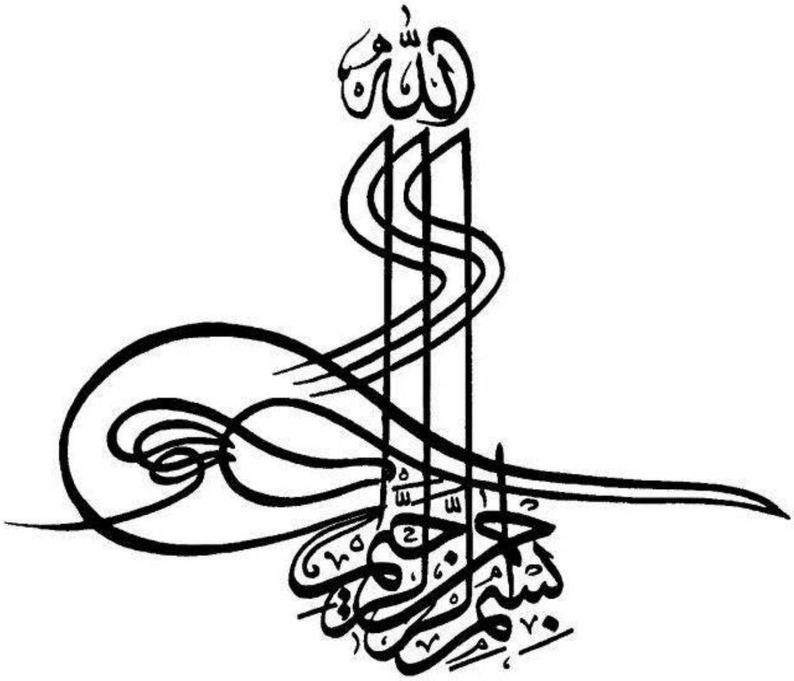

بسم الله الرحمن الرحیم

مثلثات

(فصل دوم ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی فیزیک)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مثلثات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

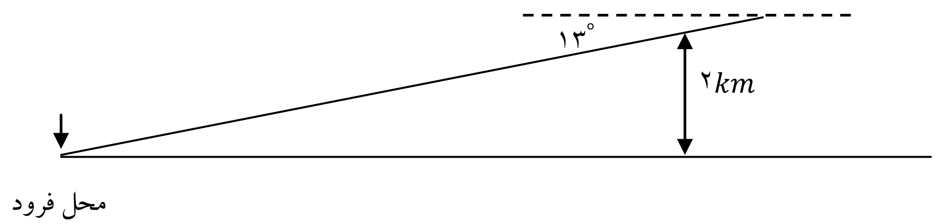
۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول: نسبت های مثلثاتی

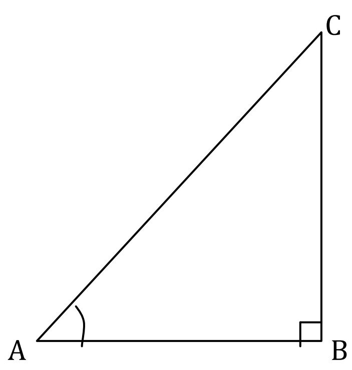
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، نجوم و غیره کاربرد دارد.



به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۱۳° باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می نامیم و آن را با tanA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، داریم.

$$\boxed{\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}=\frac{BC}{AB}}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می نامیم و آن را با cotA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزویه ABC داریم:

$$cotA = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویهٔ A می نامیم و با sinA نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

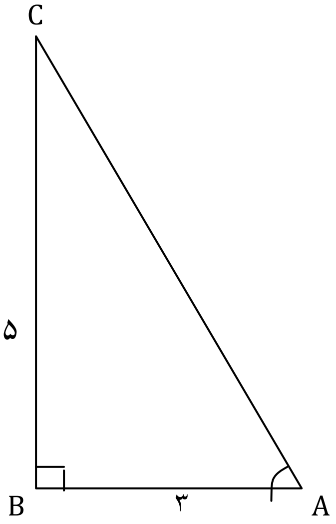
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می نامیم و آن را با cos A نشان می دهیم. به عبارت دیگر

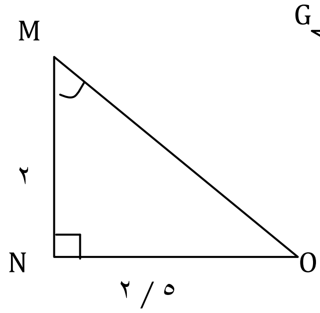
$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

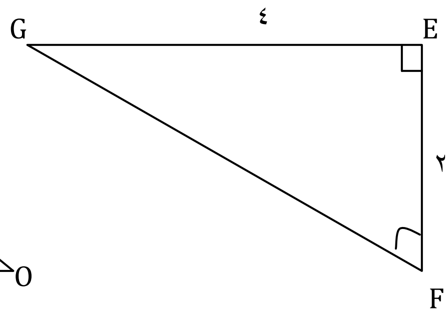
در یک مثلث قائم الزاویهٔ، نسبت های سینوس ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

نکته: به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ و از این رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به طور مشابه، می توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

مثال: در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.







$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\qquad$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲ / ۵}$ $\qquad$ $\tan G = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲ / ۵}{۲}$ $\qquad$ $\cot G = \frac{GE}{EF} = \frac{٤}{۲}$

مثال: در شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای αوβ را بدست آورید.

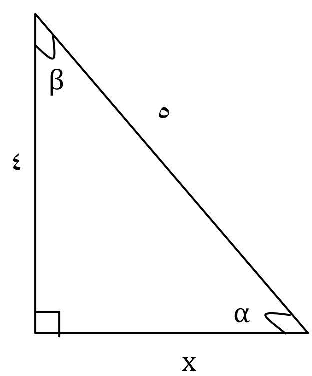
رابطه فیثاغورس $۵^۲ = ۴^۲ + x^۲ \to ۲۵ = ۱۶ + x^۲ \to x^۲ = ۹ \to x = ۳$

$sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ $\qquad$ $sin\beta = \frac{۳}{۵}$

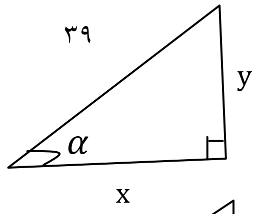
$cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $cos\beta = \frac{۴}{۵}$

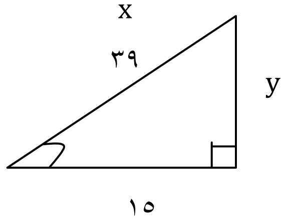
$\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ $\qquad$ $\tan\beta = \frac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $\cot = \frac{۴}{۳}$



مثال: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده ی آن $\frac{۵}{۱۳}$ باشد محیط مثلث را بدست آورید.





