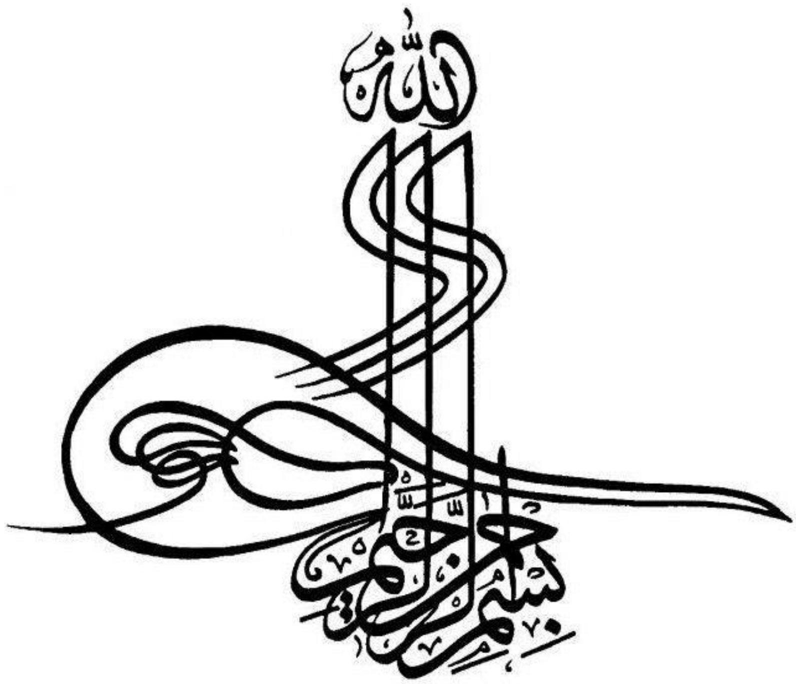


هندسه تحلیلی و جبر

(فصل اول ریاضی پایه یازدهم تجربی)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- حل تمامی فعالیت ها و کاردر کلاس ها و تمرینات

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل اول کتاب درسی پایه یازدهم تجربی، مبحث «هندسه تحلیلی و جبر » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول :هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادله خط

انواع خط

الف) خط های مایل : شکل کلی خط های مایل به صورت $y = mx + b$ می باشد که در آن m شیب خط و h عرض از مبداء (محل برخورد با محور عرض ها) خط است .

(در خط های مایل درجه x و y یک می باشد)

رسم خط: برای رسم یک خط با داشتن دو نقطه از خط می توانیم آن را رسم کنیم.

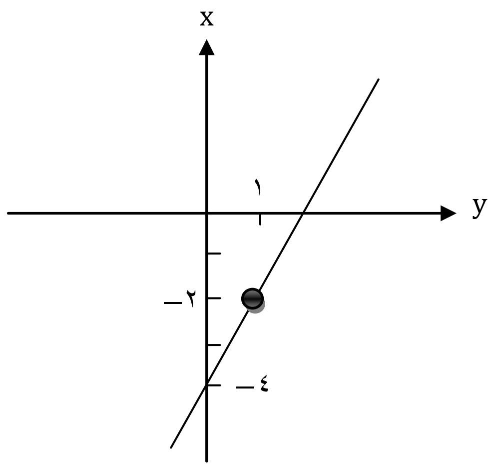
مثال : خط های زیر را رسم کنید.

مثال ۱ $y = ۲x - ۴$

شیب $= ۲ \rightarrow m = ۲$

عرض از مبداء $= -۴ \rightarrow h = -۴$

x	۰	۱
y	−٤	−۲



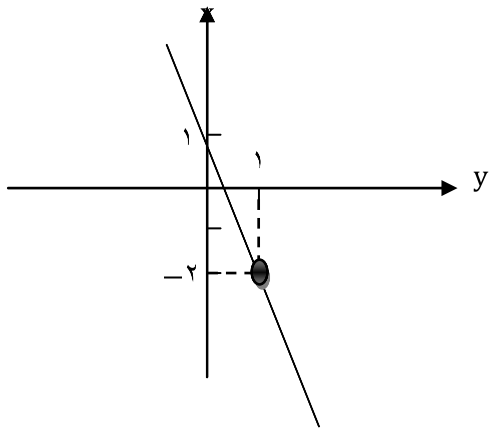
نکته :برای بدست آوردن عرض از مبداء به جای x عدد صفر را قرار می دهیم.

مثال ۲ $y = -۳x + ۱$

x	۰	۱
y	۱	-۲

$m = -۳$

$h = ۱$

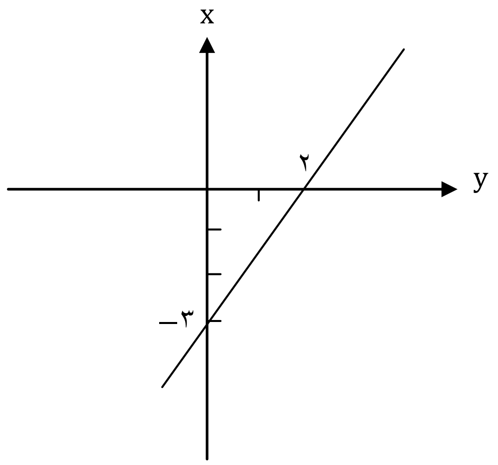


مثال ۳ $y = \frac{۳}{۲}x - ۳$

x	۰	۲
y	-۳	۰

$m = \frac{۳}{۲}$

$h = -۳$



نکته: خط های مایل را به صورت $ax + by + c = ۰$ نیز نشان می دهند که در این حالت برای بدست آوردن شیب و عرض از مبداء بایستی آن را به صورت $y = mx + h$ در آوریم (کاری می کنیم که y تنها شود)

روش سریعتر برای به دست آوردن شیب خط وقتی xوy در یک سمت تساوی باشند:

$$\text{شیب} = -\frac{x\,\text{ضریب}}{y\,\text{ضریب}} = -\frac{a}{b}$$

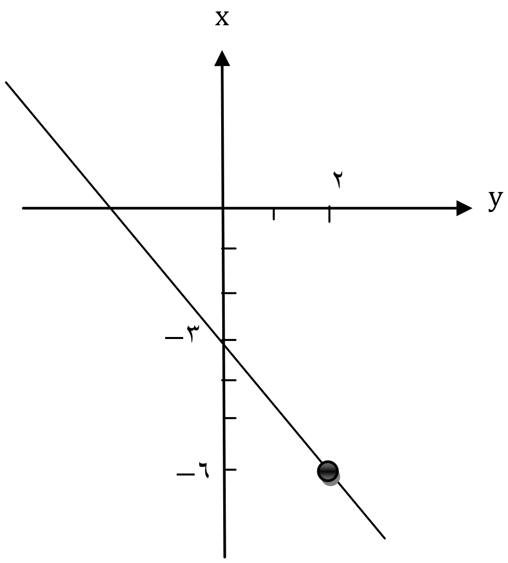
مثال : خط های زیر را رسم کنید شیب و عرض از مبداء آنها را نیز به دست آورید.

مثال ۱ $۳x + ۲y = -۶$

$\rightarrow ۲y = -۳x - ۶$

$\rightarrow y = \underbrace{-\frac{۳}{۲}}_{\text{شیب}}x \underbrace{- ۳}_{\text{عرض از مبداء}}$

x	۰	۲
y	۳ −	٦ −

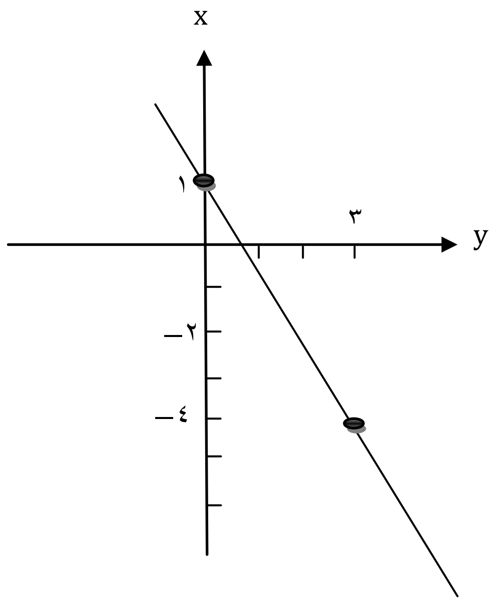


مثال۲ $۲y - ۳ = -۵x$

$\rightarrow ۳y = -۵x + ۳$

$\rightarrow y = \underbrace{-\frac{۵}{۳}}_{\text{شیب}}x + \underbrace{۱}_{\text{عرض از مبداء}}$

x	۰	۳
y	۱	-۴



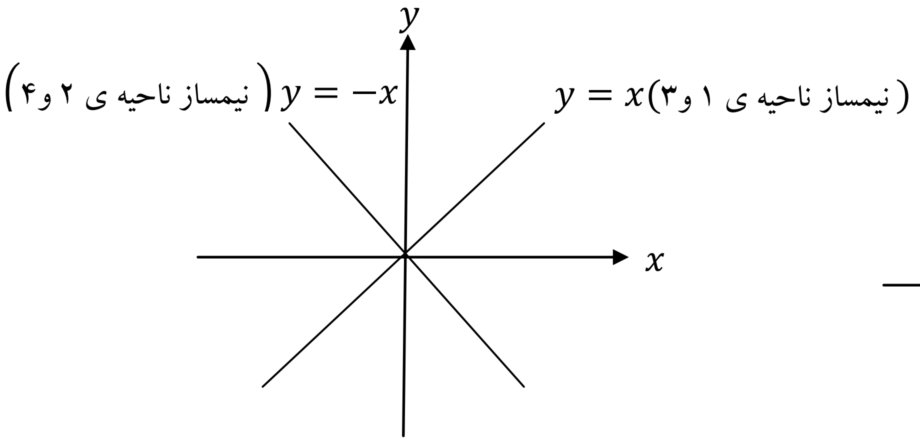
معادله ی خطوط مایل خاص

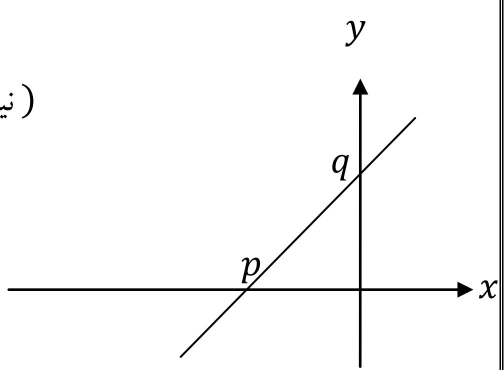
۱) معادله ی نیمساز ناحیه ی اول و سوم برابر $y = x$ است.

۲) معادله ی نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم برابر $y = -x$ است.

۳) معادله ی کلی خطوط گذرنده از مبدأ مختصات، $y = mx$ است.

۴)معادله ی خطی که طول از مبدأ آن P و عرض از مبدأ آن q باشد، $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$ است.





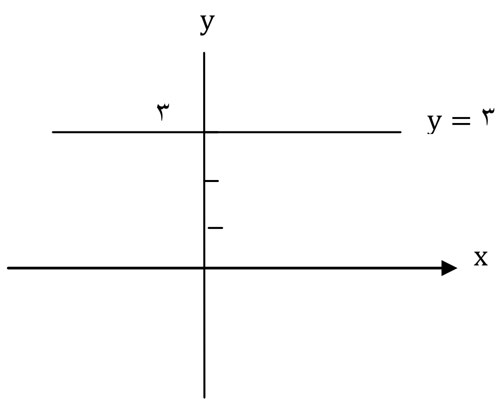
ب) خط های افقی: شکل کلی خط های افقی به صورت $y = h$ $(h \in R)$ می باشد (درمعادله خط های افقی فقط y داریم (x نداریم)

شیب این خط ها **صفر** است در حقیقت این خط به صورت $y = ۰x + h$ هستند که پس از ساده کردن به $y = h$ می رسیم.

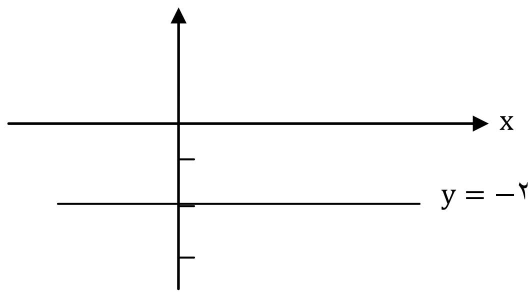
برای رسم این خط ها خطی افقی موازی محور xها در محل برخورد با محور y ها یعنی h رسم می کنیم.

مثال: خط های زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۳$



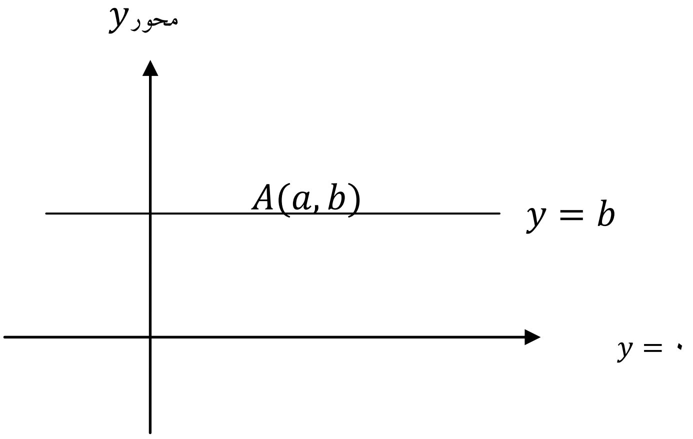
ب) $y = -۲$



معادله ی خطوط افقی خاص

۱)معادله ی محور x ها ، $y=۰$ است.

۲)معادله ی خطی که از نقطه ی $A(a,b)$ به موازات محور x ها رسم می شود، $y=b$ است.



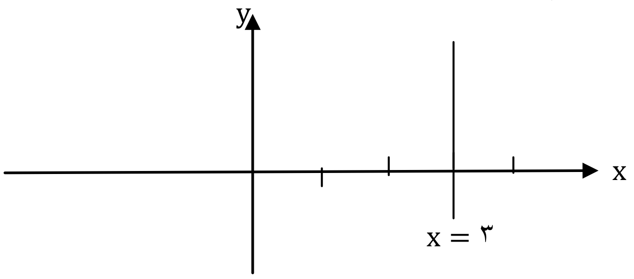
معادله محور xها $y=۰$

ج) خط های قائم: شکل کلی معادله ی خط های قائم به صورت $x=a$ است $(a\in R)$ می باشد (در معادله ی خط های قائم فقط x داریم(y نداریم)

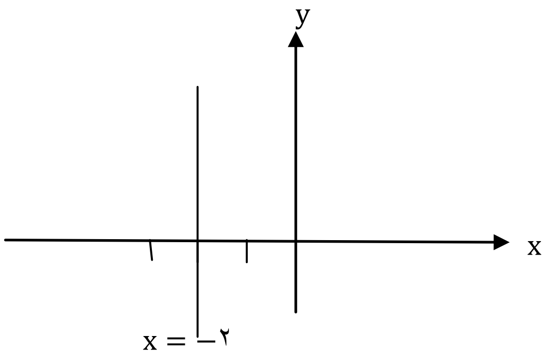
شیب این خط ها **تعریف نشده** است.

برای رسم این خط ها خطی قائم موازی محور y ها در محل برخورد با محور xها یعنی a رسم می کنیم.

$x=۳$



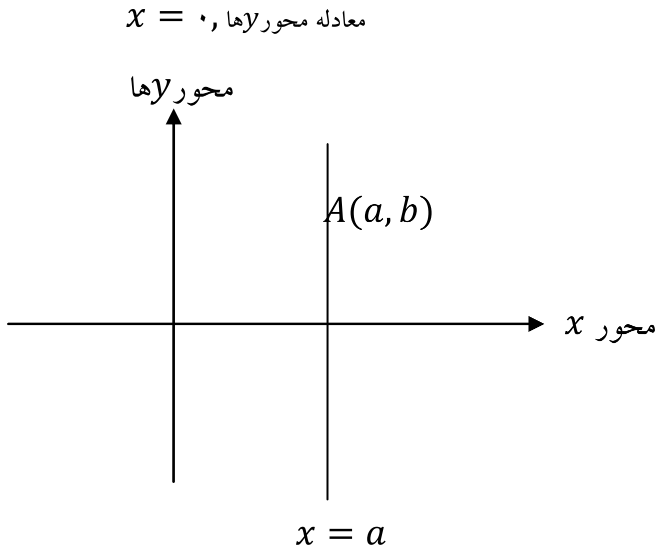
$x=-۲$



معادله ی خطوط قائم خاص

۱)معادله ی محور yها، $x=۰$ است.

۲)معادله ی خطی که از نقطه ی $A(a,b)$ به موازات محور yها رسم می شود، $x=a$ است.



وضعیت دو خط نسبت به هم:

الف) موازی

دو خط در صورتی با هم **موازیند** که **شیب های** آنها با هم **برابر** باشد. $m = m'$

مثال ۱

$$\begin{cases} y = ۴x - ۲ \to m = ۴ \\ y = ۴x + ۵ \to m' = ۴ \end{cases} \to m = m' \to \text{موازی اند}$$

$$\begin{cases} ۳x - ۲y = ۷ \to -۲y = -۳x + ۷ \to y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۲} \to m = \frac{۳}{۲} \\ \quad y = \frac{۳}{۲}x + ۴ \to m' = \frac{۳}{۲} \to m = m' \Rightarrow \text{موازی اند} \end{cases}$$

تست: به ازای چه مقدار a دو خط $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ax + ۴y = -ay + ۵ \end{cases}$ موازی اند؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۸}$

حل) اگر بخواهیم دو خط $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ax + ۴y = -ay + ۵ \end{cases}$ موازی هم باشند، باید ابتدا شیب هر کدام از معادله ها را به دست آوریم سپس مساوی هم قرار دهیم

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ax + (۴ + a)y = ۵ \end{cases} \xRightarrow{\text{شرط توازی}} m = m' \Rightarrow \frac{-۲}{-۳} = \frac{-a}{۴ + a} \Rightarrow -۸ - ۲a = ۳a$$

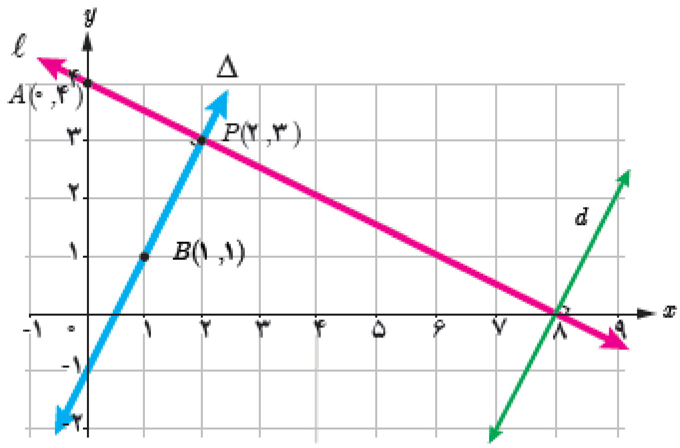
$$\Rightarrow a = -\frac{۸}{۵}$$

ب) عمود:

دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می دهیم.

$$m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{۳-۴}{۲-۰} = -\frac{۱}{۲}$$: شیب خط L گذرا از نقاط Aو P

$$m' = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$$: شیب خط Δ گذار از نقاط B و P



ملاحظه می شود که شیب ها عکس وقرینهٔ یکدیگرند.

