرج را صفر می‌کند (در دامنه‌ی تعریف قرار ندارد) یعنی معادله جواب حقیقی ندارد.

۲۸.گزینه ۱ باتوجه به اینکه مجموع دو رادیکال فرجه‌ی زوج که، همواره نامنفی هستند صفر شده است، هم اولی باید

لذا می‌توان ریشه‌های یک بخش را محاسبه کرد و در کل معادله جایگذاری نمود.

$$\sqrt{x^{۳}-۴x}=۰ \rightarrow x^{۳}-۴x=۰ \rightarrow x(x-۲)(x+۲)=۰$$

پس سه ریشه‌ی اولیه وجود دارد $x=-۲\ ,\ x=۰\ ,\ x=۲$.

حال با جایگذاری متوجه می‌شویم که فقط $x=-۲$ در معادله صدق می‌نماید.

۲۹.گزینه ۱ در طرف چپ و راست مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x-۱)^۲-(x+۱)^۲}{(x+۱)(x-۱)}=ax\left(\frac{x+۱-(x-۱)}{x+۱}\right)\Rightarrow\frac{-۴x}{(x+۱)(x-۱)}=ax\left(\frac{۲}{x+۱}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{۲ax}{x+۱}+\frac{۴x}{(x+۱)(x-۱)}=۰\Rightarrow\underbrace{\frac{۲x}{x+۱}}_{\text{فاکتور}}\left(a+\frac{۲}{x-۱}\right)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲x}{x+۱}=۰\Rightarrow x=۰\\ a+\frac{۲}{x-۱}=۰\Rightarrow\frac{۲}{x-۱}=-a\Rightarrow\frac{۲}{-a}=x-۱\Rightarrow x=۱-\frac{۲}{a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها}=\left|۱-\frac{۲}{a}-۰\right|=۲\Rightarrow\begin{cases}۱-\frac{۲}{a}=۲\to\frac{۲}{a}=-۱\to a=-۲\\ ۱-\frac{۲}{a}=-۲\to\frac{۲}{a}=۳\to a=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

۳۰.گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می کنیم.

$$\left(\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\left(\sqrt[۴]{۵\times۵^{\frac{۱}{۳}}}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\left(\sqrt[۴]{۵^{\frac{۴}{۳}}}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\left(۵^{\frac{۴}{۱۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}}=۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}=\sqrt{\left(\sqrt{۵}-۱\right)^۲}=\underbrace{\left|\sqrt{۵}-۱\right|}_{+}=\sqrt{۵}-۱$$

پس داریم : $\sqrt{۵}-(\sqrt{۵}-۱)=x\sqrt{۲}\to۱=x\sqrt{۲}\to x=۱$

۳۱.گزینه ۳ ابتدا $۳x-\frac{۱}{x}=t$ فرض می‌نمائیم، پس داریم:

$$۲t^۲-۵t+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}t_۱=\frac{۵+۳}{۴}=۲\\ t_۲=\frac{۵-۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حال برای محاسبه‌ی x داریم:

$$۳x-\frac{۱}{x}=۲\xrightarrow{\times(x)}۳x^۲-۲x-۱=۰\to x_۱=۱\ ,\ x_۲=-\frac{۱}{۳}$$

$$۳x-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times(۲x)}۶x^۲-x-۲=۰\to x_۳=\frac{۲}{۳}\ ,\ x_۴=-\frac{۱}{۲}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S = x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + x_{۴} = ۱ + (-\frac{۱}{۳}) + \frac{۲}{۳} + (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۶}$$

۳۲.گزینه ۲

$$\sqrt{x^۲-۲x-۳}=A\to A+۳=\frac{A+۷}{۲A}\to ۲A^۲+۶A=A+۷\to ۲A^۲+۵A-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}A=۱\\A=\frac{c}{a}=-\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

$A=-\frac{۷}{۲}\to\sqrt{x^۲-۲x-۳}=-\frac{۷}{۲}$ امکان ندارد:

$$A=۱\to\sqrt{x^۲-۲x-۳}=۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲-۲x-۳=۱\to\underbrace{x^۲-۲x+۱}-۴=۱$$

$$\to(x-۱)^۲=۵\to x-۱=\pm\sqrt{۵}\to\begin{cases}x=۱+\sqrt{۵}&\text{ق ق (در دامنه‌ی تعریف است)}\\x=۱-\sqrt{۵}&\text{ق ق (در دامنه‌ی تعریف است)}\end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $=(۱+\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۵})=۱-۵=-۴$