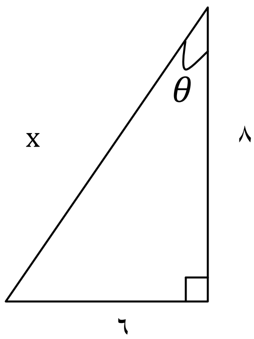
$$cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{۳۹} \to \frac{۵}{۱۳} = \frac{x}{۳۹} \to x = ۱۵$$

$$sin\alpha = \frac{y}{۳۹} \to (۳۹)^۲ = ۱۵^۲ + y^۲ \to$$

مثال: در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی θ را بدست آورید.

الف) رابطه ی فیثاغورس $x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \to x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \to x = ۱۰$



$$sin\theta = \frac{۶}{۱۰}$$

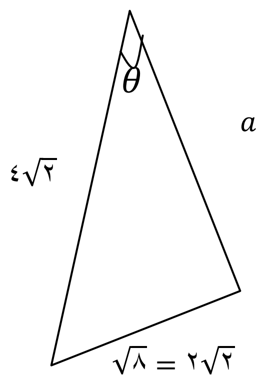
$$cos\theta = \frac{۸}{۱۰}$$

$$tan\theta = \frac{۶}{۸}$$

$$cot\theta = \frac{۸}{۶}$$

ب) رابطه ی فیثاغورس $(۴\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۸})^۲ + a^۲$

$$۳۲ = ۸ + a^۲ \to a^۲ = ۲۴ \to a = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$



$$sin\theta = \frac{\sqrt{۸}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

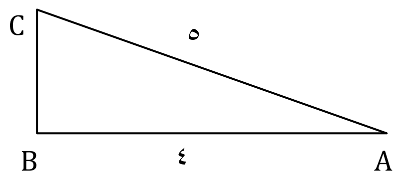
$$cos\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tan\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$cot\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$$

مثال: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC$(\hat{B} = ۹۰^{\circ})$, $AB = ۴$ و $AC = ۵$ می باشند. مقدار $tanA$ و $cotA$ را بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع BC را بدست می آوریم:



$$BC^{۲} = AC^{۲} - AB^{۲} = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Longrightarrow BC = ۳$$

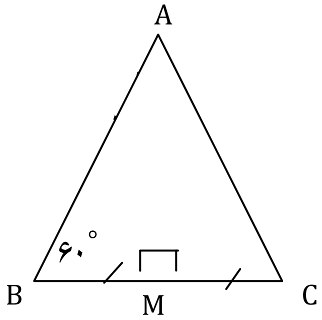
$$\Longrightarrow tanA = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۴}\ , cotA = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$AM^{۲} = AB^{۲} - BM^{۲} = (۲)^{۲} - (۱)^{۲} = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Longrightarrow AM = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

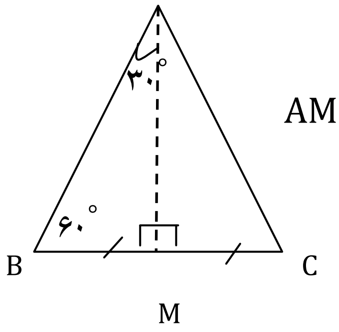
مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۳}$

A

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$AM^{۲} = AB^{۲} - BM^{۲} = (۲\sqrt{۳})^{۲} - (\sqrt{۳})^{۲} = ۱۲ - ۳ = ۹$$

$$\Longrightarrow AM = ۳$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۳۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ , \cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۶۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

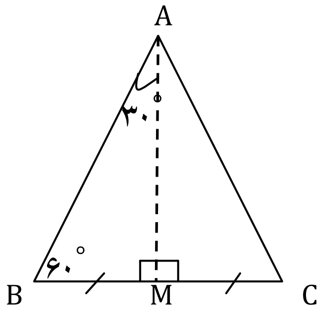
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال :با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، نسبت های مثلثاتی °۳۰ و °۶۰ را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$



بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:

$$\mathrm{AM}^۲ = \mathrm{AB}^۲ - \mathrm{BM}^۲ = a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴}$$

$$\Longrightarrow AM = \frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۳۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \cot ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۶۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

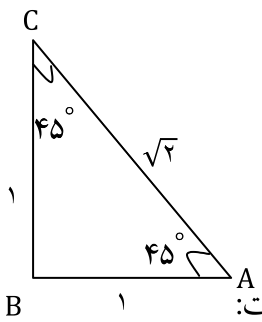
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱ ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

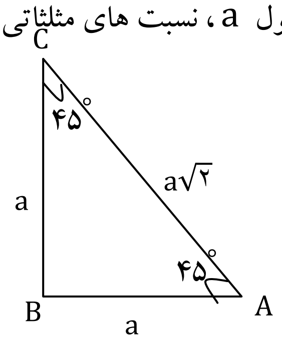
نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱ \,, \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول a ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = a^۲ + a^۲ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲a^۲} = a\sqrt{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱ , \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = ۱$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 45^\circ$ و 60°

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$Sin\ A$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$Cos\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$Tan\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$Cot\ A$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال : مقدار عددی عبارت $۳sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}, cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ می باشند، داریم:

$$۳sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}tan ۶۰^\circ = ۳ \times \frac{۱}{۲} + ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳} \times \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۳}{۲} + ۴ - ۳ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $\sqrt{۲}\,cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$ را بدست آورید.

$$\sqrt{۲}\,cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$$

مثال : مقدار عددی عبارت $۴\sqrt{۲}\sin۴۵^\circ - ۵\cot۴۵^\circ - ۳\cos۶۰^\circ$ را بدست آورید.

$$۴\sqrt{۲}\sin۴۵^\circ - ۵\cot۴۵^\circ - ۳\cos۶۰^\circ$$

$$= ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۵(۱) - ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۴ - ۵ - \frac{۳}{۲} = -۱ - \frac{۳}{۲} = \frac{-۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $۸sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}(\cot۶۰^\circ - \tan۶۰^\circ)$ را بدست آورید.

$$۸sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}(\cot۶۰^\circ + \tan۶۰^\circ)$$

$$= ۸ \times \frac{۱}{۲} + \sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}\right) = ۴ + \sqrt{۳} \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = ۴ + ۴ = ۸$$

مثال : مقدار عددی عبارت $-sin۶۰^\circ + ۲\cos۳۰^\circ - ۴\cot۳۰^\circ + ۲\tan۴۵^\circ$ را بدست آورید.

$$-sin۶۰^\circ + ۲\cos۳۰^\circ - ۴\cot۳۰^\circ + ۲\tan۴۵^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۴ \times \sqrt{۳} + ۲(۱)$$

$$= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۳\sqrt{۳} + ۲ = \frac{-\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۳}}{۲} + ۲ = \frac{-۷\sqrt{۳}}{۲} + ۲$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.(زوایای داده شده بر حسب درجه هستند.)