به عبارت دیگر حاصل ضرب شیب دو خط برابر ۱− است. $mm' = \left(-\frac{۱}{۲}\right)(۲) = -۱$

دو خط غیر موازی با محور های مختصات بر هم عمودند هر گاه شیب هر کدام عکس و قرینه ی شیب دیگری باشد. به عبارت دیگر حاصلضرب شیب های آنها برابر (۱−) باشد، یعنی $\boldsymbol{mm' = -1}$

$$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \rightarrow m = ۲ \\ y = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \rightarrow m' = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow mm' = ۲ \times -\frac{۱}{۲} = -۱$$

$$\begin{cases} ۳y - ۲x + ۷ = ۰ \rightarrow ۳y = ۲x - ۷ \rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۷}{۳} \rightarrow m = \frac{۲}{۳} \\ -۲\mathrm{y} = ۳\mathrm{x} - ۴ \rightarrow \mathrm{y} = -\frac{۳}{۲}\mathrm{x} + ۲ \rightarrow \mathrm{m}' = -\frac{۳}{۲} \rightarrow \mathrm{mm}' = \frac{۲}{۳} \times -\frac{۳}{۲} = -۱ \end{cases}$$

مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، نشان دهید

خط گذرا از نقاط $P(a,b)$ و $Q(b,a)$ همواره بر خط $y = x$ عمود است.

کافی است شیب خط ها را با هم مقایسه کنیم:

$$m_{\mathrm{PQ}} = \frac{b-a}{a-b} = \frac{-(a-b)}{a-b} = -۱ \quad \text{و} \quad y = x \Longrightarrow \mathrm{m}' = ۱$$

$$\Longrightarrow m_{\mathrm{PQ}} \times m' = -۱ \times ۱ = -۱$$

حاصلضرب شیب ها برابر ۱− است پس بر هم عمود هستند.

تست: به ازای چه مقدار m، دو خط $y = ۳x + ۱$ و $\mathrm{y} + \mathrm{mx} + ۲ = ۰$ بر هم عمودند؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) -۳

حل)دو خط $y = ۳x + ۱$ و $y + mx + ۲ = ۰$ بر هم عمودند. شیب این دو خط به ترتیب برابر با ۳ و $-m$ است. شرط عمود بودن دو خط این است که حاصل ضرب شیب های دو خط برابر ۱− باشد. داریم:

$$m.m' = -۱ \Longrightarrow (-m) = -۱ \Longrightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

تست: اگر خطوط $(k+۱)y = x + ۲$ و $y = (۲k+۱)x + ۱$ اقطار یک لوزی باشند، k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

حل) گزینه ی «۴» می دانیم در هر لوزی، قطر ها بر هم عمودند. پس خطوط

$(k+۱)y = x+۲$ و $y = (۲k+۱)x+۱$ بر هم عمود بوده و حاصل ضرب شیب هایشان برابر -۱

است. شیب خط ها به ترتیب برابر با $m = \frac{۱}{k+۱}$ و $m' = ۲k+۱$ است. داریم:

$$m = \frac{۱}{k+۱}, m' = ۲k+۱ \xRightarrow{\text{شرط عمود بودن}} m.m' = -۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{k+۱}\right).(۲k+۱) = -۱ \Rightarrow$$

$$۲k+۱ = -k-۱ \Rightarrow k = -\frac{۲}{۳}$$

ج) متقاطع غیر عمود:

اگر دو خط موازی نباشند $m \neq m'$ و بر هم عمود نباشند $mm' \neq -۱$ آن گاه متقاطع غیر عمود هستند

$$\begin{cases} y = ۳x+۱ \rightarrow m = ۳ \\ y = -۴x+۲ \rightarrow m' = -۴ \end{cases} \rightarrow \text{متقاطع غیر عمود}$$

$$m \neq m'$$
$$m \times m' \neq -۱$$

مثال: خط L به معادله ی $۲y - ۳x = ۱$ و خط d با عرض از مبداء ۵ به معادله ی $y = mx+۵$ را در نظر بگیرید:

الف) m، شیب خط d را طوری بیابید که d با L موازی باشد.

$$۲y - ۳x = ۱ \rightarrow ۲y = ۳x+۱ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲} \rightarrow m' = \frac{۳}{۲}$$
$$y = mx+۵ \rightarrow \text{شیب} = m \rightarrow m' = m \rightarrow m = \frac{۳}{۲}$$

ب) به ازای چه مقداری از m دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$$m.m' = -۱ \rightarrow m \times \frac{۳}{۲} = -۱ \rightarrow m = -\frac{۲}{۳}$$

تست: خطی که از نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۲,-۲)$ می گذرد، خط $x+y=۱$ را در نقطه ی C قطع می کند. $x_c+۲y_c$ چه قدر است؟

۱(۱ -۱(۲   ۰(۳ -۳(۴

حل) گزینه ی «۲» ابتدا با داشتن مختصات $A(۱,-۲)$ و $B(۲,-۲)$، معادله ی خطی را که از این دو نقطه عبور می کند می نویسیم. داریم:

$$A(۱,-۲),B(۲,-۲)\xrightarrow{\text{شیب}}m_{AB}=\frac{-۲-(-۲)}{۲-۱}=۰$$

وقتی $m=۰$ یعنی خط افقی است و معادله ی آن به صورت $y_B=-۲$ یا $y=y_A$ است. حال برای به دست آوردن مختصات نقطه ی C (محل برخورد خط $y=-۲$ و $x+y=۱$)، کافی است این دو معادله را در دستگاه دو معادله ی دو مجهولی قرار داده و آن را حل کنیم. داریم:

$$\begin{cases} y=-۲ \\ x+y=۱ \end{cases}\Rightarrow x=۳,y=-۲\Rightarrow C(۳,-۲)\to x_C+۲y_C=۳+۲(-۲)=۳-۴=-۱$$

مثال: در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L:y=۵x-۲\quad m=۵\qquad d:y=-\frac{۱}{۵}x+۳\quad m'=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow mm'=-۱$

ب) $l:y=\frac{۱}{۲}x+۷\quad m=\frac{۱}{۲}\qquad d:x-۲y=۱\quad x-۲y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow$

$m'=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=m'$

پ) $L:۲x-۳y+۳=۰\quad m=-\frac{a}{b}\Rightarrow m=\frac{۲}{۳}\qquad d:۳x+۲y=۰\quad m'=-\frac{a}{b}\Rightarrow$

$$m' = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow mm' = -۱$$

ت) $L: x = ۱$ خط L عمودی است $d: y = -۳$ خط d افقی است

حالت خاص: خط های افقی $y = h$ و خط های قائم $x = a$ همیشه بر هم عمودند.

ث) $L: y = ۳x + ۱ \quad m = ۳ \qquad d: x = ۳y - ۱$

$$x = ۳y - ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow m' = \frac{۱}{۳} \Rightarrow m \neq m', mm' \neq -۱$$

متقاطع غیر عمود ند.

مثال : وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$L: ۲x - y = ۱ \quad m_l = ۲$

$d: y = ۲x - ۳ \quad m_d = ۲$

$\Delta: x + ۲y = ۰ \quad m_\Delta = -\frac{۱}{۲}$

با توجه به شیب های خط ها : خط l موازی d است و خط Δ بر دو خط d و l عمود است.

نوشتن معادلهٔ خط

الف) نوشتن معادله ی خط با داشتن شیب و یک نقطه از آن

اگر $A(x_1, y_1)$ یک نقطه از خط و شیب آن برابر m باشد آن گاه معادله ی خط از فرمول زیر بدست می آید.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲− و از نقطه ی $A(2, -3)$ بگذرد.

$$\begin{matrix} m = -2 \\ A = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} y_1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \end{matrix} \to y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - -3 = -2(x - 2) \to y + 3 = -2x + 4$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1$$

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A = (1,5)$ بگذرد و با خط $3x - y = 4$ موازی باشد .

چون خطی که قرار است معادله آن را بنویسیم با خط $3x - y = 4$ موازی است پس شیب آنها با هم برابر است یعنی:

$$3x - y = 4 \to -y = -3x + 4 \to y = 3x - 4 \to m = 3$$

$$A = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} y_1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \to y - y_1 = m(x - x_1) \to y - 5 = 3(x - 1) \to y = 3x + 2$$

تمرین: معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ $P(2, -1)$ را بنویسید که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(-1,2)$ بگذرد و بر خط $4y - 2x = 1$ عمود باشد.

چون خطی که قرار است معادله ی آن را بنویسیم بر خط $4y - 2x = 1$ عمود است پس شیب آن عکس وقرینه ی شیب این خط است.

$$۴y - ۲x = ۱ \rightarrow ۴y = ۲x + ۱ \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴} \rightarrow m' = \frac{۱}{۲} \rightarrow m = -۲$$

تست : خطی موازی با خط $۳y = ۱ - ۶x$ بوده و عرض از مبدأ آن برابر ۱− است. کدام یک از نقاط زیر روی این خط واقع است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(۱,-۳)$ ۴) $(-۱,-۲)$

حل) گزینه ی «۳» برای نوشتن معادله ی خط، کافی است شیب و یک نقطه از خط یا شیب و عرض از مبدأ خط را داشته باشیم . چون خط موازی با خط $۳y = ۱ - ۶x$ است، پس این دو خط هم شیب هستند (یعنی شیبشان یکسان است).

پس ابتدا شیب خط $۳y = ۱ - ۶x$ را به دست می آوریم:

$$۳y = ۱ - ۶x \overset{\div ۳}{\Rightarrow} y = \underbrace{-۲}_{\text{شیب}}x + \frac{۱}{۳} \Longrightarrow m = -۲$$

بنابراین شیب خط مفروض نیز $m = -۲$ است. از طرفی عرض از مبدأ خط (یعنی h)برابر ۱− می باشد. حال با داشتن شیب و عرض از مبدأ خط، داریم:

$$\text{معادله ی خط}\ y = \underbrace{m}_{\text{شیب}}x + \underbrace{h}_{\text{عرض مبدأ}} \xrightarrow{m=-۲\ ,h=-۱} y = -۲x - ۱$$

حال کافی است، تک تک گزینه ها را در معادله ی خط صدق دهیم . تنها مختصات نقطه ی گزینه ی ۳ یعنی $(۱,-۳)$ در معادله ی خط صدق می کند.

تست : معادله ی خطی که از نقطه ی $(-۱,۲)$ گذشته و بر خط $۲y - x + ۲ = ۰$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $y + ۲x - ۳ = ۰$ ۲) $y + ۳x = ۰$

۳) $۲y + x - ۳ = ۰$ ۴) $۲y + x = ۰$

حل) گزینه ی «۲» برای نوشتن معادله ی خط، باید نقطه ای از خط و شیب را داشته باشیم. نقطه ی $(-۱,۲)$ روی خط است. چون خط مفروض بر خط $۲y - x + ۲ = ۰$ عمود است ، شیب آن عکس و قرینه ی شیب خط $۲y - x + ۲ = ۰$ است. چون شیب خط $۲y - x + ۲ = ۰$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، نتیجه میگیریم شیب خط مفروض برابر با $m = -۲$ است. پس داریم:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \xRightarrow{m=-۲ \quad ,(-۱,۲)} y - ۲ = -۲\big(x - (-۱)\big) \Rightarrow y + ۲x = ۰$$

تست : معادله ی خطی که بر خط $۳y = ۴ - ۲x$ عمود باشد و خط $y = x + ۱$ را در نقطه ای به عرض -۲ قطع کند. کدام است؟

۱) $۳x + ۲y - ۵ = ۰$ ۲) $۳x - ۲y + ۵ = ۰$

۳) $۲x - ۳y - ۵ = ۰$ ۴) $۲x + ۳y - ۵ = ۰$

حل) گزینه ی «۲» چون خط مفروض بر خط $۳y = ۴ - ۲x$ عمود است، شیب آن عکس و قرینه ی شیب خط $۳y = ۴ - ۲x$ می باشد. چون شیب خط $۳y = ۴ - ۲x$ برابر با $-\frac{۲}{۳}$ است، پس شیب خط مفروض برابر با $m = \frac{۳}{۲}$ خواهد بود.

خط مفروض، خط $y = x + ۱$ را در نقطه ای به عرض -۲ قطع می کند. یعنی اگر خط مفروض و خط $y = x + ۱$ را در یک دستگاه دو معادله ی دو مجهولی در نظر بگیریم ، جواب y دستگاه $y = -۲$ است. با جایگذاری $y = -۲$ در معادله ی خط $y = x + ۱$، مختصات نقطه ی تلاقی برابر با $(-۳, -۲)$ خواهد بود. دقت کنیم نقطه ی تقاطع $(-۳, -۲)$ روی خط خواسته شده نیز واقع است. پس :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \xRightarrow{m=\frac{۳}{۲} \quad ,(-۳,-۲)} y - ۲ = \frac{۳}{۲}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۵}{۲} \overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۳x - ۲y + ۵ = ۰$$

تست : معادله ی خطی که از نقطه ی تلاقی خط $۲y = x - ۲$ و محور x ها گذشته و با خط $۳y = x + ۲$ موازی باشد، کدام است؟

۱) $۳y + x - ۲ = ۰$ ۲) $۳y - x + ۲ = ۰$ ۳) $y - ۳x - ۱ = ۰$ ۴) $y + ۳x + ۲ = ۰$

حل) گزینه ی «۲» برای به دست آوردن نقطه ی تلاقی خط $۲y = x - ۲$ و محور x ها $(y = ۰)$ ، کافی است در معادله جای y، صفر جایگزین کنیم. داریم:

$$\begin{cases} ۲y = x - ۲ \\ y = ۰ \end{cases} \xrightarrow{y=۰} ۰ = x - ۲ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۲,۰) \text{ نقطه ی تلاقی}$$

چون خط با خط $۳y = x + ۲$ موازی است، نتیجه می گیریم دو خط هم شیب هستند. داریم:

شیب

$$۳y = x + ۲ \overset{\div ۳}{\Rightarrow} y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۲} \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

حال با داشتن شیب $m = \frac{۱}{۳}$ و نقطه ی $(۲,۰)$، معادله ی خط را طبق فرمول $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ می نویسیم:

$$\xrightarrow{m=\frac{۱}{۳}\ \ (۲,۰)} y - ۰ = \frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow ۳y - x + ۲ = ۰$$

ب) نوشتن معادله ی خط با داشتن دو نقطه از آن :

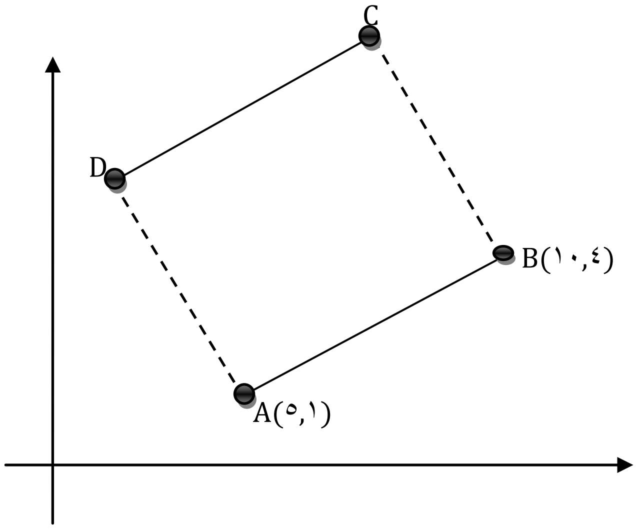
اگر $A = (x_۱, y_۱)$, $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطه از یک خط باشند ابتدا به کمک فرمول $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ شیب خط را بدست می آوریم سپس با انتخاب یکی از نقاط A یا B به دلخواه طبق حالت قبل معادله ی خط را بدست می آوریم.

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = (۱ \text{ و } -۲)$, $B(-۳, -۴)$ بگذرد.

$$\begin{matrix} A = \left(\overset{x_۱}{۱}, \overset{y_۱}{-۲}\right) \\ B\left(\overset{x_۲}{-۳}, \overset{y_۲}{-۴}\right) \end{matrix} \rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{-۴ - (-۲)}{-۳ - ۱} = \frac{-۴ + ۲}{-۴} = -\frac{۲}{-۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - (-۲) = \frac{۱}{۲}(x - ۱) \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۵}{۲}$$

مثال: مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند



الف) شیب خط AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴ - ۱}{۱۰ - ۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - ۱ = \frac{۳}{۵}(x - ۵) \Rightarrow y = \frac{۳}{۵}x - ۲$$

ب)شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را هم بنویسید.

چون ABCD مربع هست پس ضلع AD بر AB عمود هست بنابراین داریم:

$$m_{AD} = -\frac{۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۵}} = -\frac{۵}{۳}$$

بنابراین با داشتن شیب خط AD و یک نقطه از آن (نقطهٔ A) می توانیم معادله خط AD را بنویسیم.

$$\mathrm{y}-\mathrm{y}_{\mathrm{A}}=\mathrm{m}_{AD}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{A}})$$

$$\Rightarrow y-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵)\Rightarrow \mathrm{y}-۱=-\frac{۵}{۳}\mathrm{x}+\frac{۲۵}{۳}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}$$

پ)اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است مختصات راس D را بیابید.