۳۳.گزینه ۲

برای حل ابتدا از اتحاد فرعی استفاده می‌نماییم: $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$

$$۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲(x^۲+\frac{۱}{x^۲})\to ۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲\left((x+\frac{۱}{x})^۲-۲\right)$$

حال تغییر متغیر زیر را اعمال می‌نمائیم:

$$x+\frac{۱}{x}=t$$

$$۷t=۹+۲(t^۲-۲)\to ۷t=۹+۲t^۲-۴\to ۲t^۲-۷t+۵=۰$$

مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دو صفر است پس: $t_۱=۱\ ,\ t_۲=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۲}$

حال عبارت $x+\frac{۱}{x}$ را به جای t قرار می‌دهیم:

$$t_۱=۲۰\to x+\frac{۱}{x}=۱\xrightarrow{\times x}x^۲-x+۱=۰\to\Delta=-۳<۰\to$$ فاقد ریشه

$$t_۲=\frac{۵}{۲}\to x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\times ۲x}۲x^۲-۵x+۲=۰\ \begin{cases}x=\alpha\\x=\beta\end{cases}\to P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

۳۴.گزینه ۳ برای حل تعداد اسباب‌بازی‌ها را x و قیمت هر کدام را y فرض می‌نمائیم. پس می‌توان دو معادله نوشت:

$$(I)\ xy=۱۲۰۰۰$$

$$(II)\ (x+۴)(y-۱۰۰)=۱۲۰۰۰$$

از معادله‌ی شماره‌ی (I) داریم: $y=\frac{۱۲۰۰۰}{x}$

پس در معادله‌ی شماره‌ی (II) , y را جایگذاری می‌نمائیم:

$$(x+۴)(\frac{۱۲۰۰۰}{x}-۱۰۰)=۱۲۰۰۰\to ۱۰۰(\frac{۱۲۰}{x}-۱)(x+۴)=۱۲۰۰۰$$

$$\rightarrow (\frac{۱۲۰}{x}-۱)(x+۴)=۱۲۰ \rightarrow ۱۲۰+\frac{۴۸۰}{x}-x-۴=۱۲۰$$

$$\rightarrow ۴۸۰-x^{۲}-۴x=۰ \rightarrow x^{۲}+۴x-۴۸۰=۰ \rightarrow (x+۲۴)(x-۲۰)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-۲۴ \text{ غ ق ق} \\ x=۲۰ \quad \rightarrow \quad y=\frac{۱۲۰۰۰}{۲۰}=۶۰۰ \end{cases}$$

۳۵.گزینه ۴ یکی روش‌های حل معادلات رادیکالی تعیین دامنهٔ تابع می‌باشد.

$$\sqrt{۱۶۹-x^{۲}}=x-۱۷ \xrightarrow[\text{زوج نامنفی است}]{\text{رادیکال فرجه}} x-۱۷\geq ۰ \rightarrow x\geq ۱۷(I)$$

$$۱۶۹-x^{۲}\geq ۰$$

$$x^{۲}\leq ۱۶۹ \rightarrow |x|\leq ۱۳ \rightarrow -۱۳\leq x\leq ۱۳(II)$$

$$(I)\cap(II) \rightarrow \varnothing$$

معادله فاقد ریشه است.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۲۴۹۴۳

۱- ۳	۲- ۴	۳- ۱	۴- ۱	۵- ۱
۶- ۴	۷- ۱	۸- ۲	۹- ۳	۱۰- ۱
۱۱- ۳	۱۲- ۳	۱۳- ۲	۱۴- ۴	۱۵- ۱
۱۶- ۱	۱۷- ۲	۱۸- ۲	۱۹- ۲	۲۰- ۳
۲۱- ۴	۲۲- ۲	۲۳- ۱	۲۴- ۱	۲۵- ۴
۲۶- ۱	۲۷- ۴	۲۸- ۱	۲۹- ۱	۳۰- ۳
۳۱- ۳	۳۲- ۲	۳۳- ۲	۳۴- ۳	۳۵- ۴