$$۱)sin۴۵\ cos۴۵ + sin۶۰\ cos۳۰ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$۲)۲sin۳۰ + cos^{۲}۴۵ - sin^{۲}۶۰ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴} = \frac{۴+۲-۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\boxed{a sin^{m}\theta = a(\sin\theta)^{m}}$$

$$۳)\ tan۳۰\ cot۳۰ + sin^{۲}۳۰ + cos^{۲}۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}.\sqrt{۳} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$۴)\ \sqrt{۳}tan۶۰ - \frac{tan۳۰}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} - \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۱}} = ۳ - \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$۵)۱ - ۲sin^{۴}۳۰ + \frac{cos^{۲}۳۰}{۲} = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} + \frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}{۲} = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right) + \frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۸}$$

$$= \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$۱)\quad ۲tan۳۰cot۳۰ - ۳cot۴۵\ tan۴۵$

$۲)\quad (cos۳۰ - sin۴۵)(sin۶۰ + cos۴۵)$

$۳)\quad \dfrac{۱ + tan۶۰ + tan^{۲}۶۰}{۱ + cot۶۰ + tan^{۲}۶۰}$

مثال: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱)۲sin۳۰cos۳۰ = sin۶۰ \Longrightarrow ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲)۱ + tan^۲۶۰ = \frac{۱}{cos^۲۶۰} \to ۱ + (\sqrt{۳})^۲ = \frac{۱}{(\frac{۱}{۳})^۲} \to ۱ + ۳ = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} \to ۴ = ۴$$

تمرین: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$۱) sin۴۵cos۴۵ = sin۳۰$

$۲) sin^۲۶۰ + cos^۲۶۰ = ۱$

$۳) \frac{sin^۲۴۵}{۲} = sin^۲۳۰$

مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $\hat{B} = ۹۰^\circ$, $AB = ۴$ و $BC = ۶$ می باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

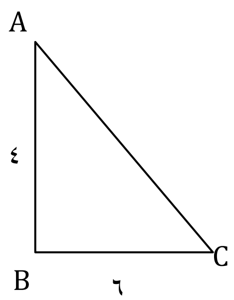
الف) $(cosA + sinC)(cosA - sinC)$

ب) $\tan A(tanC + cotC)$

حل) مطابق شکل و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر AC را به دست می آوریم:

$$\mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{BC}^۲ = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲$$

$$\Longrightarrow AC = \sqrt{۵۲}$$



الف)

$$\mathrm{cosA} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{٤}{\sqrt{٥٢}} \ , sinC = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$(\mathrm{cosA} + \mathrm{sinC})(\mathrm{cosA} - \mathrm{sinC}) = (\mathrm{cosA})^۲ - (\mathrm{sinC})^۲$$

$$= \frac{۱٦}{٥۲} - \frac{۱٦}{٥۲} = ۰$$

ب)

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢} \quad , \qquad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

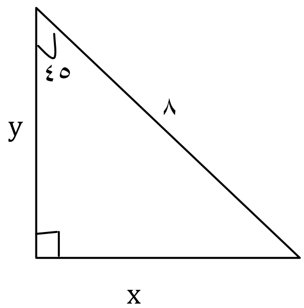
$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$tanA\ (tanC + cotC) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} \times \left(\frac{۴ + ۹}{۶}\right) = \frac{۱۳}{۴}$$

مثال: در هرشکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $sin۴۵^\circ = \frac{x}{۸}$

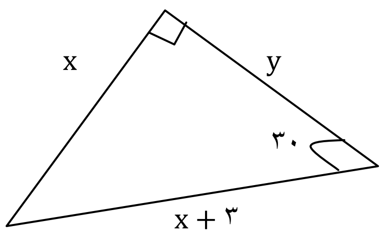
$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۸} \rightarrow x = ۴\sqrt{۲}$



$cos۴۵^\circ = \frac{y}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{y}{۸} \rightarrow y = ۴\sqrt{۲}$

ب) $sin۳۰^\circ = \frac{x}{x+۳}$



$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{x+۳} \rightarrow ۲x = x + ۳ \rightarrow x = ۳$

فیثاغورس $y^۲ = ۳^۲ + ۶^۲$

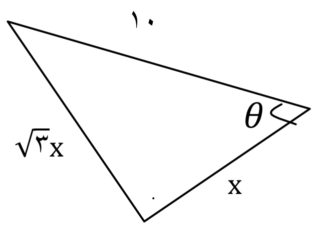
$y^۲ = ۹ + ۳۶ \rightarrow y^۲ = ۴۵ \rightarrow y = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$

پ) $tan\theta = \frac{\sqrt{۳}x}{x} = \sqrt{۳}$

$\Longrightarrow \theta = ۶۰^\circ$

$cos\theta = \frac{x}{۱۰}$

$cos۶۰^\circ = \frac{x}{۱۰}$



$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{۱۰} \to x = ۵$

ت) در مثلث قائم الزاویه بزرگ $sin۶۰^\circ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \Longrightarrow t = ۳۰$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ $\Longrightarrow t^{۲} = (۱۵\sqrt{۳})^{۲} + x^{۲}$

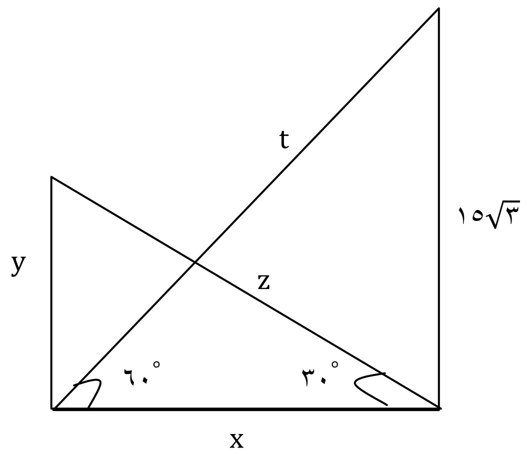
$\Longrightarrow ۳۰^{۲} = ۶\sqrt{۵} + x^{۲}$

$۹۰۰ - ۶\sqrt{۵} = x^{۲} \Longrightarrow ۲۲۵ = x^{۲} \Longrightarrow ۱۵ = x$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۳۰^\circ = \frac{x}{z}$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۳}} = \theta۱۰\sqrt{۳}$

$sin۳۰^\circ = \frac{y}{z} \to \frac{۱}{۲} = \frac{y}{۱۰\sqrt{۳}} \to y = ۵\sqrt{۳}$



ث) $sin۵۳^\circ = cos۳۷^\circ$ $\quad sin۳۷ = ۰/۶ \quad , cos۳۷ = ۰/۸$

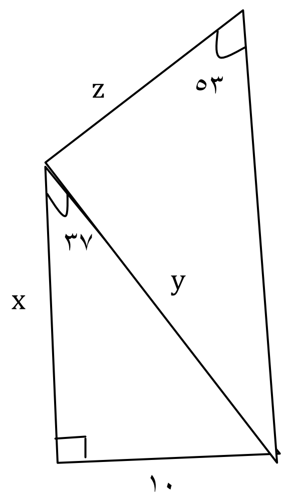
$sin۵۳^\circ = \frac{y}{z} \Longrightarrow ۰/۸ = \frac{۱۰}{\frac{y}{z}} \to z = \frac{۱۰}{\frac{y}{۸}} \times ۱۰$