نقطهٔ D در واقع نقطهٔ تقاطع خطوط CD و AD است بنابراین کافیه معادله خط CD رو بدست بیاریم (معادله خط AD رو هم که در قسمت قبل بدست آوردیم) و بعد با تشکیل یک دستگاه ۲ معادله دو مجهول نقطهٔ تقاطع D را بدست بیاریم.

برای به دست آوردن معادله ی خط CD ،چون ضلع CD موازی AB است بنابراین:

$$m_{\mathrm{CD}}=\mathrm{m}_{\mathrm{AB}}=\frac{۳}{۵}$$

اکنون با داشتن شیب خط CD و مختصات نقطهٔ C می تونیم معادلهٔ خط CD رو بنویسیم:

$$\mathrm{y}-\mathrm{y}_{\mathrm{C}}=\mathrm{m}_{\mathrm{CD}}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{C}})\Rightarrow \mathrm{y}-۹=\frac{۳}{۵}(\mathrm{x}-۷)\Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}$$

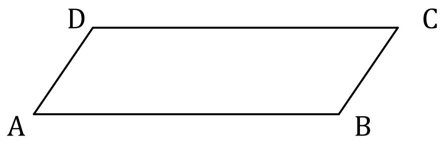
حالا معادلهٔ خطوط CD و AD را در یک دستگاه می نویسیم تا نقطهٔ تقاطع دو خط یعنی نقطهٔ D در بیاد:

$$\begin{cases} y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳} \\ \mathrm{y}=\frac{۳}{۵}\mathrm{x}+\frac{۲۴}{۵} \qquad \times(-۱) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{y}=-\frac{۵}{۳}\mathrm{x}+\frac{۲۸}{۳} \\ -\mathrm{y}=-\frac{۳}{۵}\mathrm{x}-\frac{۲۴}{۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۰=-\frac{۵}{۳}x-\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۸}{۳}-\frac{۲۴}{۵}\ldots\ldots\Rightarrow \mathrm{x}=۲\,,\mathrm{y}=۶\qquad\Rightarrow \mathrm{D}(۲,۶)$$

روش دوم :

نکته :در هرمتوازی الاضلاع می دانیم اندازه ضلع های روبرو باهم برابر است



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B + x_D = x_C + x_A \\ y_B + y_D = y_C + y_A \end{cases}$$

یعنی مجموع طول های **راس های روبرو** باهم برابر است(در مورد عرض ها هم همین طور) مثلا اگر راس های A و Cرو بروی هم و راس های Bو Dروبروی هم باشند داری

$$A + C = D + B \Longrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_D + x_B \\ y_A + y_C = y_D + y_D \end{cases}$$

مربع نوعی متوازی الاضلاع است پس داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۵ + ۷ = x_D + ۱۰ \rightarrow x_D = ۲ \\ ۱ + ۹ = y_D + ۴ \rightarrow y_D = ۶ \end{cases}$$

تست: اگر سه نقطه ی متمایز $A(۱,۱)$ و $B(-۱,-۱)$ و $C(m, m^{۲} + ۲m)$ روی یک خط راست باشند،

آن گاه :

۱) $m = ۰$ ۲) $m = ۰, -۱$ ۳) $m = -۱$ ۴) $m = ۱$

حل)گزینه ی «۱» شرط آن که ۳ نقطه ی A، B و C بر یک خط راست واقع باشند (بر یک استقامت باشند)، این است

که:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

تساوی ۲ جزء از ۳ جزء کافی است.

برای این که سه نقطه ی $A(۱,۱)$, $B(-۱,-۱)$ و $C(m, m^{۲}+۲m)$ روی یک خط راست باشند، باید

$m_{\mathrm{AB}}=\mathrm{m}_{\mathrm{AC}}$ باشد. پس داریم:

$$\Longrightarrow m_{\mathrm{AB}}=\frac{-۱-۱}{-۱-۱}=۱ \text{ و } m_{AC}=\frac{m^{۲}+۲m-۱}{m-۱}$$

$$\xRightarrow{m_{AB}=m_{AC}} \frac{m^{۲}+۲m-۱}{m-۱}=۱ \Longrightarrow m^{۲}+۲m-۱=m-۱ \Longrightarrow m^{۲}+m=۰ \Longrightarrow \begin{cases} m=۰ \\ m=-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

دقت کنیم! نقاط A، B و C متمایزند. به ازای $m=-۱$ مختصات نقطه ی C برابر $C(-۱,-۱)$ می شود.

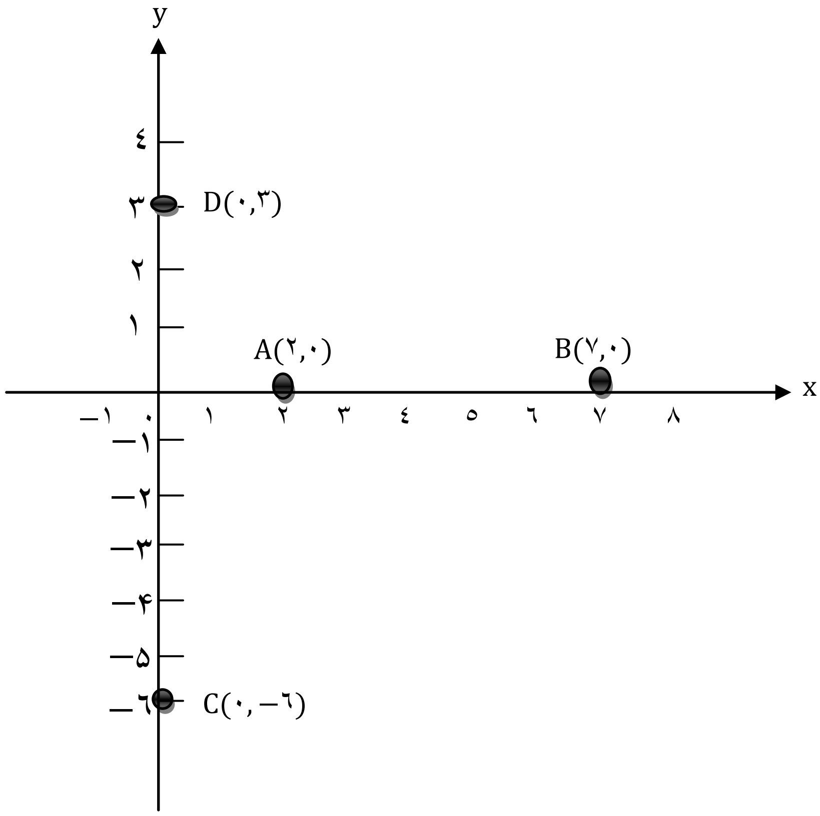
در این حالت دو نقطه ی B و C یکسان بوده و دیگر متمایز نخواهند بود.

روش دوم: معادله ی خط AB را نوشته و سپس مختصات نقطه ی C را در آن صدق می دهیم تا پارامتر m به

دست آید...

فاصلهٔ دو نقطه (طول یک پاره خط)

شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف)فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره خط AB می باشد، برابر ۵ است. چه رابطه ای بین این اعداد با x_A و x_B وجود دارد؟تفاضل طول ها برابر ۵ است پس:

$$BA = |x_A - x_B| = |۲ - ۷| = |-۵| = ۵$$

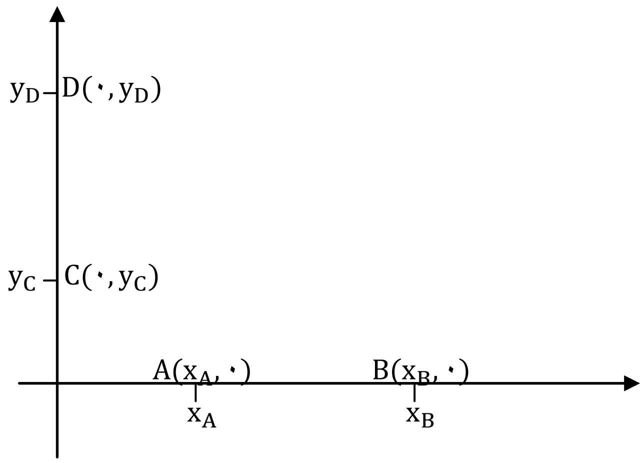
$$AB = |x_B - x_A| = |۷ - ۲| = |۵| = ۵$$

چون طول پاره خط ABبا طول پاره خط BA برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم.

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را بر حسب عرض آنها بیان کنید.

$$DC = |y_D - y_C| = |۳ - (-۶)| = |+۹| = ۹$$

پ)در شکل مقابل فاصلهٔ نقاط A و B را بر حسبب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ Cو D را بر حسب عرض آنها بنویسید.



$$AB = |X_B - X_A| = |X_A - X_B|$$

$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

در حالت کلی می توان گفت :

۱- اگر A و B دو نقطهٔ هم عرض در صفحه باشند، آن گاه $AB = |x_A - x_B|$

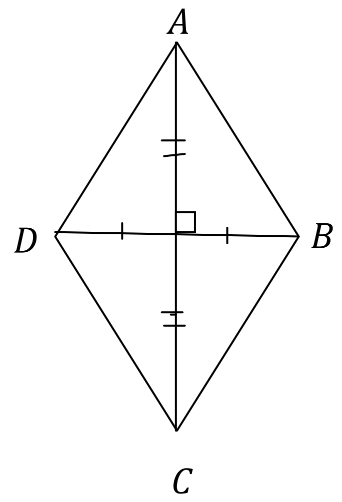
۲- اگر C و D دو نقطهٔ هم طول در صفحه باشند، آن گاه $CD = |y_C - y_D|$

تست: دو نقطه ی $A(۲, -۳)$ و $B(۲, ۱)$ دو انتهای قطر کوچک یک لوزی هستند که قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است. مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

لوزی متوازی الاضلاع است که ۴ ضلع برابر دارد. در لوزی قطرها ، عمود منصف یک دیگرند. مساحت لوزی برابر نصف حاصلضرب دو قطر آن است. یعنی:

$$S = \frac{۱}{۲}(AC \times BC) = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲}$$



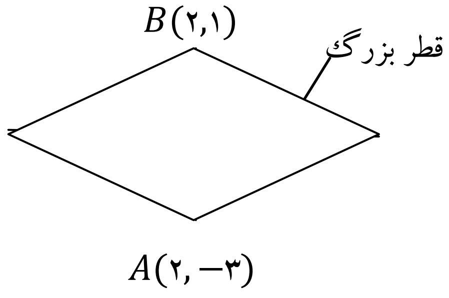
دو نقطه ی $A(۲,-۳)$ و $B(۲,۱)$ دو انتهای قطر کوچک لوزی اند. چون A و B هم طول اند ، فاصله ی آن ها برابر است با:

$$\text{قطر کوچک لوزی}\ AB = |y_B - y_A| = |۱-(-۳)| = ۴$$

چون قطر بزرگ، ۳ برابر قطر کوچک است، در نتیجه داریم:

$$\text{قطر بزرگ لوزی} = ۳ \times \text{قطر کوچک لوزی} = ۳ \times ۴ = ۱۲ \Longrightarrow \text{قطر بزرگ} = ۱۲$$

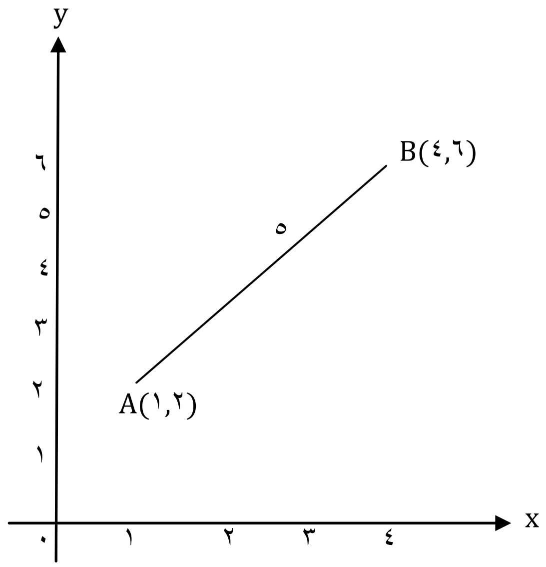
$$\Longrightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲} = \frac{۴\times۱۲}{۲} = ۲۴$$

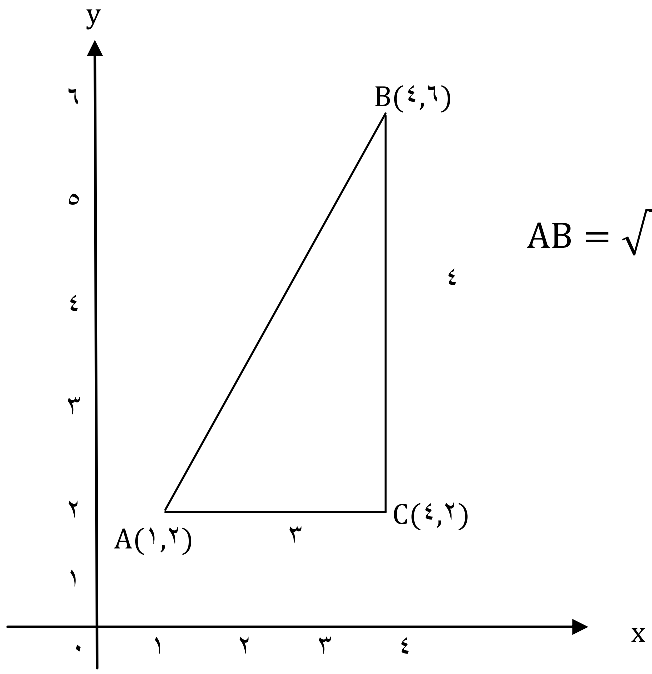


فاصله دو نقطه دلخواه

مثال : در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را بدست آورید؟

ابتدا یک مثلث قائم الزاویه درست می کنیم سپس به کمک رابطه ی فیثاغورس فاصله دو نقطه را بدست می آوریم.

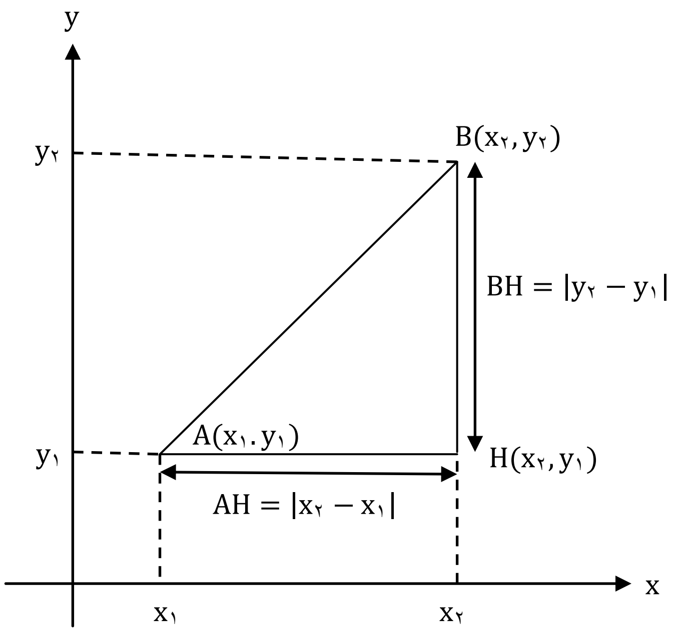




$$AB = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

مطابق شکل زیردر حالت کلی طول پاره خط AB به کمک قضیهٔ فیثاغورس به دست می آید.

.



$$AB = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{|x_۲ - x_۱|^۲ + |y_۲ - y_۱|^۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

نکته : فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$

مثال : نقاط $A(۲,۰)$, $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه محور های مختصات مقابل مشخص کنید.

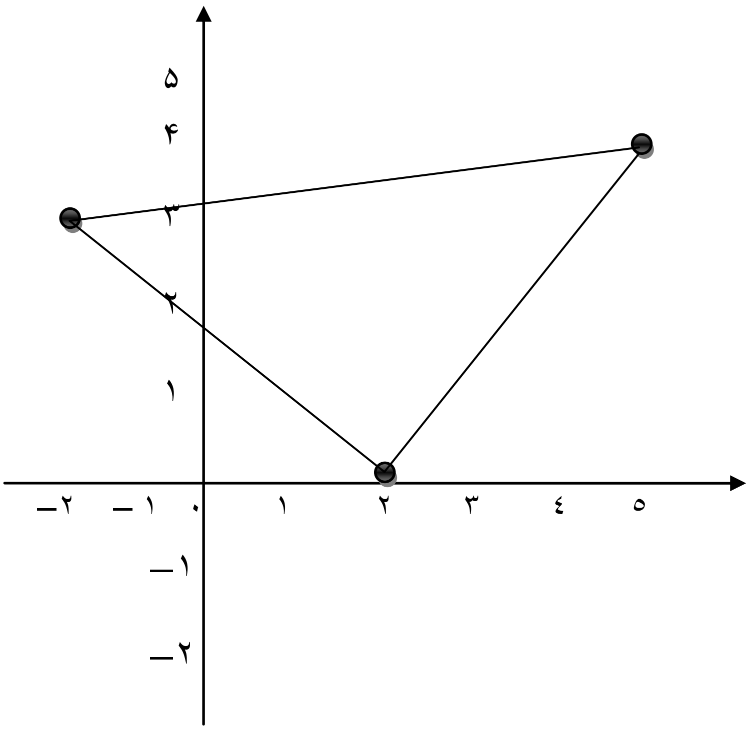
الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۲ - ۵)^۲ + (۰ - ۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۲ + ۲)^۲ + (۰ - ۳)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۵ + ۲)^۲ + (۴ - ۳)^۲} = \sqrt{۴۹ + ۱} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

محیط مثلث : $P = ۵ + ۵ + ۵\sqrt{۲} = ۱۰ + ۵\sqrt{۲}$



ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

وقتی سؤال نوع مثلث را می خواهد ۴ حالت زیر پیش می آید:

۱)اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشد مثلث باشد مثلث متساوی الاضلاع هست.