$z = \frac{۱۰۰}{y}$

$sin۳۷^\circ = \frac{۱۰}{y}$

$۰/۶ = \frac{۱۰}{y} \to y = \frac{۱۰۰}{۶}$

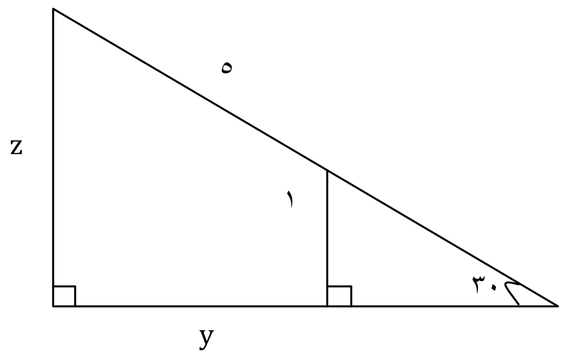
$cos۳۷^\circ = \frac{x}{y} \quad , ۰/۸ = \frac{۸}{\frac{۱۰۰}{۶}} \to x = \frac{۸ \times \frac{۱۰۰}{۶}}{۱۰} = \frac{۸۰}{۶}$



ج) در مثلث کوچک $tan۳۰^\circ = \frac{۱}{x} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{x} \to x = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۳۰^\circ = \frac{z}{۵} \to \frac{۱}{۲} = \frac{z}{۵} \to z = \frac{۵}{۲}$

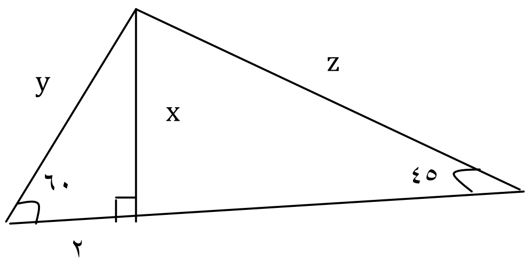
در مثلث بزرگ $cos۳۰^\circ = \frac{x+y}{۵} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+y}{۵} \to ۵\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۲y \to \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = y$



ج) در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos ۶۰^\circ = \frac{۲}{y} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{y} \rightarrow y = ۴$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $sin ۶۰^\circ = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۴} \rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin ۴۵^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{z} \rightarrow z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$



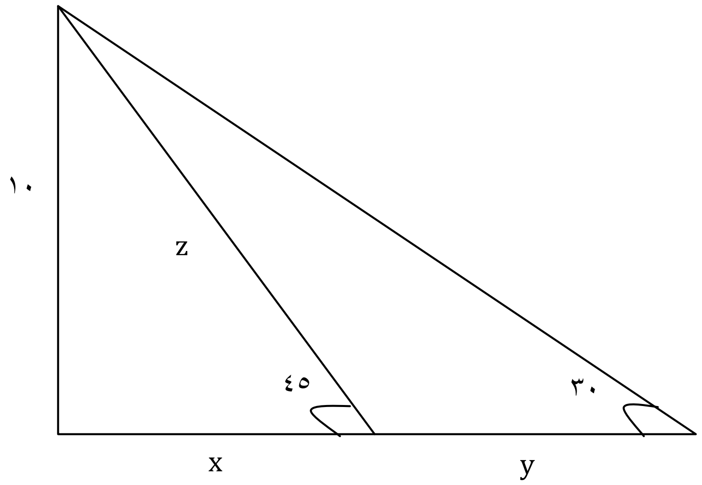
ح) در مثلث قائم الزاویه کوچک $\Longrightarrow sin ۴۵^\circ = \frac{۱۰}{z}$

$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰}{z} \rightarrow z = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$

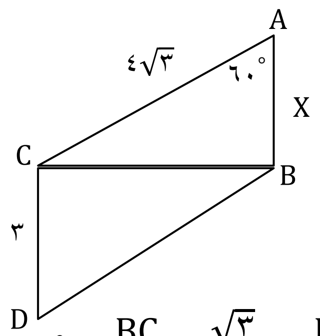
در مثلث قائم الزاویه کوچک $\cos ۴۵ = \frac{x}{z} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۱۰\sqrt{۲}} \rightarrow x = ۱۰$

در مثلث قائم الزاویه بزرگ $\tan ۳۰^\circ = \frac{۱۰}{x+y} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰}{۱۰+y}$

$\Longrightarrow ۱۰\sqrt{۳} + \sqrt{۳}y = ۳۰ \rightarrow y = \frac{۳۰ - ۱۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$



مثال : در شکل رو به رو ، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ D را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ، داریم:

$$\sin ۶۰^{\circ} = \frac{BC}{AC} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۴\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ BCDو با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲} = ۶^{۲} + ۳^{۲} = ۳۶ + ۹ = ۴۵$$

$$\Longrightarrow BD = \sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

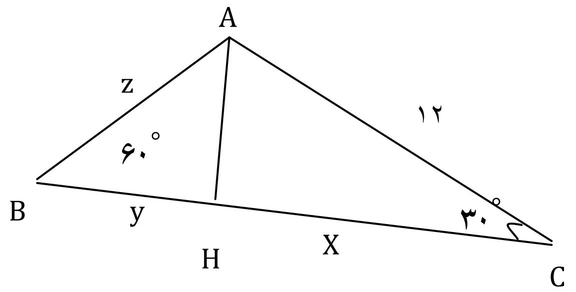
بنابراین:

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{۶}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos D = \frac{CD}{BD} = \frac{۳}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{۶}{۳} = ۲\ , \qquad \cot D = \frac{CD}{BC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

مثال : در مثلث روبه رو، مقادیر y, x و Z را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ACH داریم:

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} \Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۱۲} \Longrightarrow x = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

حال برای به دست آوردن AHبه دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ = AC^۲ - CH^۲ = ۱۲^۲ - (۶\sqrt{۳})^۲$$

$$= ۱۴۴ - ۱۰۸ = ۳۶ \Longrightarrow AH = ۶$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۱۲} \Longrightarrow AH = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۶}{z} \Longrightarrow \sqrt{۳}z = ۱۲$$

$$\Longrightarrow z = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

از دو روش برای به دست آوردن y استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = (٤\sqrt{۳})^۲ - ٦^۲ = ٤٨ - ۳٦ = ۱۲$$

$$\Longrightarrow y = BH = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\cos ٦۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{y}{٤\sqrt{۳}} \Longrightarrow y = \frac{٤\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

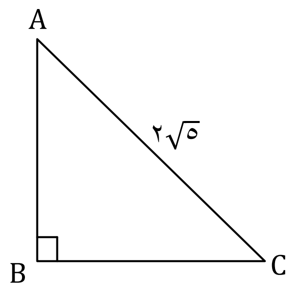
مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $B = ۹۰^\circ$ ؛ طول وتر $۲\sqrt{۵}$ و $\tan C = ۲$ می باشد.

الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

ب) نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = ۲ \Longrightarrow AB = ۲BC \quad (*)$$



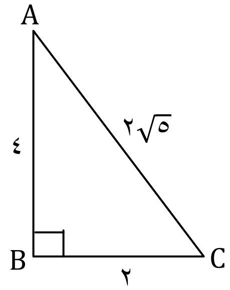
بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \xrightarrow{(*)} (۲\sqrt{۵})^۲ = (۲BC)^۲ + BC^۲$$

$$\Longrightarrow ۲۰ = ۴BC^۲ + BC^۲ \Longrightarrow ۵BC^۲ = ۲۰ \Longrightarrow BC^۲ = \frac{۲۰}{۵} = ٤$$

$$\Longrightarrow BC = ۲ \xrightarrow{(*)} AB = ۴$$

ب)



$$\text{sinA} = \frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \frac{۲}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۱}{\sqrt{٥}}$$

$$\text{cosA} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{٤}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۲}{\sqrt{٥}}$$

$$\text{tanA} = \frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{۲}{٤} = \frac{۱}{۲}\ ,\text{cotA} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{٤}{۲} = ۲$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

الف) $$xcos۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}\text{tan}۳۰^\circ - ۴\text{sin}۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\text{cos}۴۵^\circ + \text{tan}۴۵^\circ}$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳}tan۶۰^\circ - ۴sin۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\text{cos}۴۵^\circ + \text{tan}۴۵^\circ} = \dfrac{\sqrt{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} - ۴ \times \frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} = \dfrac{۱-۲}{۲+۱} = \dfrac{-۱}{۳} \\ \text{xcos}۶۰^\circ = \dfrac{۱}{۲}\text{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۲}x = \frac{-۱}{۳} \Longrightarrow \text{x} = -\frac{۲}{۳}$$

$$\text{sin}^۲۴۵^\circ = (\text{sin}۴۵^\circ)^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $\text{۲۰}sinx = \dfrac{\text{۲}tan\text{۳۰}^\circ + cot\text{۳۰}^\circ}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(cot\text{۴۵}^\circ - \sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ)} \quad , \quad \text{۰}^\circ < x < \text{۹۰}^\circ$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ = (\sin\text{۴۵}^\circ)^{\text{۲}} = \left(\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}} = \frac{\sqrt{\text{۲}} \times \sqrt{\text{۲}}}{\text{۲} \times \text{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{۲}\tan\text{۳۰}^\circ + \cot\text{۳۰}^\circ}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\cot\text{۴۵}^\circ - \sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ)} = \frac{\text{۲} \times \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}} + \sqrt{\text{۳}}}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}})} = \frac{\frac{\text{۵}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}}{\frac{\text{۱}}{\text{۶}}} = \text{۱۰}\sqrt{\text{۳}}$$

$$\Rightarrow \text{۲۰}\sin x = \text{۱۰}\sqrt{\text{۳}} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \,, \text{۰}^\circ < x < \text{۹۰}^\circ \Rightarrow x = \text{۶۰}^\circ$$

مثال : اگر $\text{۹۰}^\circ < \alpha < \text{۰}^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

الف) $-\text{۲}sin\alpha + \sqrt{\text{۳}}\cot\alpha$

حل) چون $\text{۹۰}^\circ < \alpha < \text{۰}^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}$ است، بنابراین: $\alpha = \text{۳۰}^\circ$

$$-\text{۲}sin\alpha + \sqrt{\text{۳}}\cot\alpha = -\text{۲}\sin\text{۳۰}^\circ + \sqrt{\text{۳}}\cot\text{۳۰}^\circ$$

$$= -\text{۲} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \sqrt{\text{۳}} \times \sqrt{\text{۳}} = -\text{۱} + \text{۳} = \text{۲}$$

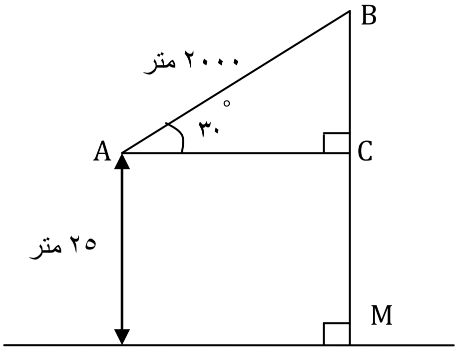
ب) $\text{۴}cos\text{۲}\alpha + \cot(\alpha + \text{۱۵}^\circ)$

حل)

$$\text{۴}cos^{\text{۲}}\alpha + \tan(\alpha + \text{۱۵}^\circ) = \text{۴}\cos^{\text{۲}}(\text{۳۰}^\circ) + \cot(\text{۳۰}^\circ + \text{۱۵}^\circ)$$

$$= ۴\cos ۶۰^\circ + cot\,۴۵^\circ = ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

مثال : یک موشک در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم . با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + ۲۵$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم . می دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۲۰۰۰} \Longrightarrow BC = ۱۰۰۰$$

و از این رو

$$ارتفاع موشک = ۱۰۰۰ + ۲۵ = ۱۰۲۵$$

مثال : یک موشک از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۶۰° پرتاب می شود. موشک پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شکل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

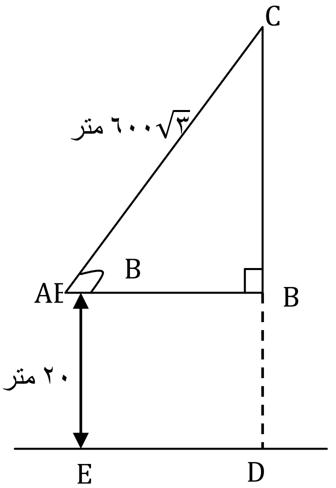
پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر $DB + BC$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{B} = ۹۰ \Longrightarrow \sin ۶۰^{\circ} = \frac{BC}{AC}$$

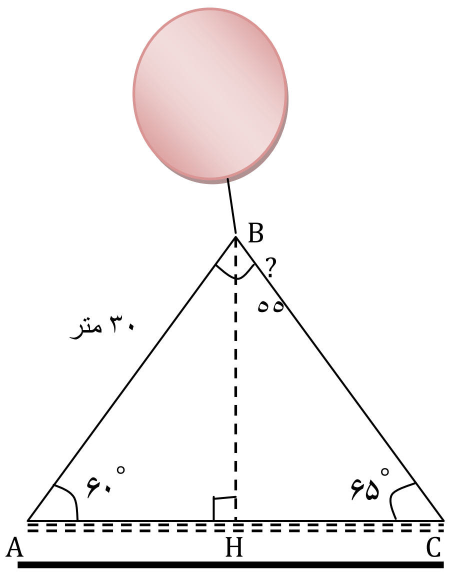
$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶۰۰\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ۶۰۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹۰۰$$

$$DB = AE = ۲۰$$

$$\Longrightarrow DC = DB + BC = ۲۰ + ۹۰۰ = ۹۲۰$$



مثال: در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟ $\sin ۶۵^{\circ} = ۰/۹$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BHمی نامیم.