۲)اگر فقط دو ضلع مثلث با هم برابر باشد مثلث متساوی الساقین هست.

۳)اگر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث برقرار باشد مثلث قائم الزاویه هست.

۴)اگر هر دو حالت ۲ و ۳ برقرار باشد مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هست.

در این سوال چون ضلع AB با ضلع AC برابر است پس مثلث متساوی الساقین است.از طرفی طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می کند:

$$۵^۲ + ۵^۲ = ۲۵ \Longrightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

پس مثلث مثلث قائم الزاویه است.در نتیجه مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هست

پ) به روش دیگر(غیر از فیثاغورس) نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

دو خط گذرنده از پاره خط های AB و AC بر هم عمود هستند زیرا حاصل ضرب شیب این خط ها برابر با -۱ است:

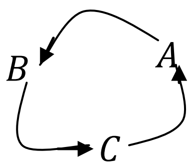
$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳}\quad,\mathrm{m_{AC}}=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=-\frac{۳}{۴}\Longrightarrow \mathrm{m_{AB}}\times \mathrm{m_{AC}}=\frac{۴}{۳}\times-\frac{۳}{۴}=-۱$$

$$\mathrm{S}=\frac{۱}{۲}\times \mathrm{AC}\times \mathrm{AB}\Longrightarrow \mathrm{S}=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵=۱۲/۵$$

مساحت مثلث با داشتن مختصات سه راس آن

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $\mathrm{C(x_C,y_C)}$ سه رأس مثلث باشند، مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}|\ x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$



روشی برای حفظ کردن فرمول بالا

در فرمول مساحت مثلث همیشه $\frac{۱}{۲}$ وجود دارد. کافی است در داخل قدر مطلق سه بار $x(y-y)$ را بنویسیم.

حال رئوس مثلث C روی سیکل پاد ساعتگرد نوشته و این سیکل را یک بار از A، یک بار از B و یک بار از C می خوانیم و اندیس عبارت $x(y-y)$ قرار می دهیم. $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $\mathrm{C}(-۲,۳)$

با داشتن مختصات سه رأس مثلث ABC، از فرمول بالا مساحت مثلث را محاسبه می کنیم. داریم:

$$= \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{۱}{۲}|۲(۴-۳) + ۵(۳-۰) + (-۲)(۰-۴)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|۲ + ۱۵ + ۸| = ۱۲/۵$$

مثال : نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱,۲)$, $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \\ AC &= \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow AB = AC$$

$$m_{AB} = \frac{۵-۲}{۲-۱} = ۳, m_{AC} = \frac{۱-۲}{۴-۱} = -\frac{۱}{۳}$$

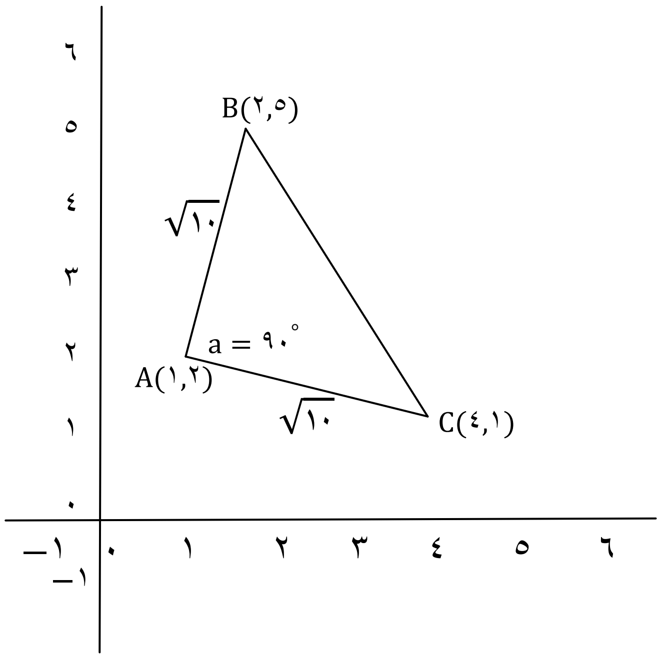
راه اول:

$$m_{AB} \times m_{AC} = ۳ \times -\frac{۱}{۳} = -۱$$

راه دوم:

$$BC = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰}$$

$$(\sqrt{۱۰})^۲ + (\sqrt{۱۰})^۲ = (\sqrt{۲۰})^۲ \Longrightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$



تست : سه نقطه ی $A(۰,-۱)$ و $B(۳,۱)$ و $C(۲,-۴)$ سه رأس یک مثلث اند. این مثلث همواره چگونه است؟

۱) متساوی الاضلاع است. ۲) متساوی الساقین است ولی قائم الزاویه نیست.

۲) قائم الزاویه و متساوی الساقین است. ۴) قائم الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست.

حل) گزینه ی «۳»: ابتدا اندازه ی اضلاع مثلث ABC را با داشتن مختصات رئوس آن تعیین می کنیم. داریم:

$$\mathrm{A}(۰,-۱),\mathrm{B}(۳,۱),\mathrm{C}(۲,-۴)\rightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}, AC=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}$$

$$,\mathrm{BC}=\sqrt{۱^۲+۵^۲}=\sqrt{۲۶}$$

چون دو ضلع AB و AC برابرند، مثلث متساوی الساقین است (AB و AC ساق مثلث هستند). حال برای بررسی قائم الزاویه بودن این مثلث تنها کافی است رابطه ی فیثاغورس را بین اضلاع مثلث کنترل کنیم. مشخص است که بزرگترین ضلع، وتر است . داریم:

$$\mathrm{AB}=\sqrt{۱۳},\mathrm{AC}=\sqrt{۱۳},\mathrm{BC}=\sqrt{۲۶}\Longrightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲\Longrightarrow(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۱۳})^۲$$

$$=(\sqrt{۲۶})^۲\Longrightarrow ۱۳+۱۳=۲۶$$

رابطه ی فیثاغورس بین اندازه ی اضلاع مثلث برقرار است. پس مثلث علاوه بر این که متساوی الساقین است، قائم الزاویه نیز خواهد بود. به زبان ساده مثلث ABC، قائم الزاویه ی متساوی الساقین است.

تست : نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۴,۲)$ و $C(a,-a)$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی الساقین است.

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل)گزینه ی «۴» می دانیم نقاط $A(۱,۰)$, $B(۴,۲)$ و $C(a,-a)$ سه رأس مثلث ABC هستند. چون مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی الساقین است، پس باید بین اضلاع آن رابطه ی فیثاغورس برقرار بوده و $AB = AC$ باشد. برای برقراری رابطه ی فیثاغورس تنها باید به این نکته توجه کنیم که کدام ضلع را به عنوان وتر انتخاب نماییم. چون این مثلث در رأس A قائمه است، لذا ضلع وبه رو به این زاویه، یعنی ضلع BC، نقش وتر را ایفا می کند. پس می نویسیم:

$$AB = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱۳}, AC = \sqrt{(a-۱)^۲ + a^۲}, BC = \sqrt{(a-۴)^۲ + (a+۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه ی فیثاغورس را برقرار می کنیم}} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Longrightarrow (a-۴)^۲ + (a+۲)^۲$$

$$= ۱۳ + (a-۱)^۲ + a^۲ \Longrightarrow ۲a^۲ - ۴a + ۲۰ = ۲a^۲ - ۲a + ۱۴ \Longrightarrow ۲a = ۶ \Longrightarrow a = ۳$$

با معلوم شدن مقدار a، احتیاجی به برقراری شرط $AB = BC$ نیست. اما اگر یکی از گزینه ها می گفت که به ازای هیچ مقدار a، مثلث ABC قائم الزاویه ی متساوی الساقین نیست، آن وقت باید بررسی می کردیم که آیا به ازای $a = ۳$، شرط $AB = AC$ برقرار است یا نه.

روش دوم: می توانیم مسأله را با شرط متساوی الساقین بودن حل کنیم، یعنی $AB = AC$ را برقرار سازیم

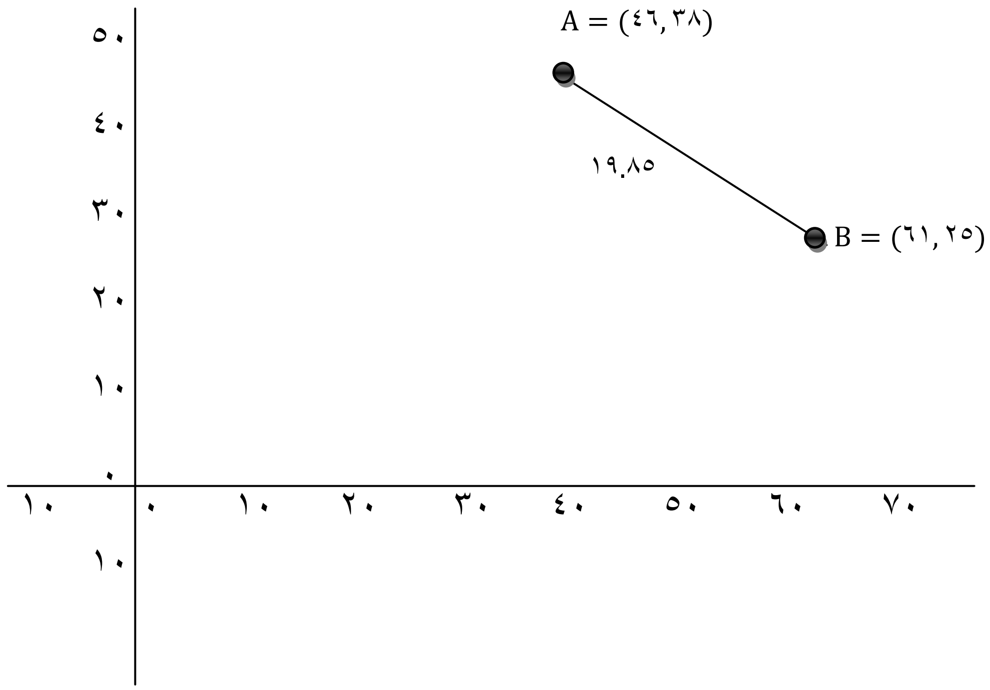
مثال : طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است که به طور خلاصه می توان موقعیت این شهر را به صورت (۴۶,۳۸) نشان داد. این اطلاعات در مورد چابهار به صورت (۶۱, ۲۵) می باشد. با فرض این که مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ مستقیم این دو شهر.

$$AB = \sqrt{(۶۱-۴۶)^۲ + (۲۵-۳۸)^۲} = \sqrt{۲۲۵ + ۱۶۹} = \sqrt{۳۹۴} \cong ۱۹ / ۸۵$$

$$۱۱۰ \times ۱۹/۸۵ = ۲۱۸۳ / ۵$$

$$AB = \sqrt{(٦١ \times ١١٠ - ٤٦ \times ١١٠)^٢ + (٢٥ \times ١١٠ - ٣٨ \times ١١٠)^٢}$$

$$= \sqrt{(١١٠)^٢ \times ٢٢٥ + (١١٠)^٢ \times ١٦٩} = ١١٠ \times \sqrt{٣٩٤} \cong ١١٠ \times ١٩/٨٥ = ٢١٨٣ / ٥$$



مثال: در یکی از جاده های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(٥٠,٣٠)$ است. نزدیک ترین پایگاه های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(١٠,-٢٠)$ و $B(٨٠,٩٠)$ واقع اند . شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید؟ (اعداد بر حسب کیلو متر هستند).

$$PA = \sqrt{(x_A - x_P)^٢ + (y_A - y_P)^٢} = \sqrt{(٥٠ - ١٠)^٢ + (٣٠ -- ٢٠)^٢}$$

$$= \sqrt{١٦٠٠ + ٢٥٠٠} = \sqrt{٤١٠٠} = ١٠\sqrt{٤١}$$

$$PB = \sqrt{(x_B - x_P)^٢ + (y_B - y_P)^٢} = \sqrt{(٥٠ - ٨٠)^٢ + (٣٠ - ٩٠)^٢} = \sqrt{٩٠٠ + ٣٦٠٠}$$

$$= \sqrt{٤٥٠٠} = ١٠\sqrt{٤٥}$$

$PB > PA$

پایگاه A را پیشنهاد می دهیم . چون فاصله ی آن تا نقطه ی تصادف کمتر است.

تست: طول نقطه ی M واقع بر محور طول ها که از دو نقطه ی $B(-۲,۳)$ و $C(۴,-۱)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

حل) گزینه ی «۳» :نقطه ی M روی محور طول هاست. پس در مختصات آن مؤلفه ی دوم حتماَ صفر است.

حال چون فاصله ی $M(x,۰)$ از نقطه ی $B(-۲,۳)$ و $C(۴,-۱)$ برابر است، کافی است فاصله ی M را تا B و C محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم. داریم:

$$\left.\begin{aligned} BM &= \sqrt{(x+۲)^۲ + ۳^۲} = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۱۳} \\ CM &= \sqrt{(x-۴)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۱۷} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{BM=CM} \sqrt{x^۲ + ۴x + ۱۳} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۱۷}$$

$$\xRightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^۲ + ۴x + ۱۳ = x^۲ - ۸x + ۱۷ \Rightarrow ۱۲x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

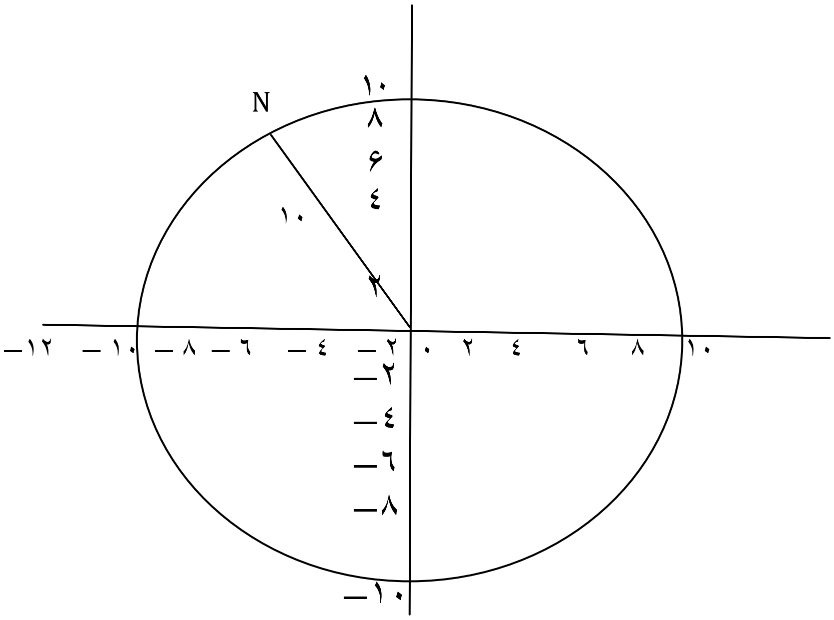
$$OE = \sqrt{(x_E - x_O)^۲ + (y_E - y_O)^۲} = \sqrt{(x_۱ - ۰)^۲ + (y_۱ - ۰)^۲} = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲} \Rightarrow$$

$$OE = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$$

به طور کلی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ مختصات باربراست با:

$$OA = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$$

مثال الف) دایره ای به مرکز مبدأ مختصات، از نقطهٔ $N(-۶,۸)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید.



$$ON = \sqrt{(x_N - x_O)^۲ + (y_N - y_O)^۲} = \sqrt{(-۶-۰)^۲ + (۸-۰)^۲} = \sqrt{۳۶+۶۴}$$
$$= \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

تست: نقطه ی $A(۳,a)$ بالای محور x هاست و فاصله ی آن از مرکز مختصات برابر ۵ می باشد. A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) -۲

حل) گزینه ی «۲»

نکته : اگر نقطه ای بالای محور x ها باشد، عرض آن مثبت و اگر پایین محور x ها باشد عرض آن منفی است.

چون نقطه ی $A(۳,a)$ بالای محور x هاست، نتیجه می گیریم $a > ۰$ است. می دانیم فاصله ی نقطه ی A از مرکز مختصات برابر ۵ است. پس کافی است ابتدا با استفاده از فرمول $OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲}$ اندازه ی OA را محاسبه کرده و سپس برابر ۵ قرار دهیم. داریم:

$$A(۳,a) \Rightarrow OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲} = \sqrt{۳^۲ + a^۲} = \sqrt{۹ + a^۲}$$

$$OA = ۵ \Longrightarrow \sqrt{۹ + a^۲} = ۵ \Longrightarrow ۹ + a^۲ = ۲۵ \Longrightarrow a^۲ = ۱۶ \Longrightarrow a = \pm ۴$$

چون قبلاً به این نتیجه رسیدیم که $a > ۰$ است، تنها $a = ۴$ را قبول می کنیم. در نتیجه گزینه ی ۲ صحیح است.