سپس طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به دست می آوریم.

$$\sin ٦٠^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٣٠ = ١٥\sqrt{٣}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\overset{\Delta}{BHC} \rightarrow sin٦٥^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin ٦٥} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٠ / ٩} \cong ٢٨ / ٨٦$$

مثال: در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و سرپائینی با سطح زمین به ترتیب $۴۵^\circ ,۳۰^\circ$ است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

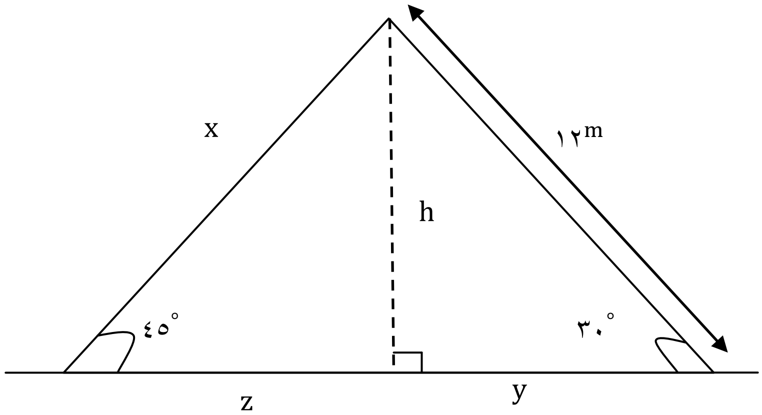
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی A و B چقدر است؟

$$\text{الف}) \; sin۳۰^\circ = \frac{h}{۱۲} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۱۲} \rightarrow h = ۶$$

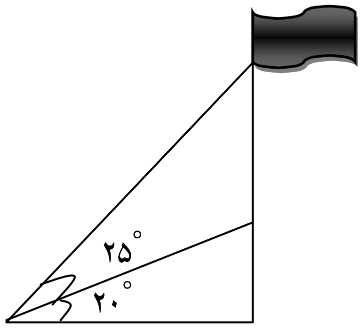
$$\text{ب}) \; sin۴۵^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{x} \rightarrow x = \frac{۱۲}{\sqrt{x}} = \text{گویا}\; ۶\sqrt{۲}$$

$$\text{ج}) \begin{cases} cos۳۰^\circ = \frac{y}{۱۲} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{y}{۱۲} \rightarrow y = ۶\sqrt{۳} \\ cos۴۵^\circ = \frac{z}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{z}{۶\sqrt{۲}} \rightarrow z = ۶ \end{cases} \quad \text{طول تونل} = y + z = ۶\sqrt{۳} + ۶$$

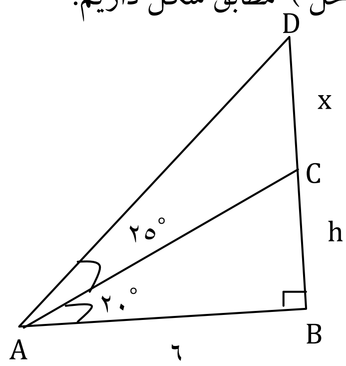


مثال : مطابق شکل، شخصی در فاصلهٔ ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میلهٔ پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض $tan۲۰^\circ = ۰ / ۳۶$ به دست آورید.



حل) مطابق شکل داریم:



$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۲۰^\circ = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow ۰/۳۶ = \frac{h}{۶}$

$\Rightarrow h = ۶ \times ۰/۳۶ = ۲/۱۶ \quad (*)$

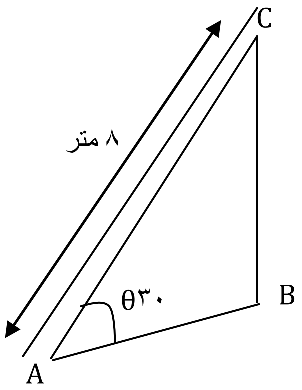
در مثلث قائم الزاویهٔ ABD، $A = ۴۵^\circ$. داریم:

$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \frac{h+x}{۶} \Rightarrow ۱ = \frac{h+x}{۶}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲/۱۶ + x = ۶ \Rightarrow x = ۳/۸۴$$

بنابراین طول میلهٔ پرچم ۳/۸۴متر است.

مثال : مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^{\circ}$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



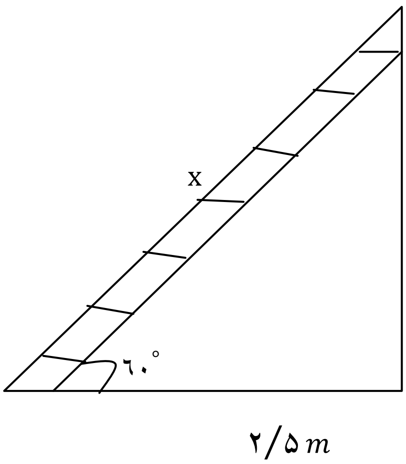
$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow ۲BC = ۸ \Longrightarrow BC = ۴$$

اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^{۲} = AC^{۲} - BC^{۲} = ۸^{۲} - ٤^{۲} = ٤۸ \Longrightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

مثال: اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار $۲/۵\,m$ باشد و زاویه ای که نردبان با سطح افق می سازد، ۶۰° باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار گرفته است؟

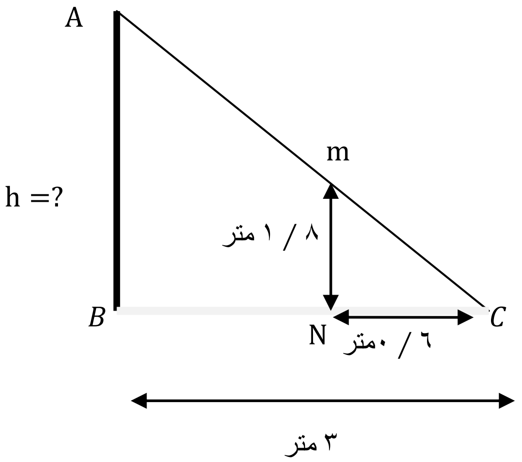
$$cos۶۰^{\circ} = \frac{۲/۵}{x} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲/۵}{x} \rightarrow x = ۵$$



مثال : کیان می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد کیان۱/۸ متر و سایهٔ او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

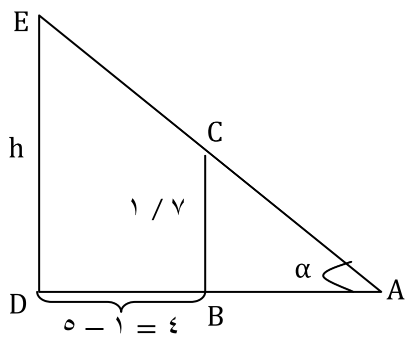
$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{N}=۹۰^\circ \\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases} \rightarrow \overset{\Delta}{\overbrace{ABC}} \sim \overset{\Delta}{\overbrace{MNC}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\cancel{CN}}{\cancel{CB}}=\frac{CM}{AC}=\frac{\cancel{MN}}{\cancel{AB}} \rightarrow \frac{۰/۶}{۳}=\frac{۱/۸}{h} \rightarrow h=\frac{۵/۴}{۰/۶}=۹m$$



مثال : کمیل می خواهد ارتفاع یک میله را که طول سایهٔ آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی۱/۷ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع میله چه قدر است؟

حل) فرض کنیم ED میلهٔ مورد نظر باشد. حال کمیل باید در نقطه ای قرار بگیرد که انتهای سایه های میله و خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم α زاویهٔ پرتو تابش خورشید با سطح افق باشد . در این صورت:



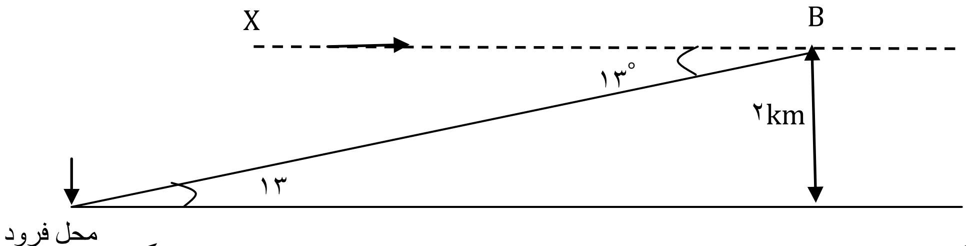
$$ABC: \tan\alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \qquad ADE: \tan\alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Longrightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Longrightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

مثال : یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطهٔ A فرود می آید.

$$\tan ۱۳^{\circ} \cong ۰/۲۳ \qquad BX \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } CB} \widehat{B_۱} = \hat{C} = ۱۳^{\circ}$$

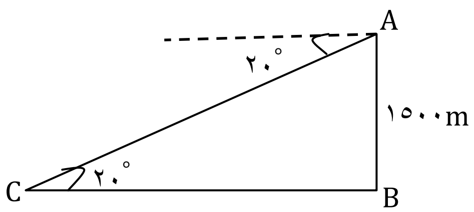
$$\tan ۱۳^{\circ} = \frac{AB}{AC} \to AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \to AC \cong ۸/۶۹\ \text{km}$$



مثال : یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۲۰° باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می کند تا روی زمین بنشیند؟ $(\sin ۲۰^{\circ} = ۰/۳۴)$

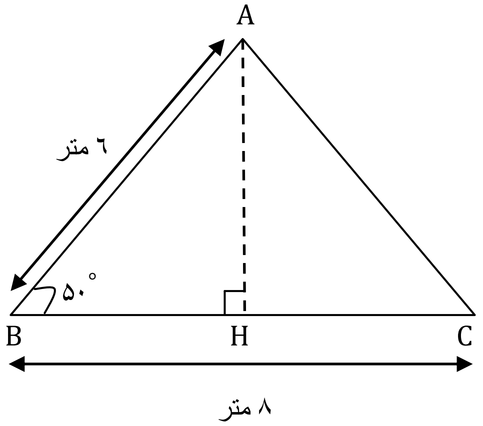
حل) مطابق شکل، اگر هواپیما در نقطهٔ A باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ موازی و مورب، اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۲۰° است و داریم (C محل فرود هواپیما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \sin ۲۰^{\circ} = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



محاسبه مساحت مثلث با داشتن دوضلع و زاویه بین آن ها

می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:



$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ = ۰ / ۷۶$، داریم:

$$\sin\ ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Longrightarrow AH = ۰/۷۶ \times ۶ = ۴ / ۵۶$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۴ / ۵۶ \times ۸ \cong ۱۸ / ۲۴$$

قضیه : در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin A$$

به زبان ساده ، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آنها

اثبات) در مثلث ABD ، ارتفاع BH را رسم می کنیم. داریم:

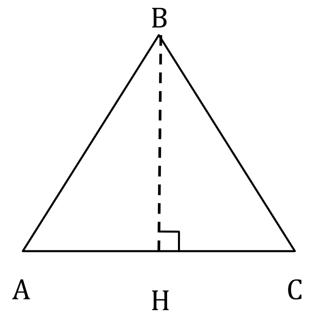
$$s = \frac{۱}{۲} \times BH \times AC \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

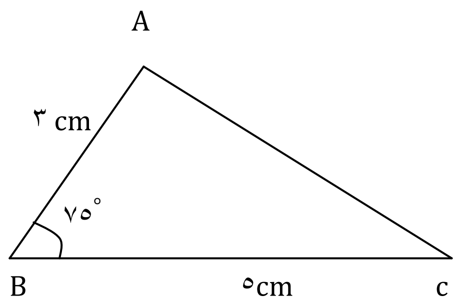
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow BH = AB \times \sin A \quad (۲)$$

$$(۱)(۲) \Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times (AB \times \sin A) \times AC$$

$$= \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin A$$



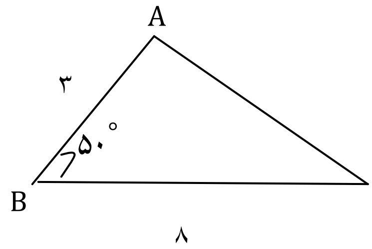
مثال : فرض کنید $\sin ۷۵^\circ = ۰ / ۹۶$. مساحت مثلث ABCدر شکل زیر را به دست آورید.



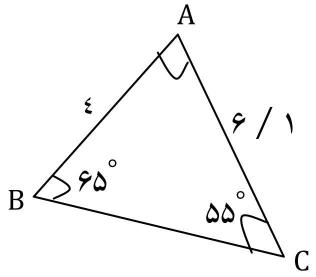
$$S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \sin ۷۵^\circ$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times {}^{B}۰/۹۶ = ۷ / ۲$$

مثال : در هر یک از شکل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید: $(\sin ۵۰^{\circ} = ۰/۷۶)$



الف)



ب)

حل) مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف)

$$S = \frac{۱}{۲} \times BA \times BC \times \sin ۵۰^{\circ} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ \times ۰/۷۶ = ۹/۱۲$$

ب) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است. پس:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^{\circ} \Longrightarrow \widehat{A} + ۶۵^{\circ} + ۵۵^{\circ} = ۱۸۰^{\circ}$$

$$\Longrightarrow \hat{A} = ۱۸۰^{\circ} - ۱۲۰^{\circ} = ۶۰^{\circ}$$

$$\Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times sin ۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶/۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۴/۴}{۴}\sqrt{۳}$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مساحت شکل را به دست آورید.