تست: خطی که از نقاط $(۱, -۱)$ و $(۲,۲)$ می گذرد، با محور های مختصات چه مساحتی می سازد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

ابتدا معادله ی خط AB را مشخص می کنیم:

$$A(-۱,-۱) - B(۲,-۲) \Longrightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲ - ۱}{۲ - (-۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی خط } m=\frac{۱}{۳}, A(-۱,۱)} y - ۱ = \frac{۱}{۳}\big(x - (-۱)\big) \Longrightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳}$$

حال برای محاسبه ی مساحت مثلثی که خط $y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳}$ با محورهای مختصات می سازد، کافی است طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن را مشخص کرده و از رابطه ی $S = \frac{۱}{۲}\left|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}\right|$ استفاده نماییم. می نویسیم:

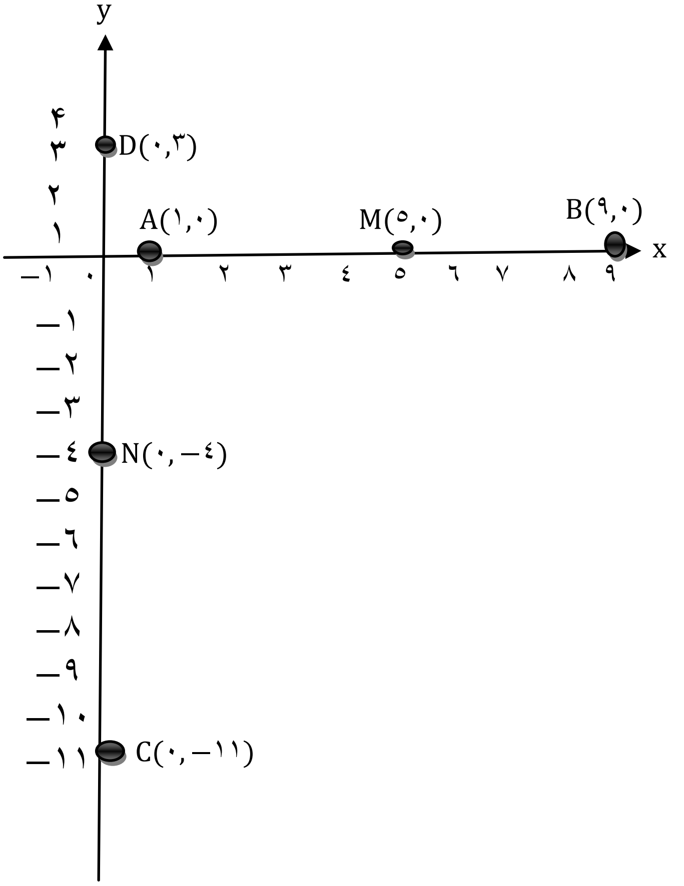
$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} \xrightarrow{y=۰} \text{طول از مبدأ} : x = -۴ \\ y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} \xrightarrow{x=۰} \text{عرض از مبدأ} : y = \frac{۴}{۳} \end{array}\right\} \Longrightarrow S = \frac{۱}{۲}\left|(-۴)\left(\frac{۴}{۳}\right)\right| = \frac{۸}{۳}$$

مختصات نقطهٔ وسط پار خط:

شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره خط AB را M بنامید . M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



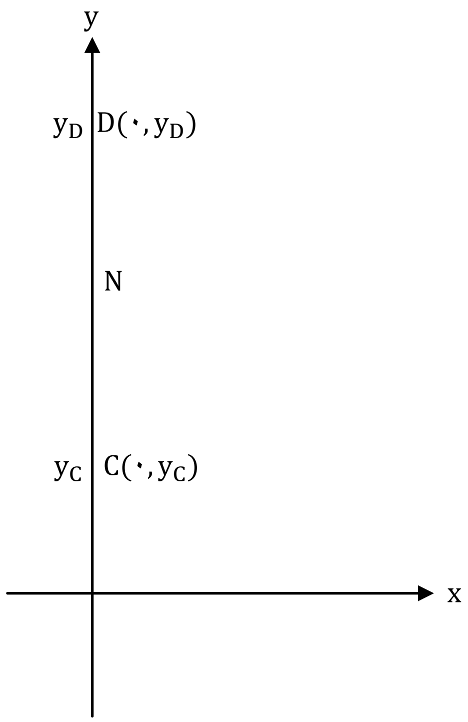
پ)مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند . اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

M وسط AB $\Longrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{MB} \Longrightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$

$$\Longrightarrow ۲x_M = x_A + x_B \Longrightarrow \mathrm{x_M} = \frac{\mathrm{x_A} + \mathrm{x_B}}{۲}$$

در این قسمت اشاره به این که همیشه x انتهای منهای x ابتدا می شود ضروری به نظر می رسد.

ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور y ها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

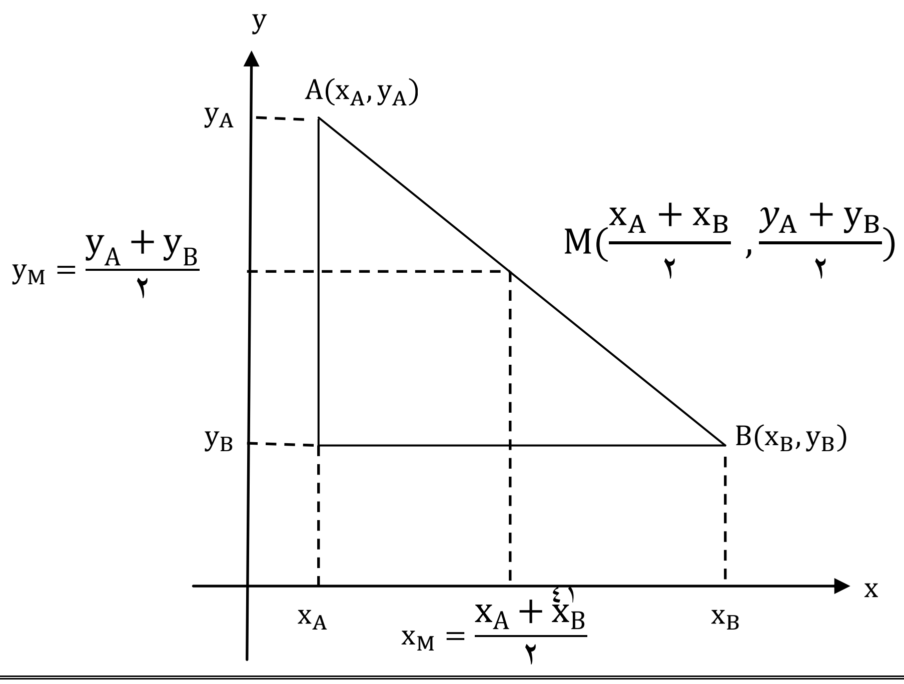


N وسط CD $\Longrightarrow CN = ND$

$$\Longrightarrow \mathrm{y_N} - \mathrm{y_C} = \mathrm{y_D} - \mathrm{y_N}$$

$$\Longrightarrow ۲y_N = y_C + y_D \Longrightarrow \mathrm{y_N} = \frac{y_C + y_D}{۲}$$

ث) A و B را دو نقطهٔ دلخواه در صفحه مختصات در نظر بگیرید به طوری که M وسط AB باشد. با توجه به شکل ، مختصات M را بنویسید.



مختصات نقطهٔ وسط پاره خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$.

مثال : مثلث با رئوس $A(۱,۹)$, $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محور های مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید. $M=\left(\frac{۳+۷}{۲},\frac{۱+۱۱}{۲}\right)=(۵,۶)$

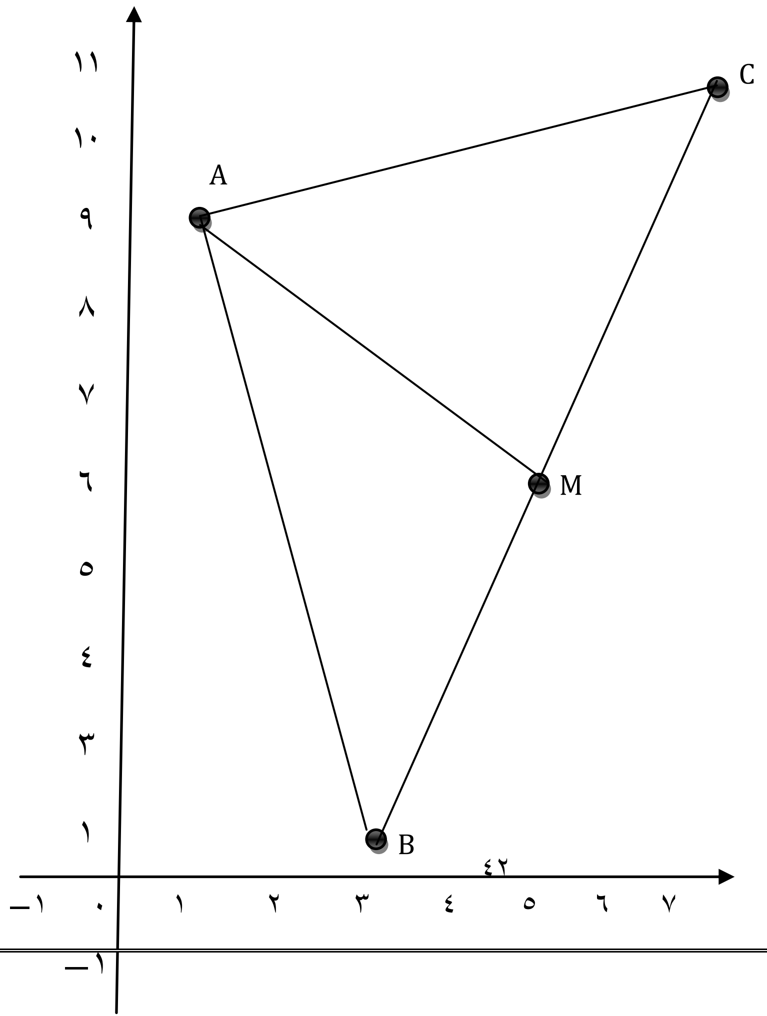
ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

تعریف میانه: پاره خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می کند

$$AM=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۶-۹)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

پ)معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

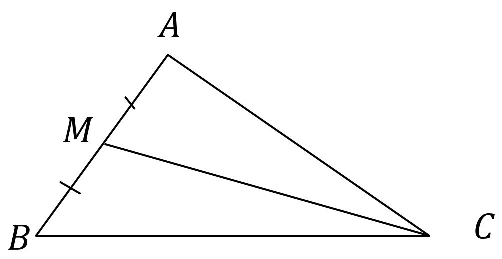
$$m_{AM}=\frac{۹-۶}{۱-۵}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow y-۶=-\frac{۳}{۴}(x-۵)\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳۹}{۴},۳x+۴y=۳۹$$



تست: نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۱)$ و $C(-۱,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه ی CM چه قدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۴   ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

حل) گزینه ۱: برای محاسبه ی طول میانه ی CM، ابتدا مختصات M (وسط پاره خط AB) را به دست می آوریم. سپس با داشتن مختصات دو نقطه ی C و M ، طول پاره خط CM (میانه ی CM) را مشخص می کنیم . می نویسیم:



$$A(۲,-۱), B(۰,۱) \Rightarrow AB \text{ وسط } M = \frac{A+B}{۲} = (۱,۰) \Rightarrow M(۱,۰)$$

$$C(-۱,۱), M(۱,۰) \Rightarrow \text{ میانه } CM = \sqrt{۲^۲+۱^۲} = \sqrt{۵}$$

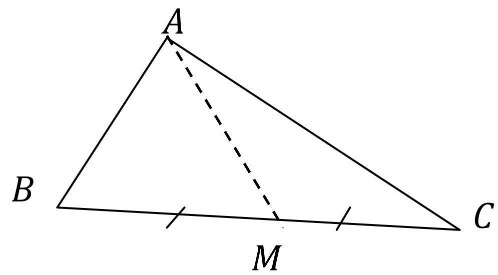
تست : معادله ی میانه ی AM در مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(۱,۰)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۲,۲)$ باشد، کدام است؟

۱) $y=-x+۱$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=x+۲$ ۴) $y=x-۱$

حل) گزینه ی «۴» برای نوشتن معادله ی میانه ی AM در مثلث ABC، باید مختصات A و M را داشته باشیم. مختصات $A(۱,۰)$ است و برای تعیین مختصات نقطه ی M ، کافی است به این نکته دقت کنیم که M وسط BC است. حال با استفاده از رابطه ی $M=\frac{B+C}{۲}$، داریم:

$A(۱,۰)$ و $M = \frac{B+C}{۲} = (\frac{۲+۲}{۲},\frac{۰+۲}{۲}) \Longrightarrow M(۲,۱) \xrightarrow{\text{شیب}} m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۱-۰}{۲-۱} = ۱$

$\xrightarrow{AM \text{ معادله ی میانه ی } m=۱, A(۱,۰)} y - ۰ = ۱(x-۱) \Longrightarrow y = x - ۱$



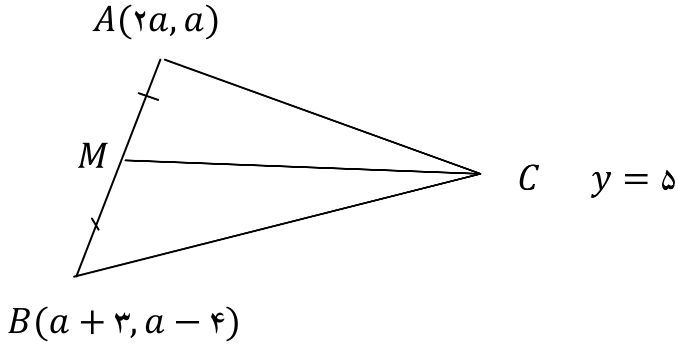
تست: دو نقطه ی $A(۲a,a)$ و $B(a+۳,a-۴)$ دو رأس از مثلثی هستند. میانه ی نظیر رأس C منطبق بر خط $y=۵$ می باشد مختصات وسط AB کدام است؟

۱) ۷   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۲

حل) گزینه «۴»: چون میانه ی نظیر رأس C روی خط $y=۵$ است، نتیجه می گیریم M نیز عرضی برابر ۵ دارد، یعنی $y_M = ۵$ پس می نویسیم:

$$AB \text{ وسط } M = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۳a+۳}{۲}, \underbrace{\frac{۲a-۴}{۲}}_{a-۲}\right) \Longrightarrow y_M = ۵ \Longrightarrow a-۲=۵ \Longrightarrow a=۷ \rightarrow$$

$$M\left(\frac{۳a+۳}{۲}, a-۲\right) = (۱۲,۵)$$



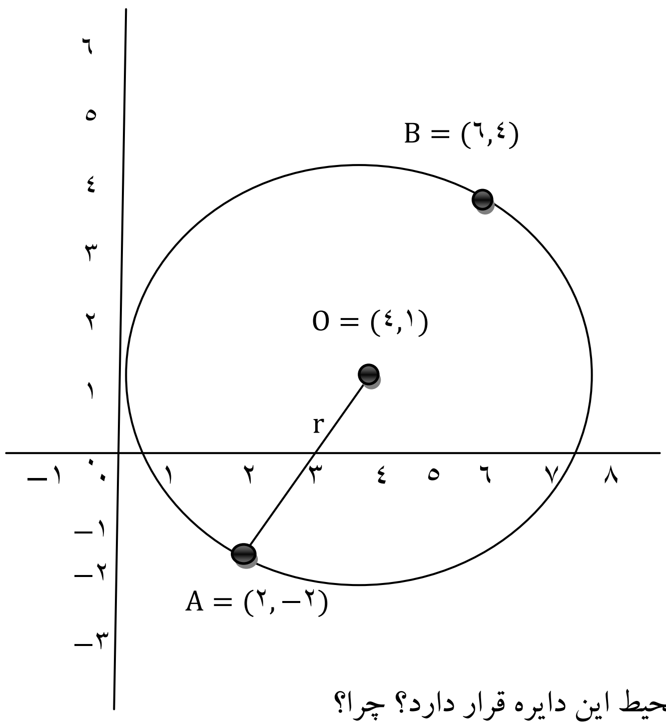
مثال :دو انتهای یکی از قطر های دایره ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $\mathrm{B}(۶,۴)$ هستند.

الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط AB است:

$$\mathrm{O}(\frac{۲+۶}{۲},\frac{۴-۲}{۲}) \Longrightarrow \mathrm{O}(۴,۱)$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{OA} = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱+۲)^۲} = \sqrt{۱۳}$$



ب) آیا نقطهٔ $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

اگر نقطه ی C روی دایره باشد باید OC نیز برابر با طول شعاع دایره باشد:

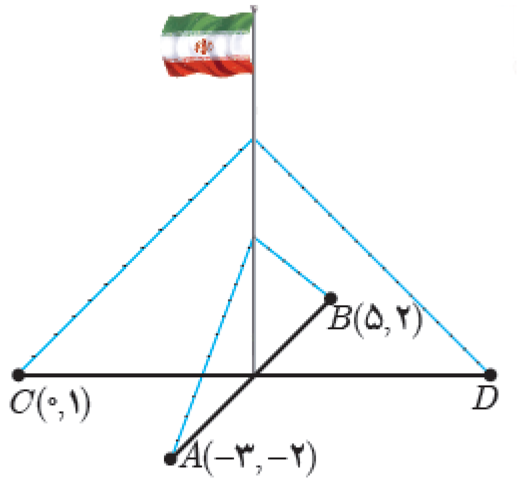
$$\mathrm{OC} = \sqrt{(۴-۷)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

مثال : یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به دست آورید.

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\Longrightarrow \mathrm{O}\left(\frac{-۳+۵}{۲},\frac{۲-۲}{۲}\right)\Longrightarrow \mathrm{O}(۱,۰)$$

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OD}\Longrightarrow \mathrm{x_D}=۲x_\mathrm{O}-\mathrm{x_C}\Longrightarrow \mathrm{x_D}=۲-۰=۲$$

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OD}\Longrightarrow \mathrm{y_D}=۲y_\mathrm{O}-\mathrm{y_C}\Longrightarrow \mathrm{y_D}=۰-۱=-۱$$



مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشندوداشته باشیم $P(a,b)$ و $Q(b,a)$ ، نشان دهید نقطهٔ وسط پاره خط PQ همیشه بر روی خط $y=x$ واقع است.

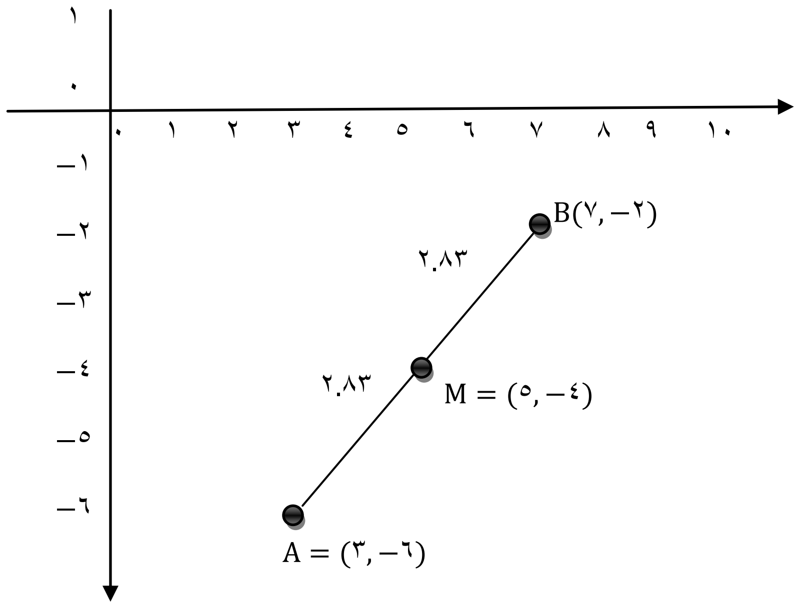
اگر M وسط PQ باشد مختصات آن به صورت $\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{a+b}}{۲},\frac{\mathrm{b+a}}{۲}\right)$ است که دارای طول و عرض برابر است و چون هر نقطه روی خط $\mathrm{y}=\mathrm{x}$ دارای طول و عرض برابر می باشد پس نقطه M حتما روی خط $y=x$ قرار دارد.