الف) طول دو ضلع مثلث $۳\sqrt{۲}$ و ۶ و زاویهٔ بین آن ها ۴۵° است .

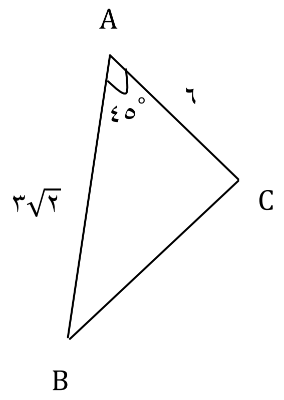
ب) طول اضلاع متوازی اضلاع ۷ و ۱۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۶۰° است .

پ) طول ضلع لوزی ۸ و یک زاویهٔ آن °۳۰ است .

حل الف)

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۴۵^\circ$$

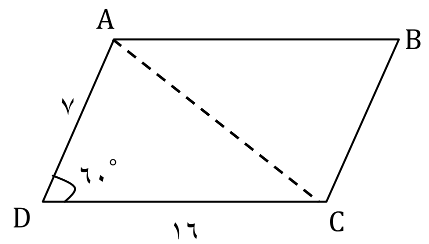
$$= \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹$$



ب) اگر قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$S_{\underset{ADC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times DA \times DC \times \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۱۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۸\sqrt{۳}$$



مساحت متوازی الاضلاع ABCD ، دو برابر مساحت مثلث ADC است. پس:

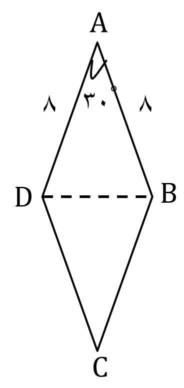
مساحت متوازی الاضلاع ABCD $= ۲ \times ۳۰\sqrt{۳۰} = ۶۰\sqrt{۳}$

پ)اگر قطر لوزی را رسم کنیم، لوزی به دو مثلث یکسان تقسیم می شود:

$$S_{\underset{ABD}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AD \times \sin ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۱۶$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = ۲S_{\underset{ABD}{\Delta}} = ۲ \times ۱۶ = ۳۲$$



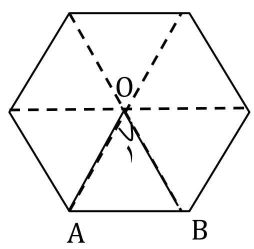
مثال : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع، طول هر سه ضلع برابر a و هر زاویه آن ۶۰° می باشد، بنابراین:

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$

مثال : مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع a را به دست آورید.

حل اگر مرکز شش ضلعی منتظم را به رأس های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می شود مثلث OAB متساوی الاضلاع است . زیرا:



$$O_۱ = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \ , OA = OB$$

$\Longrightarrow$. مثلث OAB متساوی الاضلاع است

$$\Longrightarrow OA = OB = AB = a$$

$$\Longrightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times OA \times OB \times \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$

بنابراین:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = ۶ S_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$$

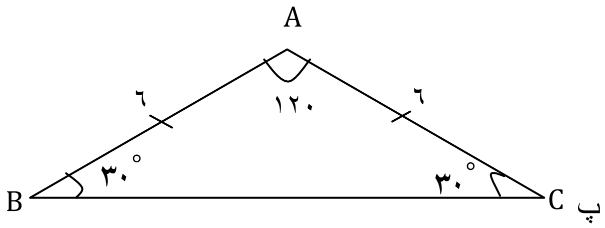
مثال : مساحت شش ضلعی منظم به ضلع ۳ را به دست آورید.

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} ۳^۲ = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

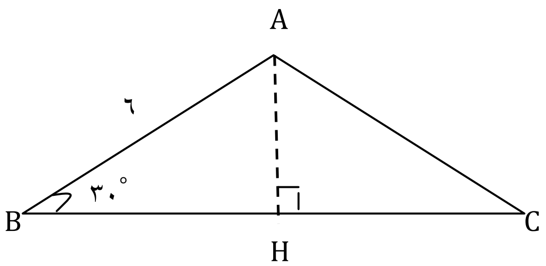
مثال : در مثلث ABC $BC = ۶, AC = ۴,$ و $\hat{C} = ۲۵^\circ$ می باشد، با فرض $\sin ۲۵^\circ = ۰/۴۲$، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

$$S = \frac{۱}{۲} \times CA \times CB \times \sin C = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin ۲۵^\circ = ۱۲ \times ۰/۴۲ = ۵/۰۴$$

مثال : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



حل)مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۳۰^\circ , AC = AB = ۶$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. داریم:

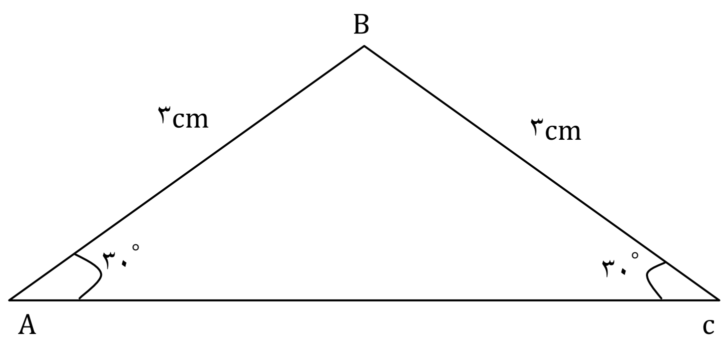
$$\overset{\Delta}{ABH} = \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow AH = AB \times \sin ۳۰^\circ = ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

$$\Longrightarrow BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷$$

$$\Longrightarrow BH = \sqrt{۲۷} = \sqrt{۹ \times ۳} = ۳\sqrt{۳} \Longrightarrow \mathrm{BC} = ۲\mathrm{BH} = ۶\sqrt{۳}$$

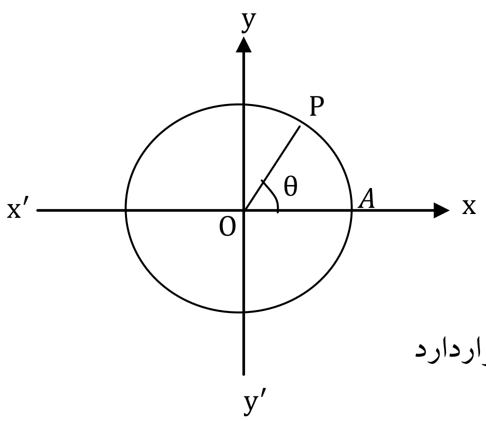
$$\Longrightarrow S = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۳ \times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

تمرین : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیرکه دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوییم.



۱- مرکزدایره در مبدأ مختصات قراردارد

۲- شعاع دایره۱ است

۳- نقطهٔ Aمبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

قرارداد: گر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و اگرحرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.