مثال : الف) نقطهٔ $M(۵,-۴)$ وسط پاره خط و اصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات A را بیابید.

چون M وسط پاره خط AB است پس داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Longrightarrow ۵ = \frac{x_A + ۷}{۲} \Longrightarrow x_A = ۳$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Longrightarrow -۴ = \frac{y_A + (-۲)}{۲} \Longrightarrow y_A = -۶$$



مثال : نقاط $A(۲,۳)$، $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می توانید راه حل کوتاه تری برای مسأله ارائه کنید؟)

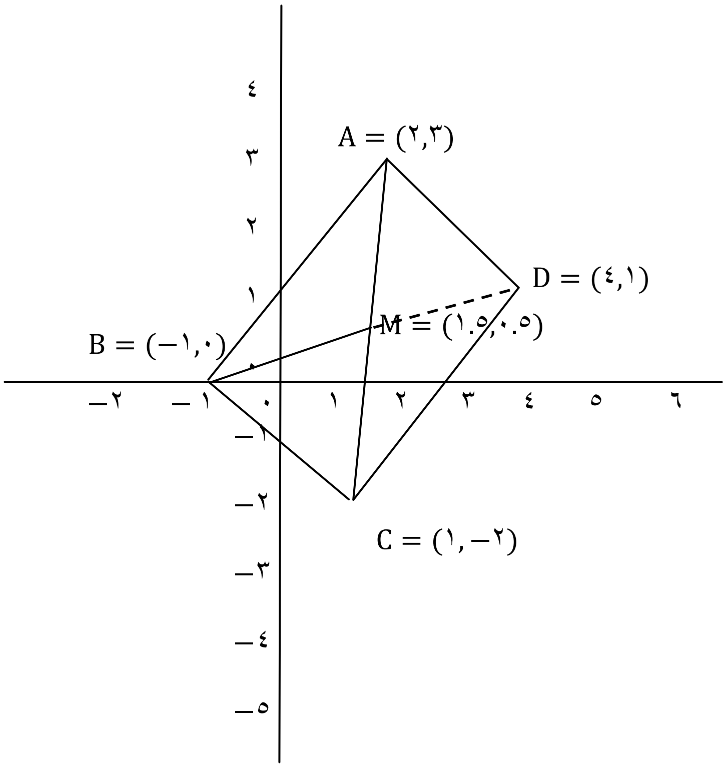
محل برخورد قطرها را M می نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط AC به دست می آوریم. حالا می دانیم که نقطه ی M وسط قطر دیگر هم هست.

باز به کمک فرمول می توانیم مختصات رأس چهارم (D) را بیابیم.

$$MA = MC \Rightarrow M(\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۳+(-۲)}{۲}) \Rightarrow M(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

$$MB = MD \Rightarrow x_D = ۲x_M - x_B \Rightarrow x_D = ۲ \times \frac{۳}{۲} - (-۱) = ٤$$

$$\Rightarrow y_D = ۲y_M - y_B \Rightarrow y_D = ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۰ = ۱ \Rightarrow D(٤,۱)$$



راه کوتاه تر:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - ۲ = ۲ \Rightarrow x_D = ٤ \\ y_D - ۳ = -۲ \Rightarrow y_D = ۱ \end{cases} \Rightarrow D(٤,۱)$$

تست : نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۵,۲)$ و $C\left(-۲ \text{ و } ۵\right)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

۱) -۳	۲) -۵	۳) -۱	۴) ۱

حل)گزینه ی «۱» اگر رأس چهار مربع را با D نمایش دهیم، با تجسم شکل مربع در دستگاه مختصات پی می بریم رئوس A و B روبه روی هم اند و C وD نیز رئوس روبه روی هم اند. و بین مختصات رئوس آن رابطه ی زیر برقرار است:

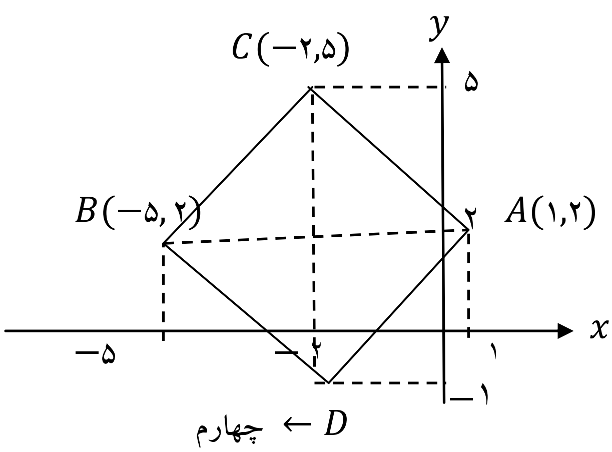
$$A + B = C + D \Longrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Longrightarrow ۱ + (-۵) = -۲ + x_D \Longrightarrow x_D = -۲ \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Longrightarrow ۲ + ۲ = ۵ + y_D \Longrightarrow y_D = -۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس چهارم}} D(-۲, -۱) \xrightarrow{\text{مجموع طول و عرض رأس چهارم}} x_D + y_D = -۲ + (-۱) = -۳$$

مراقب باشیم ! پی بردن به این نکته که رئوس رو به روی هم کدام اند، براب نوشتن رابطه ی بالا الزامی است.

این فکر غلط است که طراح همواره C, B, A و D را رئوس متوالی مربع در نظر بگیرد. پس برای دریافتن حقیقت موضوع، تجسم مختصات رئوس داده شده در دستگاه مختصات تنها راهی است که پیش روی ماست.

به زبان ساده، در هر مربع مجموع مختصات رئوس روبروی هم برابرند.



تست: نقاط $A(۶,۲)$ و $B(۵,۵)$ و $C(۶,۸)$ سه رأس یک لوزی هستند، مساحت لوزی چه قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

حل) گزینه ی «۱» ابتدا با داشتن مختصات سه رأس A و B و C ، مختصات رأس چهارم لوزی، یعنی D را مشخص می کنیم. با توجه به شکل $AB = BC$ می باشد، پس A و C مقابل هم و B و D نیز مقابل یک دیگرندو داریم:

$$\mathrm{A + C = B + D} \Longrightarrow \begin{cases} ۶ + ۶ = ۵ + x_D \Longrightarrow x_D = ۷ \\ ۲ + ۸ = ۵ + y_D \Longrightarrow y_D = ۵ \end{cases} \Longrightarrow D(۷,۵)$$

حال اندازه ی دو قطر AC و BC را با استفاده از فرمول طول پاره خط به دست آورده و سپس مساحت لوزی را محاسبه می کنیم:

A و C هم طول $\rightarrow$ قطر اول $AC = |y_C - y_A| = |۸ - ۲| = ۶$

B و D هم عرض $\rightarrow$ قطر دوم $BD = |x_D - x_B| = |۷ - ۵| = ۲$

$$= \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲} = \frac{۶ \times ۲}{۲} = ۶$$

تست: یک رأس از متوازی الاضلاع نقطه ی $A(۷,۹)$ و معادله های دو ضلع آن $۲y = x + ۳$ و $\mathrm{y = ۳x + ۴}$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟

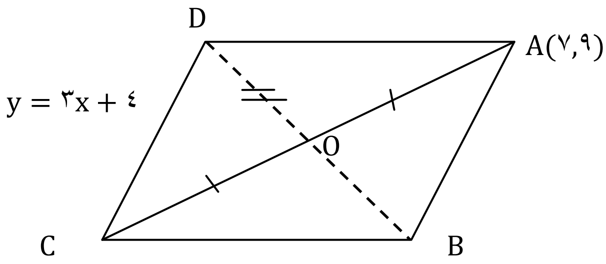
۱) $(۲,۴)$ ۲) $(۳,۲)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۵)$

حل) گزینه ی «۳» در این تست ، رأس $A(۷,۹)$ در معادله ی دو ضلع متوازی الاضلاع صدق نمی کند. پس معادله ی دو ضلع $۲y = x + ۳$ و $y = ۳x + ۴$، مربوط به اضلاع BC و CD است. اگر معادله ی آن ها را با هم قطع دهیم، مختصات رأس C (رأس مقابل A) به دست می آید. داریم:

$$\begin{cases} ۲y = x + ۳ \\ y = ۳x + ۴ \end{cases} \Rightarrow x = -۱, y = ۱ \Rightarrow C(-۱,۱)$$

با داشتن مختصات دو رأس مقابل A و C ، وسط قطر AC یا همان محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع به دست می آید . داریم:

$$A(۷,۹), C(-۱,۱) \Rightarrow O = \frac{A+C}{۲} = (۳,۵)$$



مثال : دو نقطهٔ $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

فرض کنیم نقطه ی M وسط پاره خط AB باشد . پس

$$M\left(\frac{۱۴+۱۰}{۲}, \frac{۳-۱۳}{۲}\right) \Rightarrow M(۱۲,-۵)$$

فاصله ی مبدأ از نقطه ی M:

$$OM = \sqrt{۱۲^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = ۱۳$$

ب) معادلهٔ عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

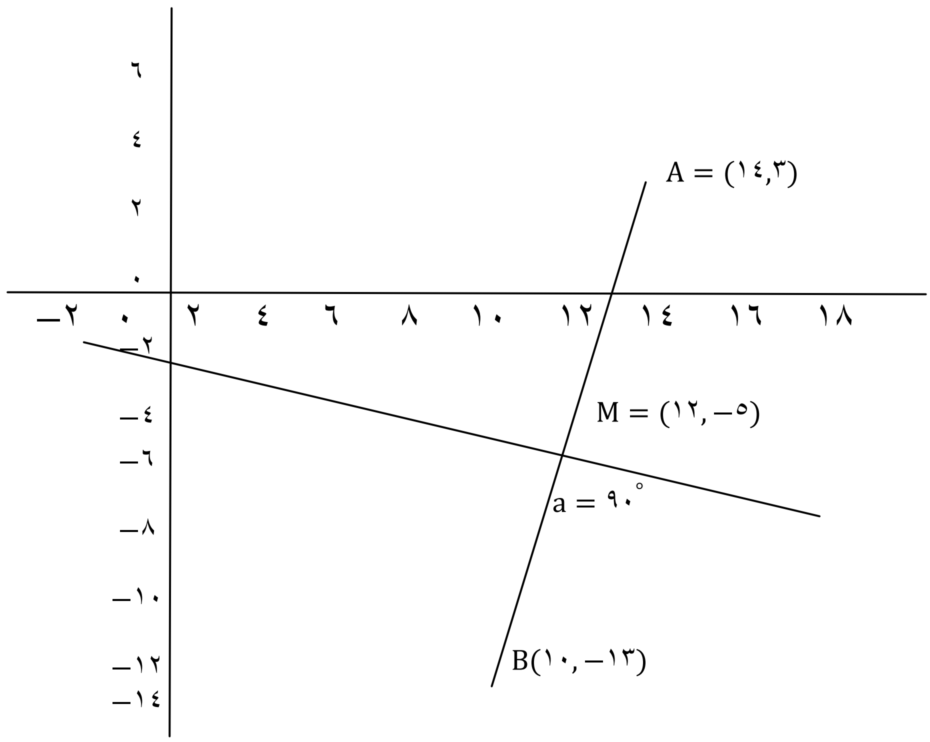
مرحله۱– شیب پاره خط AB را به دست می آوریم

مرحله ۲- شیب عمودمنصف عکس و قرینه شیب AB است

مرحله ۳- باداشتن یک نقطه از عمود منصف یعنی نقطه M وشیب آن معادله ی خط عمود منصف را با استفاده از فرمول $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ به دست می آوریم:

$$m_{AB} = \frac{۳ - (-۱۳)}{۱۴ - ۱۰} = ۴ \Rightarrow m' = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow y - (-۵) = -\frac{۱}{۴}(x - ۱۲)$$

$$\Rightarrow ۴y + ۲۰ = -x + ۱۲ \Rightarrow x + ۴y + ۸ = ۰$$



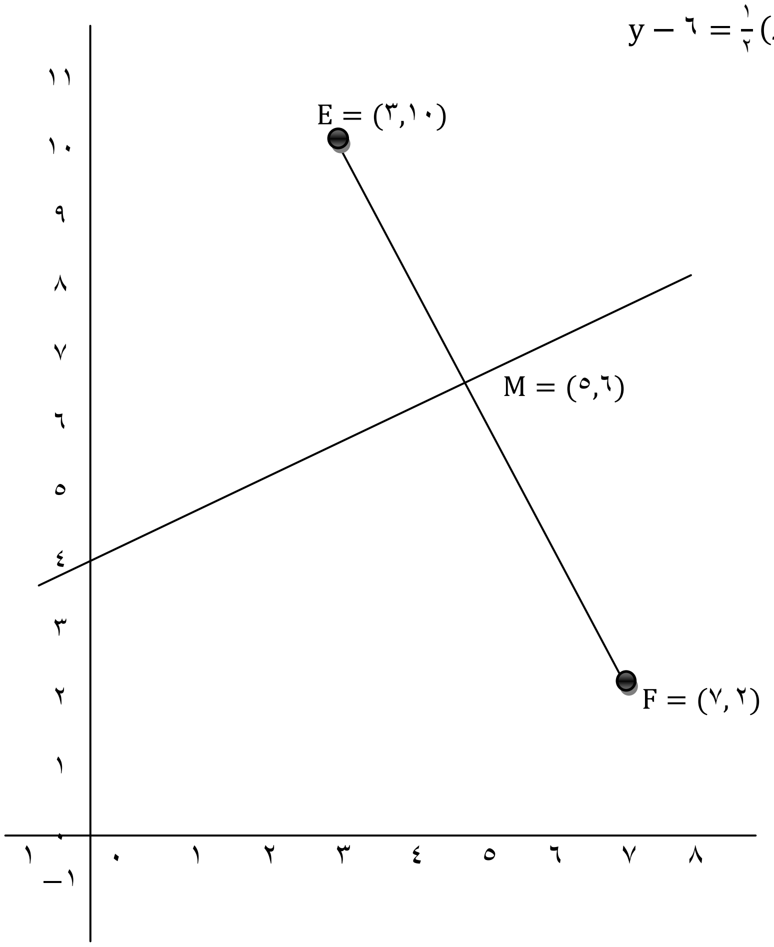
مثال : یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آنها در نقشهٔ ادارهٔ آموزش و پرورش به صورت $E(۳,۱۰)$ و $F(۷,۲)$ است. هدف آن است که هر دانش آموز در نزدیک ترین مدرسه نسبت به خانهٔ خود ثبت نام کند. معادلهٔ خطی را بنویسید که روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم کند.

این خط باید عمود منصف پاره خط EF باشد. ابتدا شیب خط گذرنده از EF را به دست می آوریم. شیب خط عمود بر آن را حساب می کنیم. سپس مختصات وسط پاره خط EF را به دست می آوریم. و معادله ی خط عمود منصف را می نویسیم.

$$m_{\mathrm{EF}} = \frac{۲ - ۱۰}{۷ - ۳} = -\frac{۸}{٤} = -۲ \Rightarrow \mathrm{m}' = \frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{m}\left(\frac{۷ + ۳}{۲}, \frac{۱۰ + ۲}{۲}\right) = (٦ \text{ و } ٥)$$

$$\mathrm{y} - ٦ = \frac{۱}{۲}(x - ٥) \Rightarrow \mathrm{x} - ۲y + ۷ = ۰$$



مثال : نقاط $O(۰,۰)$ و $A(۴,۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی الاضلاع هستند . مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

راس سوم را B در نظر می گیریم می دانیم که رأس سوم روی عمود منصف پاره خط OA قرار دارد. به طوری که فاصله ی آن تا دو نقطه ی O و A به یک اندازه است: $\mathrm{OB} = \mathrm{AB} = ٤$

$$\mathrm{OB} = \sqrt{{x_B}^۲ + {y_B}^۲} = ٤ \ , \mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - ٤)^۲ + (y_B - ۰)^۲} = ٤$$

$$\begin{cases} {\mathrm{x_B}}^۲ + {y_B}^۲ = ١٦ \\ (x_B - ٤)^۲ + {y_B}^۲ = ١٦ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} {\mathrm{x_B}}^۲ + {y_B}^۲ = ١٦ \\ {x_B}^۲ - ۸x_\mathrm{B} + ١٦ + {\mathrm{y_B}}^۲ = ١٦ \end{cases}$$

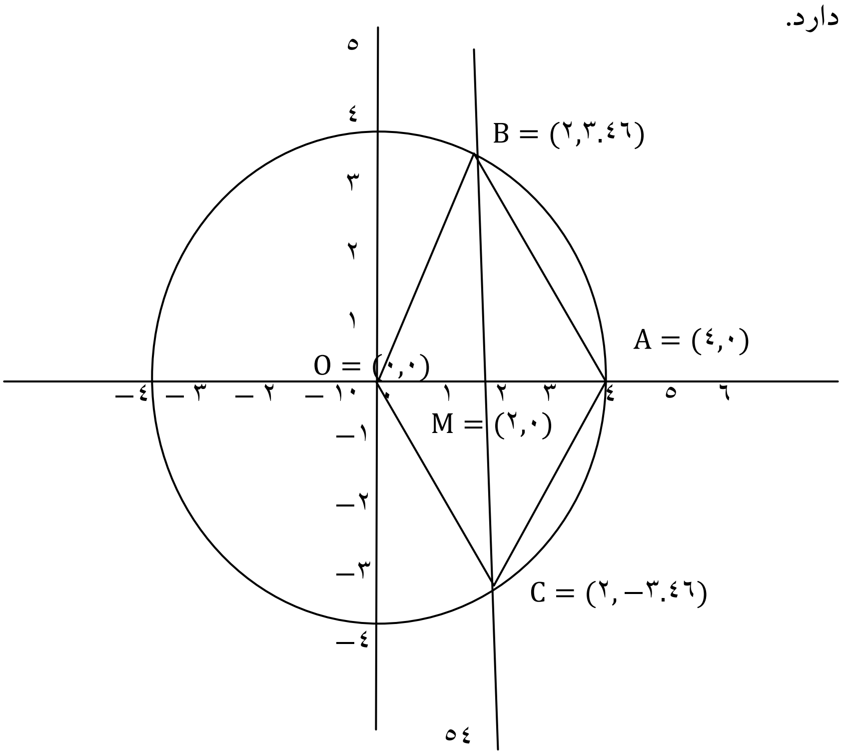
$$\Longrightarrow \begin{cases} -{x_B}^۲ - {y_B}^۲ = -١٦ \\ {\mathrm{x_B}}^۲ - ۸\mathrm{x_B} + {\mathrm{y_B}}^۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow -۸x_B = -١٦ \Longrightarrow \mathrm{x_B} = ۲ \Longrightarrow {\mathrm{x_B}}^۲ + {y_B}^۲ = ١٦ \Longrightarrow \ ٤ + {\mathrm{y_B}}^۲ = ١٦ \Longrightarrow$$

$${\mathrm{y_B}}^۲ = ١۲ \Longrightarrow y_\mathrm{B} = \pm ۲\sqrt{۳}$$

$\mathrm{B}(۲, ۲\sqrt{۳}) \quad \mathrm{C}(۲, -۲\sqrt{۳})$

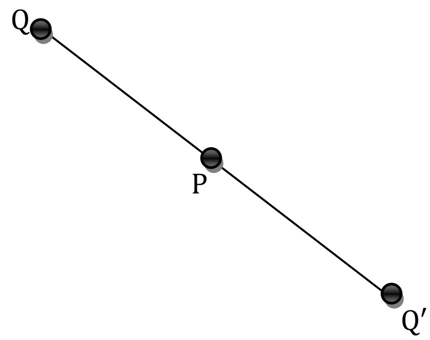
این مسئله دو جواب دارد.



قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه:

در شکل زیر نقطه ی Q' قرینه ی نقطه ی Q نسبت به نقطه ی P است به شرطی که $PQ = PQ'$

در نتیجه می بینیم که نقطه ی P وسط دو نقطه ی Q و Q' است.



مثال : قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید

قرینه ی نقطه ی A را A' می نامیم و با توجه به مطالب فوق داریم $AM = A'M$ پس M وسط AA' در نتیجه

$$x_A = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Longrightarrow -۱ = \frac{x_A + ۱}{۲} \Longrightarrow x_A = -۳$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Longrightarrow ۴ = \frac{y_A + ۲}{۲} \Longrightarrow y_A = ۶$$

مثال :سود سالانهٔ یک واحد کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته

است . به کمک فرمول نقطهٔ میانی پاره خط مشخص کنید :

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط AB را به دست آوریم:

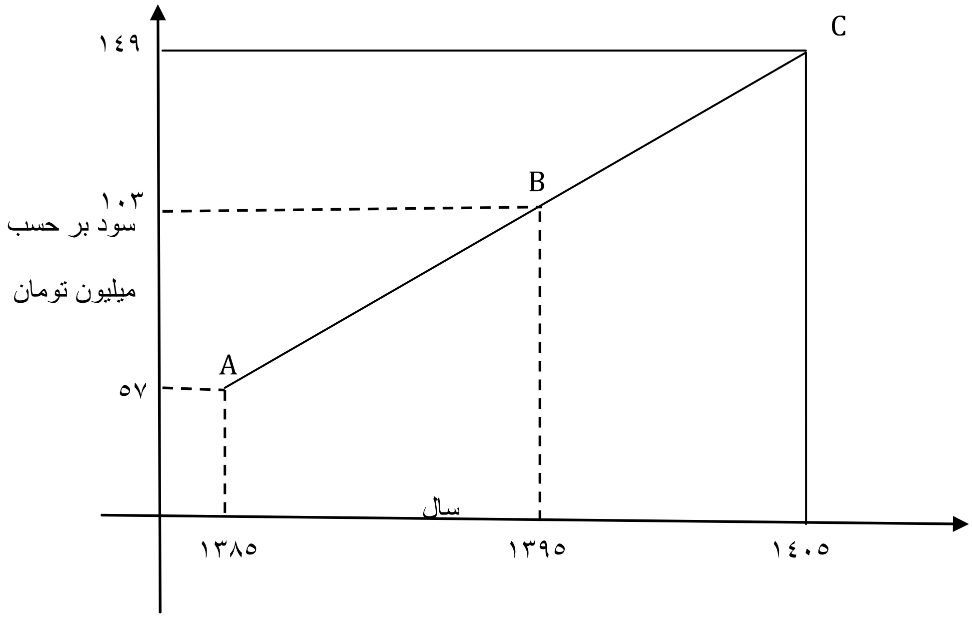
$B(۱۰,٤)$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Longrightarrow y_M = \frac{۵۷ + ۱۰۳}{۲} \Longrightarrow y_M = ۸۰$$

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه با این میانگین برابر بوده باید طول نقطه ی وسط پاره خط AB را به دست آوریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} \Rightarrow x_M = ۱۳۹۰$$



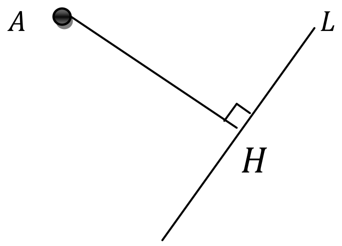
پ)اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

با توجه به شکل واضح است که نقطه ی Bوسط پاره خط AC است.

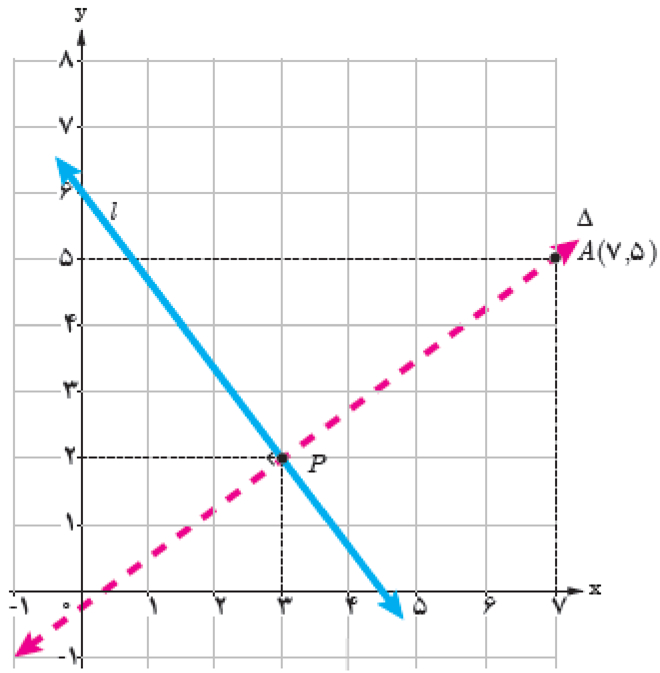
$$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۱۰۳ = \frac{۵۷ + y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۲۰۶ - ۵۷ = ۱۴۹$$

فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه ای خارج خط L باشد، فاصلهٔ A تا L برابر است با طول پاره خطی که از A عمود بر L رسم می شود(AH)؛ به زبان ساده فاصله ی نقطه از خط ، طول کوتاه ترین پاره خطی است که نقطه را به خط وصل می کند.



مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



حل: چون شیب L برابر $-\frac{۴}{۳}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرا از A و عمود بر L را می نویسیم.

$$y - ۵ = \frac{۳}{۴}(x - ۷)$$

$$۴y - ۲۰ = ۳x - ۲۱$$

$$\Delta: ۳x - ۴y = ۱$$

اگر معادلهٔ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می آید.

$$\begin{matrix} L: \\ \Delta: \end{matrix}\begin{cases} ۴x + ۳y = ۱۸ \\ ۳x - ۴y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۳\,, y = ۲ \;\Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^۲ + (y_A - y_P)^۲} = \sqrt{(۷ - ۳)^۲ + (۵ - ۲)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

اگر مراحل حل این مثال را در حالت کلی به کار ببریم، به نتیجهٔ زیر می رسیم:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با

$$AH = d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

دقت کنیم! برای استفاده از فرمول بالا ، گام اول این است که مختصات نقطه ی A را در معادله ی خطی که برابر صفر است، قرار دهیم، مثلاً اگر شکل خط به صورت $y = ۳ - ۲x$ باشد، ابتدا معادله ی خط را به صورت $۲x + y - ۳ = ۰$ درآورورده و سپس از فرمول فاصله ی نقطه ی از خط استفاده کنیم.

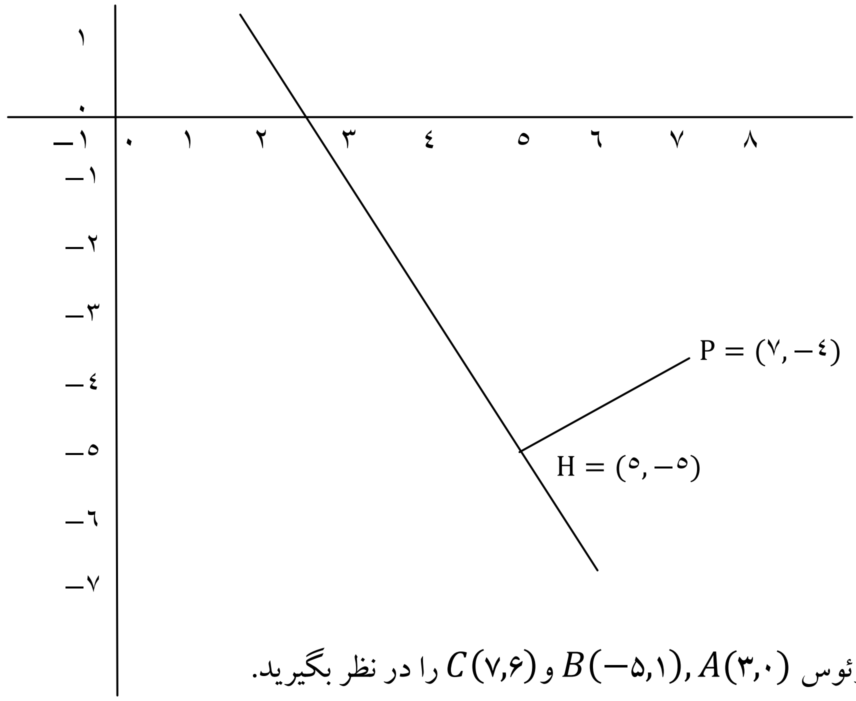
مثال: مثال بالا را به کمک این فرمول حل می کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x + ۳y - ۱۸ = ۰$ به دست می آوریم:

$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷,-۴)$ را از خط به معادلهٔ $۲x+y=۵$ به دست آورید.

$$P(۷,-۴)=(x_\circ,y_\circ),\ ۲x+y-۵=۰$$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+C|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Longrightarrow d=\frac{|۲\times۷+۱\times(-۴)+(-۵)|}{\sqrt{۴+۱}}\Longrightarrow d=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$



مثال: مثلث با رئوس $A(۳,۰)$، $B(-۵,۱)$ و $C(۷,۶)$ را در نظر بگیرید.

الف) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

$$m_{BC}=\frac{۶-۱}{۷+۵}=\frac{۵}{۱۲}\Longrightarrow y-۱=\frac{۵}{۱۲}(x+۵)\Longrightarrow -۵x+۱۲y-۳۷=۰$$

ب) فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC را به دست آورید.

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ,y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با

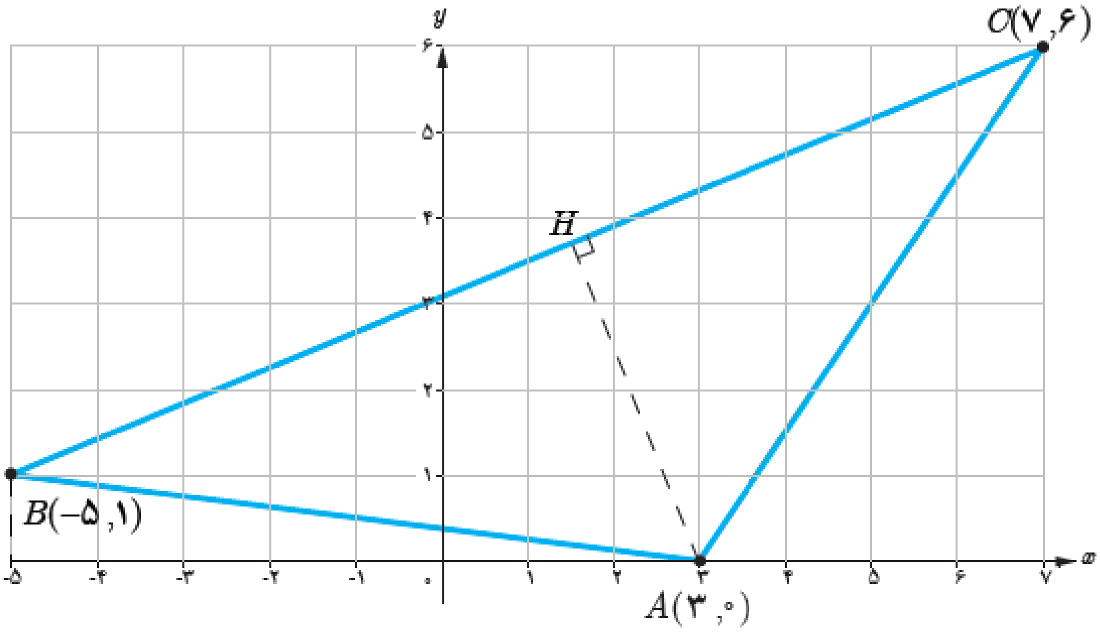
$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$AH = \frac{|-۵ \times ۳ + ۱۲ \times ۰ - ۳۷|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{۵۲}{۱۳} \Longrightarrow AH = ۴$$

پ)طول ضلع BC را به دست آورید و سپس با استفاده از طول ارتفاع AH، مساحت مثلث را بیابید.

$$BC = \sqrt{(۷+۵)^{۲} + (۶-۱)^{۲}} = ۱۳$$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times ۱۳ \times ۴ = ۲۶$$

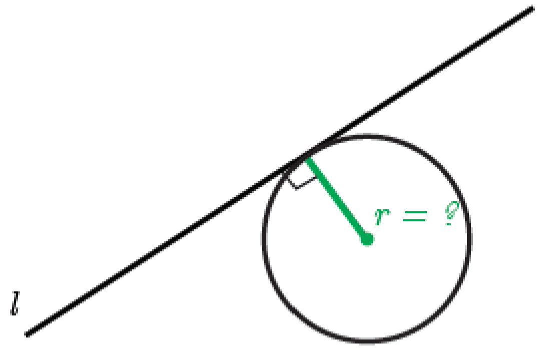


مثال : خط $۳x - ۴y = ۰$ بر دایره ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

(راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).

پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی نقطه ی مرکز را از خط l به دست آوریم.

$$r = \frac{|۳\times۲+(-۴)\times(-۱)+۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۰}{۵} \Longrightarrow r = ۲$$



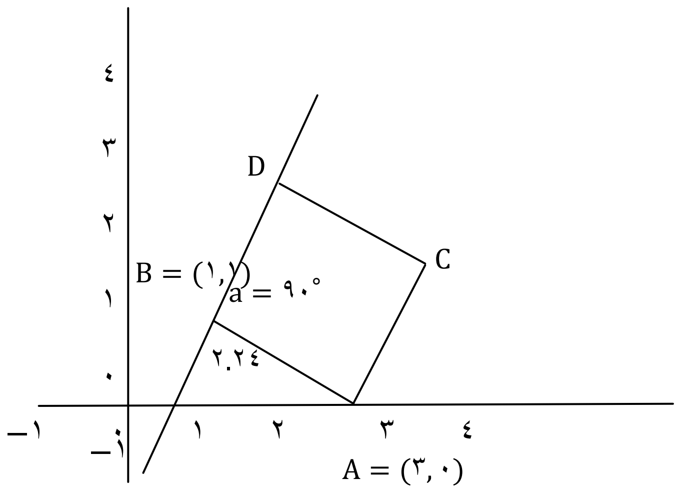
مثال : یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

نقطه ی A روی خط قرار ندارد بنابراین از نقطه ی A بر خط عمود می کنیم. فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است:

$$A(۳,۰) = (x_۰, y_۰), ۲x - y - ۱ = ۰$$

$$AB = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Longrightarrow AB = \frac{|۲ \times ۳ + (-۱) \times ۰ + (-۱)|}{\sqrt{٤ + ۱}} \Longrightarrow d = \frac{٥}{\sqrt{٥}} = \sqrt{٥}$$

$$S = AB^۲ \Longrightarrow S = ٥$$



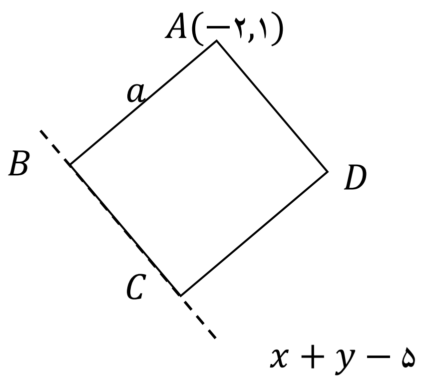
تست: طول قعر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط به معادله ی $x + y = ۵$ و مختصات یک رأس آن $(-۲, ۱)$ است، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۶

حل) گزینه ی «۴» به شکل مربع دقت کنیم . معادله ی یکی از اضلاع آن (به عنوان مثال ضلع BC) برابر با $x + y - ۵ = ۰$ است. مختصات یکی از رئوس مربع $(-۲,۱)$ است.

دقت کنیم که اگر مختصات رأس های B یا C $(-۲,۱)$ باشد، باید مختصات $(-۲,۱)$ در معادله ی ضلع BC یعنی $x + y - ۵ = ۰$ صدق کند. ملاحظه می کنیم مختصات $(-۲,۱)$ در خط صدق نمی کند. پس نتیجه می گیریم مختصات $(-۲,۱)$ متعلق به یکی از رأس های A یا D است که روی ضلع BC واقع نیستند (به عنوان مثال مختصات رأس A را برابر $(-۲,۱)$ در نظر می گیریم) . برای محاسبه ی طول قطر مربع ، باید طول ضلع آن را معلوم کنیم . دقت کنیم فاصله ی رأس A از ضلع BC برابر با طول ضلع مربع است. داریم:

$$\xrightarrow{\text{ضلع مربع}} a = AB = \frac{|(-۲)+۱-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{|-۶|}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲} \Longrightarrow a = ۳\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{قطر}} I = a\sqrt{۲} = \sqrt{۲}(۳\sqrt{۲}) = ۶$$



تست: معادله ی یکی از قطرهای مربع برابر با $y = ۲x + ۱$ است. اگر مختصات یکی از رئوس مربع $(۱, -۲)$ باشد، مساحت مربع کدام است؟

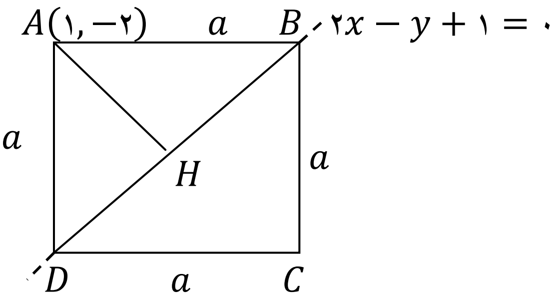
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

حل) گزینه ی «۳» به شکل مربع دقت کنیم . اگر فرض کنیم معادله ی قطر BD برابر با $y = ۲x + ۱$ باشد، به راحتی پی می بریم نقطه ی $(۱, -۲)$ روی BD نیست و متعلق به رأس های A یا C است (به عنوان مثال $A(۱, -۲)$ است).

حال به راحتی از روی شکل پی می بریم که فاصله ی رأس A از قطر BD برابر با نصف قطر است. داریم:

$$BD \text{ تا قطر } A \text{ فاصله ی } = \frac{l}{۲} = \frac{|۲ - (-۲) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \xrightarrow{\text{قطر مربع}} l = ۲\sqrt{۵}$$

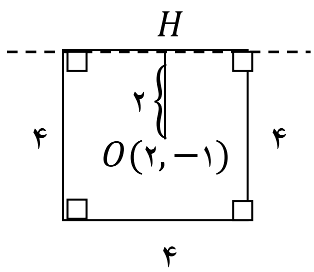
$$\Longrightarrow S_{\text{مربع}} = \frac{۱}{۲} l^۲ = \frac{۱}{۲} (۲\sqrt{۵})^۲ = ۱۰$$



تست: نقطه ی $(۲, -۱)$ مرکز مربع و معادله ی یک ضلع آن به صورت $۴x - ۳y = a$ می باشد. به ازای کدام مقدار a، مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

حل) گزینه ی «۳» چون مساحت مربع ۱۶ است، در نتیجه هر ضلع این مربع ۴ واحد می باشد. از طرفی می دانیم فاصله ی مرکز مربع از تمام اضلاعش برابر نصف ضلع مربع است. پس ابتدا فاصله ی مرکز $(۲, -۱)$ را از ضلع مربع به معادله ی $۴x - ۳y - a = ۰$ محاسبه کرده و سپس برابر ۲ قرار می دهیم تا پارامتر a مشخص شود:



$$\xrightarrow{\text{فاصله ی مرکز تا ضلع مربع}} OH = \frac{|۴(۲) - ۳(-۱) - a|}{\sqrt{۴^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{|۱۱ - a|}{۵} \xrightarrow{OH=۲} \frac{|۱۱ - a|}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow |۱۱ - a| = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱۱ - a = ۱۰ \Rightarrow a = ۱ \\ ۱۱ - a = -۱۰ \Rightarrow a = ۲۱ \to \text{در گزینه ها نیست} \end{cases}$$

مثال: اگر فاصله ی نقطه ی $M(۱, ۲)$ از خط $۳x + my - ۱ = ۰$ برابر ۲ باشد، آن گاه:

۱) $m = -۴$ ۲) $m = ۴$ ۳) $m = ۱$ ۴) $m = -۱$

چون فاصله ی نقطه ی $M(۱,۲)$ از خط $۳x + my - ۱ = ۰$ برابر ۲ است، در نتیجه جواب حاصل از فرمول

$MH = \frac{|Ax_۰+By_۰+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$ به ازای مختصات $M(۱,۲)$ برابر با ۲ می باشد. یعنی داریم:

$$MH = \frac{|Ax_۰ + By_۰ + C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}} = \frac{|۲ + ۲m|}{\sqrt{۹ + m^۲}} = ۲ \Rightarrow ۲|۱ + m| = ۲\sqrt{۹ + m^۲}$$

$$\xRightarrow{\text{به توان می رسانیم}} m^۲ + ۲m + ۱ = ۹ + m^۲ \Rightarrow m = ۴$$

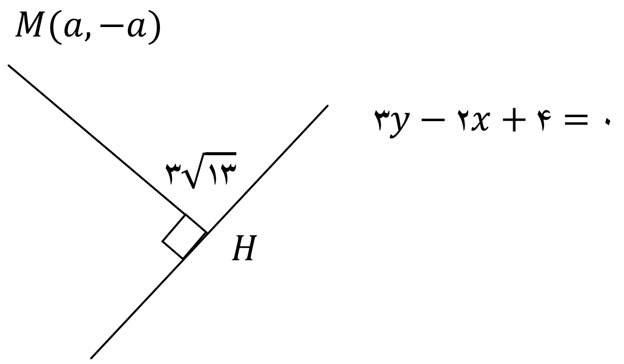
تست : فاصله ی نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه ی دوم از خط به معادله ی $۳y - ۲x + ۴ = ۰$ برابر $۳\sqrt{۱۳}$ واحد است. عرض آن نقطه کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

۴۲ – گزینه ی «۳»

نقطه ی $M(x, y)$ روی خط $y = -x$ (نیمساز ناحیه ی ۲) قرار دارد . به عبارتی مؤلفه های x و y ، به هم وابسته اند . به زبان ساده اگر مؤلفه ی اول را a فرض کنید، مؤلفه ی y (عرض) برابر با $-a$ است. ازطرفی چونروی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد پس طول آن منفی است $(a < ۰)$

پس فاصله ی نقطه ی مورد سؤال $M(a,-a)$ را از خط $۳y-۲x+۴=۰$ محاسبه کرده و برابر $۳\sqrt{۱۳}$ قرار می دهیم. داریم:



$$MH=۳\sqrt{۱۳}=\frac{|۳(-a)-۲a+۴|}{\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲}}\Longrightarrow ۳\sqrt{۱۳}=\frac{|۴-۵a|}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Longrightarrow ۳۹=|۴-۵a|\Longrightarrow ۴-۵a=\pm۳۹\Longrightarrow\begin{cases}a=-۷\\ a=\frac{۴۳}{۵}\ \text{غ ق ق}\rightarrow(\text{چون } a<۰ \text{ نیست})\end{cases}$$

$$\text{نقطه ی مجهول } M(a,-a)\xrightarrow{a=-۷}M(-۷,۷)\Longrightarrow \text{عرض نقطه مجهولی}=۷$$

تست: نقطه های $A(۰,۳)$ و $B(\sqrt{۳},۶)$ و مبدأ مختصات سه رأس یک مثلث می باشند. طول ارتفاع این مثلث گذرنده از مبدأ کدام است؟

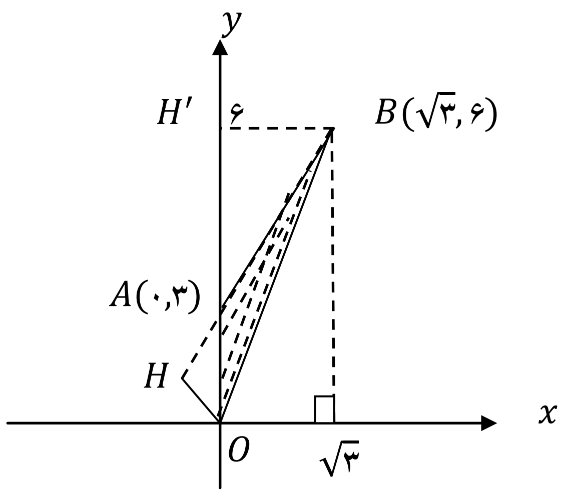
۱) ۱/۵   ۲) ۲   ۳) ۲/۵   ۴) ۳

حل) گزینه ی «۱» می دانیم طول ارتفاع وارد از هر رأس بر ضلع مقابل، برابر با فاصله ی رأس مورد نظر از ضلع مقابل آن است.

گام اول: معادله ی ضلع مقابل به رأس O، یعنی ضلع AB را به دست می آوریم:

$$A(۰,۳),B(\sqrt{۳},۶)\Longrightarrow m_{AB}=\frac{۶-۳}{\sqrt{۳}-۰}=\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{m=\sqrt{۳}\ ,A(۰,۳)}y-۳=\sqrt{۳}(x-۰)\Longrightarrow \sqrt{۳}x-y+۳=۰\ \ AB \text{ معادله ی ضلع}$$



گام دوم : از فرمول فاصله ی نقطه از خط ، فاصله ی رأس O را تا ضلع AB به دست می آوریم . مقدار به دست آمده ، طول ارتفاع گذرنده از مبدأ است. می نویسیم:

$$AB \text{ ضلع} : \sqrt{۳}x - y + ۳ = ۰ \xRightarrow{\text{ارتفاع}} OH = \frac{|۳|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۳}{۲} = ۱ / ۵$$

مثال : الف)نشان دهید دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ با یکدیگر موازی اند.

$$۵x - ۱۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۵}{۱۲} \ , -۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow m' = \frac{۵}{۱۲}$$

$$m = m'$$

چون شیب ها برابر شد پس موازی هستند.

روش دوم :در معادله ی دو خط موازی ، ضریب x و y نظیر به نظیر مضربی از هم هستند.

ب)فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.

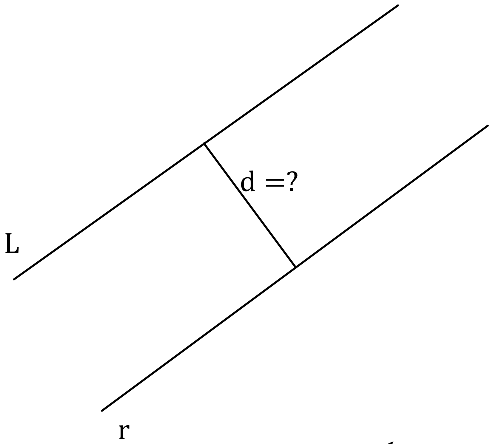
فاصله دو خط موازی: برای به دست آ وردن فاصله دو خط موازی یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط

در نظر می گیریم و فاصله آن را از خط دیگر به دست می آوریم.

نقطه ی $A(۱,۰)$ روی خط $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ قرار دارد. حالا فاصله ی نقطه ی A را تا خط

$۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ به دست می آوریم:

$$d = \frac{|۱ \times ۵ + ۰ \times (-۱۲) + ۸|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{۱۳}{۱۳} \Longrightarrow d = ۱$$

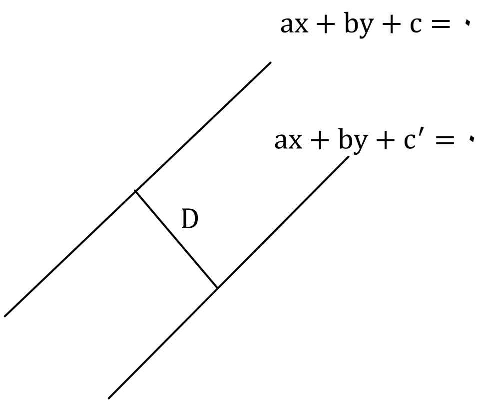


روش دوم : ابتدا ضرایب x و y را یکسان کنیم. بعد از یکسان کردن ضرایب x و y دو خط موازی

$ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ را داریم که برای به دست آوردن فاصله ی بین دو خط از رابطه ی زیر

استفاده می کنیم:

$D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ فاصله ی دو خط موازی



دقت کنیم! برای استفاده از فرمول فاصله ی دو خط موازی یعنی $D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$، حتماً ضرایب x و y را یکسان می کنیم.

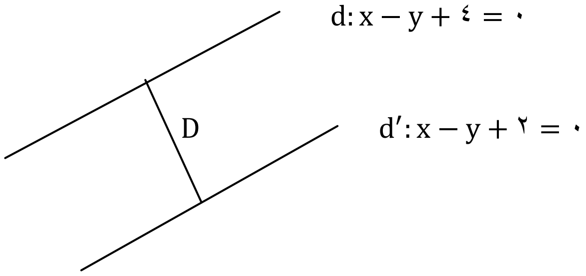
تست: فاصله ی دو خط موازی $y=mx+۴$ و $y=x-۲$ برابر است با:

$۲\sqrt{۲}$(۱ $m-۱$(۲ $\sqrt{m-۳}$(۳ $\sqrt{۲}$(۴

حل)برای تعیین فاصله ی دو خط موازی $y=mx+۴$ و $y=x+۲$، ابتدا باید پارامتر m را به دست آوریم. چون دو خط موازی هستند، پس هم شیب خواهند بود در نتیجه $m=۱$ است. حال چون ضرایب x و y یکسان هستند از رابطه ی زیر فاصله ی بین آن ها را مشخص می کنیم . داریم:

$$\begin{cases} d: y=mx+۴ \\ d': y=x+۲ \end{cases} \xRightarrow{d\,||\,d'} m=۱ \Rightarrow \begin{cases} x-y+۴=۰ \\ x-y+۲=۰ \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{فاصله ی بین دو خط}} D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴-۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$



تست: فاصله ی خطی که دو نقطه ی $A(۰,۰)$ و $B(۱,۱)$ را به هم وصل می کند، از خطی که دو نقطه ی $C(۱,۳)$ و $D(۲,۴)$ را به هم وصل می کند، کدام است؟

۲(۱   ۱(۲ $\sqrt{۲}$(۳ $۲\sqrt{۲}$(۴

حل) گزینه ی «۳»

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱ \xRightarrow{m=۱\ ,(۰,۰)} d: y=x$$ (معادله ی خطی که از A و B می گذرد)

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{۴ - ۳}{۲ - ۱} = ۱$$

$$\xrightarrow{m=۱ \ ,(۱,۳)} y - ۳ = ۱(x - ۱) \Rightarrow d': y = x + ۲$$ (معادله ی خطی که از C و D می گذرد)

دو خط d و d' موازی اند و ضرایب x و y در آن ها یکسان است. پس طبق فرمول فاصله ی دو خط موازی ، فاصله ی بین آن ها را به دست می آوریم . داریم:

$$\begin{cases} d: x - y = ۰ \\ d': x - y + ۲ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله ی بین } d \text{ و } d'} D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۰ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

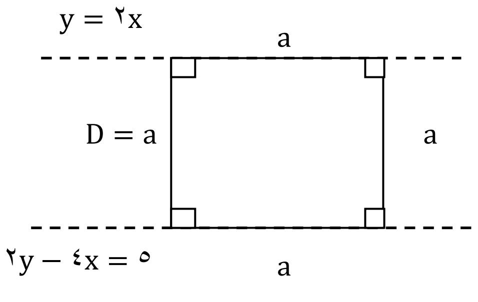
تست: معادلات دو ضلع از یک مربع به صورت $y = ۲x$ و $۲y - ۴x = ۵$ است. مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

حل) گزینه ی «۳» معادله ی دو ضلع از یک مربع به صورت $y = ۲x$ و $۲y - ۴x = ۵$ است با کمی دقت پی می بریم شیب این دو خط یکسان و برابر با $m = ۲$ است. پس این دو خط ، دو ضلع مقابل هم در یک مربع بوده و فاصله ی آن ها از هم ، ضلع مربع خواهد بود. داریم:

$$\begin{cases} y - ۲x = ۰ \overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۲y - ۴x = ۰ \\ ۲y - ۴x - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow D = \frac{|۰ - (-۵)|}{\sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲۰}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ضلع مربع}} a = D = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^۲ = (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ = \frac{۵}{۴}$$



درس دوم : تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم

یادآوری حل معادلات درجه ۲
الف) معادله درجه دوم ناقص
ب) معادله درجه دوم کامل

الف) معادله درجه دوم ناقص : اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$ b یا c یا هر دو صفر باشند معادله را ناقص گوئیم.

۱) اگر $c = ۰$, $b \neq ۰$ با استفاده از فاکتورگیری معادله را حل می‌کنیم.

$$ax^۲ + bx = ۰ \xRightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(ax + b) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$۳x^۲ - ۵x = ۰ \Longrightarrow x(۳x - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$ (دو ریشه‌ی ساده)

۲) اگر $b = ۰$, $c \neq ۰$ با استفاده از خاصیت ریشه‌ی زوج معادله را حل می‌کنیم.

خاصیت ریشه زوج :	$\xrightarrow{a>۰} u = \pm\sqrt{a}$ $\xrightarrow[a<۰]{}$ جواب ندارد	$u^۲ = a$

$$ax^۲ + c = ۰ \Longrightarrow x^۲ = -\frac{c}{a} \quad \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{c}{a}>۰} x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \xrightarrow[-\frac{c}{a}<۰]{} \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

$$۹x^۲ - ۴ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۴}{۹}} = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$-x^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow -x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = -۱ \qquad \text{ریشه ندارد}$$

۳) اگر $b = ۰$, $c = ۰$ آنگاه :

$ax^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد

$۳x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۰$ ریشه‌ی مضاعف

ب) معادله درجه دوم کامل: اگر $b \neq ۰$, $c \neq ۰$ معادله درجه دوم کامل است.

برای حل معادلات درجه دوم کامل از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم.