درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

گزاره

تعریف گزاره جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد. به طور مثال هریک از جملات زیر گزاره هستند:

الف) عدد ۴ فرد است.

ب) اگر هوا ابری باشد، آنگاه باران می‌بارد.

ج) ۹ مربع کامل است و ۱۵ مضرب ۵ است.

د) مجموع هر دو عدد اول همواره عددی اول است.

تذکر جملات سؤالی، امری، عاطفی، تعجبی و نیز جملاتی که دارای ارزش نباشند، گزاره محسوب نمی‌شوند. زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. به طور مثال جملات زیر گزاره نیستند:

الف) علی دانش‌آموز خوبی است.

ب) کتاب را از روی میز بردار.

ج) مداد مربع کامل است.

د) امروز هوا چند درجه است؟

نمایش گزاره

- گزاره‌ها را با یکی از حروف p، q، r، s و ... نمایش می‌دهند. مثال:

p: هوا روشن است.

q: ۵ عددی اول است.

ارزش گزاره

- درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.
- ارزش گزاره درست را با حرف «T» یا «د» و ارزش گزارهٔ نادرست را با «F» یا «ن» نمایش می‌دهند.
- هر گزاره فقط دارای یک ارزش است و نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست.

مثال **ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.**

الف) هر عدد زوج را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد فرد نوشت.

ب) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت (حدس گلدباخ).

ج) هزارمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۵ است.

د) $۵ + ۷ = ۱۰$

پاسخ

الف) این گزاره درست است. چون جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) این گزاره حدس مشهور گلدباخ است و ارزش آن فعلاً بر ما معلوم نیست و دقیقاً نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آن را تعیین کنیم. (حدس به مسائل حل‌نشده‌ای می‌گویند که تاکنون درستی آن‌ها اثبات نشده است و نیز مثال نقضی هم برای آن‌ها پیدا نشده است.)

ج) ارزش این گزاره را نمی‌توان فعلاً تعیین کرد. زیرا نمی‌دانیم هزارمین رقم بعد از ممیز عدد π چه عددی است. ولی اگر روزی بتوان این رقم را مشخص کرد یا این رقم ۵ است که گزاره دارای ارزش درست می‌باشد و یا این رقم ۵ نیست که در این حالت گزاره نادرست است.

د) این گزاره نادرست است چون $۵ + ۷ = ۱۲$ است.

جدول ارزش گزاره‌ها

برای گزارهٔ p دو حالت ارزش گزاره طبق جدول مقابل وجود دارد.

p
د
ن

برای دو گزارهٔ p و q چهار حالت $(4 = 2^2)$ ارزش گزاره مطابق جدول مقابل وجود دارد.

p	q
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

برای سه گزارهٔ p، q و r هشت حالت $(8 = 2^3)$ ارزش گزاره مطابق جدول زیر وجود دارد.

r	q	p
د	د	د
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	د
د	د	ن
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

نکته برای n گزاره، 2^n حالت ارزش گزاره در جدول ارزش وجود دارد.

گزاره‌نما

تعریف جملهٔ خبری است که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود. به طور مثال هر یک از عبارت‌های زیر یک گزاره‌نما هستند:

الف) x عددی زوج است.

ب) $x^2 + 4x \leq 0$

ج) حاصل‌جمع پنج برابر عددی با سه برابر عدد دیگر برابر ۱۰ است. $(5x + 3y = 10)$

تذکر ۱) گزاره‌نما را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم.

۲) معادلات و نامعادلات، همه «گزاره‌نما» هستند.

دامنه متغیر گزاره‌نما

تعریف مجموعه مقادیری است که اگر هریک از آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم، گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود. دامنهٔ متغیر گزاره‌نما را با حرف D نمایش می‌دهند.

مثال دامنهٔ متغیر، هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید.

الف) x عددی زوج است. ب) $x^2 + 4x \leq 0$

پاسخ

الف) مجموعه اعداد صحیح ب) مجموعه اعداد حقیقی

مجموعه جواب گزاره‌نما

تعریف مجموعه عضوهایی از دامنهٔ متغیر است که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود. مجموعه جواب گزاره‌نما را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره $S \subseteq D$ است.

مثال دامنهٔ متغیر و مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای زیر را تعیین کنید.

الف) عدد $(x+1)$ مضرب صحیح پنج است.　ب) x عددی صحیح نیست. $(x \notin \mathbb{Z})$　ج) $4x^2+9x+5=0$

پاسخ

الف)
$D=\mathbb{Z}$
$S=\{\dots,-6,-1,4,9,14,\dots\}=\{x+1=5k : k\in\mathbb{Z}\}=\{x=5k-1 : k\in\mathbb{Z}\}$

ب)
$D=\mathbb{R}$
$S=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

ج) برای تعیین مجموعه جواب این گزاره‌نما باید معادلهٔ درجه دوم $4x^2+9x+5=0$ را حل کنیم.
$D=\mathbb{R}$
$4x^2+9x+5=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-\frac{5}{4}$
$\Rightarrow S=\left\{-1,-\frac{5}{4}\right\}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. **مهم** کدام گزینه یک گزاره را مشخص می‌کند؟

۱) چه باران شدیدی می‌بارد.　۲) نیوتن یک ریاضی‌دان بود.
۳) عدد ۵ را روی تخته سیاه بنویس.　۴) پویا دانش‌آموز خوبی است.

۲. چه تعداد از جملات زیر گزاره هستند؟

الف) آیا معادلهٔ $x^2-3x+8=0$ دارای ریشهٔ حقیقی است؟
ب) درخت یک مکعب کامل است.
ج) سعدی شاعر است.
د) همهٔ اعداد اول فرد می‌باشند.

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۳. ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) هر انسان شش پا، بیش از ۱۰۰۰ سال عمر می‌کند.
۲) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس عدد اول بیاید برابر $\frac{1}{2}$ است.
۳) $\{3\}\in\{1,2,3,4\}$
۴) مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است.

۴. چه تعداد از جملات زیر گزاره‌نما هستند؟

الف) $x>0$　ب) x یک ریاضی‌دان است.　ج) $x+2y=5$

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۵. **مهم** دامنهٔ متغیر کدام گزاره‌نما را می‌توان مجموعهٔ اعداد حقیقی در نظر گرفت؟

۱) $\sqrt{-x}\in\mathbb{Z}$　۲) $\sqrt{x-2}=\frac{2}{x-2}$　۳) $\frac{x+1}{x^2-1}\in\mathbb{N}$　۴) $x\in\mathbb{Z}$

۶. مهم کدام گزینه درست است؟

۱) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{-4}{x} \in \mathbb{N}$ »، مجموعه اعداد طبیعی است.

۲) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x \notin \mathbb{Z}$ »، مجموعه اعداد حقیقی است.

۳) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{x}{x+1} \in \mathbb{Z}$ »، فقط دو عضو صحیح دارد.

۴) مجموعه جواب گزاره‌نمای « x عددی فرد است»، مجموعه اعداد صحیح است.

۷. برای ۵ گزارهٔ p، q، r، s و t چند حالت ارزش گزاره در جدول ارزش وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۲

ترکیب گزاره‌ها

گزارهٔ مرکب

تعریف گزاره‌ای است که از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابطه‌های گزاره‌ای به‌دست می‌آید. مانند گزاره‌های زیر:

- عدد ۵ فرد است و عدد ۶ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۳ اول باشد، آنگاه عدد ۸ مربع کامل است.
- چنین نیست که ۳ عددی گنگ باشد.

رابطه‌های گزاره‌ای عبارتند از:

الف) ناقض با علامت « $\sim$ » به معنی «چنین نیست که»

ب) فاصل با علامت « $\vee$ » به معنی «یا»

ج) عاطف با علامت « $\wedge$ » به معنی «و»

د) شرطی با علامت « $\Rightarrow$ » به معنی «اگر، آنگاه»

هـ) دوشرطی با علامت « $\Leftrightarrow$ » به معنی «اگر و تنها اگر» یا «اگر، آنگاه و برعکس»

تذکر نقیض فقط روی یک گزاره اثر می‌کند در حالی که رابطه‌های دیگر روی دو و یا چند گزاره اثر می‌کنند.

نقیض یک گزاره

- نقیض گزارهٔ p را که با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم، گزاره‌ای است که ارزش آن خلاف ارزش p است.
- به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می‌شود و $\sim p$ را می‌خوانیم «چنین نیست که p». مثلاً نقیض گزارهٔ «۳ عددی اول است» می‌شود «۳ عددی اول نیست».
- جدول ارزش برای نقیض یک گزاره به‌صورت مقابل است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

دو گزاره هم‌ارز

- اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند، آن‌ها را هم‌ارز می‌گوییم و می‌نویسیم $p \equiv q$. مثلاً طبق جدول مقابل می‌بینیم دو گزارهٔ p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز یکدیگرند و می‌نویسیم $p \equiv \sim(\sim p)$.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب فصلی دو گزاره

از ترکیب دو گزارهٔ p و q با رابط منطقی « ∨ » ترکیب فصلی دو گزاره تشکیل می‌شود که به‌صورت $p \vee q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p یا q. مثلاً برای دو گزارهٔ p و q به‌صورت زیر:

p: ۶ عددی اول است.

q: $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

ترکیب فصلی دو گزاره یعنی $p \vee q$ عبارت است از: «۶ عددی اول است یا $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.»

نکته ارزش گزارهٔ فصلی $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند و در بقیهٔ حالات ارزش $p \vee q$ درست است.

جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب عطفی دو گزاره

از ترکیب دو گزارهٔ سادهٔ p و q با رابط منطقی « ∧ » ترکیب عطفی دو گزاره تشکیل می‌شود که به‌صورت $p \wedge q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p و q.

نکته ارزش گزارهٔ عطفی $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در بقیهٔ حالات نادرست است.

جدول ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

قوانین دمورگان در منطق ریاضی

برای دو گزارهٔ p و q داریم:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

مثال اگر ارزش گزاره‌های p و $\sim (p \wedge \sim q)$ درست باشند، آنگاه ارزش گزارهٔ q را تعیین کنید.

پاسخ

$$\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim (\sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv T$$

چون $p \equiv T$ پس $\sim p \equiv F$ و با توجه به اینکه گزارهٔ $\sim p \vee q$ دارای ارزش درست است، لذا ارزش q باید درست باشد، چون اگر q نادرست باشد، گزارهٔ $\sim p \vee q$ نادرست می شود که مخالف فرض سؤال است.

ترکیب شرطی دو گزاره

تعریف گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » را ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q می‌گوییم و می‌خوانیم «اگر p آنگاه q». در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم. مثلاً گزاره‌های مرکب زیر ترکیب شرطی هستند:

الف اگر x عددی اول باشد، آنگاه $x^{۲}$ نیز عددی اول است.

ب اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر وتر نصف وتر است.

نکته ۱ هرگاه در ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ ارزش p (مقدم) نادرست باشد، گزارهٔ مرکب همواره درست است و ارزش آن به ارزش q بستگی ندارد. در این صورت می‌گویند ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۳ جدول ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ به‌صورت مقابل است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

تذکر گزارهٔ $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

مثال با رسم جدول ارزش گزاره‌ها، درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را نشان دهید.

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ ج) $p \wedge \sim p \equiv F$

پاسخ

الف)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

$\Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ب)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

$\Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

ج)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

$\Rightarrow p \wedge \sim p \equiv F$

مثال ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ زوج باشد، آنگاه a عددی زوج است.

پاسخ به جای اثبات این حکم عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم، چون هم‌ارزند. یعنی:

($a^۲$ عددی فرد است $\Leftarrow$ a عددی فرد است) $\equiv$ (a عددی زوج است $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی زوج است)

هر عدد فرد را می‌توان به‌صورت $(۲k-۱)$ نوشت که $k \in \mathbb{Z}$ است، پس اگر a عددی فرد باشد داریم:

$$a = ۲k-۱ \Rightarrow a^۲ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ = ۴k^۲ - ۴k + ۲ - ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ - ۲k + ۱}_{k' \in \mathbb{Z}}) - ۱ = ۲k' - ۱$$

پس عدد $a^۲$ نیز فرد است.

ترکیب دوشرطی دوگزاره

برای دو گزارهٔ p و q، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشرطی p و q می‌نامیم و به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانیم:

«اگر p، آنگاه q و برعکس»، « p اگر و تنها اگر q»، « p شرط لازم و کافی برای q است»

به طور مثال گزاره‌های زیر ترکیب دوشرطی گزاره‌ها هستند:

الف) ۵ عددی زوج است $\Leftrightarrow$ ۶ عددی اول است.

ب) اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی صفر شود آنگاه لااقل یکی از آن‌ها برابر صفر است و برعکس.

ج) شرط لازم و کافی برای آنکه پاره‌خطی روی دو ضلع یک مثلث قطعات متناسب ایجاد کند، این است که با ضلع سوم مثلث موازی باشد.

نکته ارزش گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند. پس جدول ارزش گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

هم‌ارزی‌های مهم در گزاره‌ها

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی‌های منطقی زیر را می‌توان ثابت کرد. از نظر جدول دو گزاره هم‌ارزند اگر و تنها اگر ستون ارزش آن‌ها یکی باشد.

توجه F گزاره همیشه نادرست و T گزاره همیشه درست است.

$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$
قوانین جابه‌جایی:	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
قوانین شرکت‌پذیری:	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
قوانین توزیع‌پذیری:	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
قوانین جذب:	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	

مثال بدون استفاده از جدول، ارزش گزاره $p \wedge ((\sim (p \vee q)) \vee (\sim (q \Rightarrow p)))$ را تعیین کنید.

پاسخ

$$p \wedge ((\sim (p \vee q)) \vee (\sim (q \Rightarrow p))) \equiv p \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)) \equiv (p \wedge (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim p)) \equiv$$
$$((p \wedge \sim p) \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv (F \wedge \sim q) \vee ((p \wedge \sim p) \wedge q) \equiv F \vee (F \wedge q) \equiv F \vee F \equiv F$$

۸. اگر T گزارهٔ همیشه درست و F گزارهٔ همیشه نادرست باشد، کدام هم‌ارزی زیر همواره برقرار نیست؟

۱) $T \wedge F \equiv F$ ۲) $T \vee F \equiv T$ ۳) $P \wedge T \equiv P$ ۴) $P \vee T \equiv P$

۹. مهم ارزش کدام گزاره همیشه درست است؟

۱) $(۳ < -۲) \wedge (x^۲ + ۵ \neq ۰)$ ۲) $(۲ \in \{۲,۳,۴\}) \wedge \left(\frac{۲}{۴} \neq \frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(\frac{۵}{۰} \in \mathbb{R}\right) \vee (۵ \times ۰ \neq ۰)$ ۴) $\left(-\frac{۲}{۳} \in \mathbb{Q}\right) \vee (۳ \times ۷ = ۱۲)$

۱۰. کدام هم‌ارزی درست است؟

۱) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ ۲) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ ۳) $q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q$ ۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۱. مهم اگر گزاره‌های $p \vee r$، $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند، کدام گزارهٔ زیر درست است؟

۱) p ۲) q ۳) r ۴) $p \wedge \sim q$

۱۲. مهم چندتا از گزاره‌های شرطی زیر درست هستند؟

الف) اگر مثلث سه ضلع داشته باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۲۰۰° است.

ب) اگر ۶ عدد زوج باشد، آنگاه ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است.

ج) اگر ۲ فرد باشد، آنگاه مستطیل دو قطر مساوی ندارد.

د) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه π یک عدد حقیقی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳. کدام گزاره نادرست است؟

۱) $۳ < ۴ \Rightarrow ۴ < ۵$ ۲) $۳ < ۴ \Rightarrow -۳ < -۵$ ۳) $۵ < ۳ \Rightarrow ۲ \in \{۱,۲,۳\}$ ۴) $۵ < ۳ \Rightarrow \{۲\} \subseteq \{۱,۴\}$

۱۴. مهم اگر گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام گزارهٔ زیر درست است؟

۱) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ ۲) $(p \wedge \sim q) \vee r$ ۳) $\sim q \Rightarrow \sim p$ ۴) $(p \vee \sim q) \wedge r$

۱۵. اگر گزارهٔ $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزارهٔ $(r \wedge q) \Rightarrow s$ چگونه است؟

۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است.

۳) بستگی به ارزش گزاره‌های r و s دارد. ۴) با گزارهٔ $r \Rightarrow s$ هم‌ارزش است.

۱۶. نکته‌دار گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ چگونه است؟

۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است.

۳) هم‌ارز گزارهٔ $p \Rightarrow q$ است. ۴) هم‌ارز گزارهٔ $q \Rightarrow p$ است.

۱۷. اگر p گزاره‌ای نادرست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزارهٔ زیر درست است؟

۱) $p \wedge (q \vee r)$ ۲) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ۳) $(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$ ۴) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

۱۸. مهم اگر p و q دو گزاره باشند، کدام گزارهٔ شرطی زیر همواره درست است؟

۱) $p \Rightarrow p \vee q$ ۲) $p \Rightarrow \sim (p \vee q)$ ۳) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ ۴) $p \Rightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

۱۹. گزارهٔ $\sim p \wedge (p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۲۰. مهم نقیض گزارهٔ «اگر x زوج باشد، آنگاه $x+۱$ فرد خواهد بود» کدام گزاره است؟

۱) نه x زوج است و نه $x+۱$ فرد است. ۲) x زوج است و $x+۱$ فرد نیست.

۳) هم x زوج است و هم $x+۱$ فرد است. ۴) x زوج نیست و $x+۱$ فرد است.

۲۱. دشوار گزارهٔ $p \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$ چگونه است؟

۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است.

۳) هم‌ارزش با گزارهٔ p است. ۴) هم‌ارز با گزارهٔ $p \Rightarrow q$ است.

۲۲. نکته‌دار گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟

۱) $(p \vee q) \vee r$ ۲) $(p \vee q) \wedge r$ ۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ۴) $(p \wedge q) \wedge r$

۲۳. اگر p گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزارهٔ زیر درست است؟

۱) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ ۲) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ ۳) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee r)$ ۴) $(q \wedge r) \Rightarrow \sim p$

۲۴. دشوار گزارهٔ $p \Rightarrow [q \Rightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q)]$ چگونه است؟

۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است.

۳) هم‌ارز گزارهٔ $p \Rightarrow q$ است. ۴) هم‌ارز گزارهٔ $\sim p \Rightarrow q$ است.

۲۵. مهم کدام جدول ارزش گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱)

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۲)

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۳)

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

۴)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲۶. مهم چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر $b \in \{a\}$، آنگاه $a = b$ و برعکس.

ب) اگر عدد ۳۱ اول باشد، آنگاه ۳۱ بر دو قابل قسمت است و برعکس.

ج) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ بر دو قابل قسمت است و برعکس.

د) ۳ اول نیست اگر و تنها اگر ۳ مجذور کامل است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷. اگر $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، کدام گزارهٔ زیر نادرست است؟

۱) $(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ ۲) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$ ۳) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ ۴) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$

۲۸. مهم عکس نقیض گزارهٔ $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow S)$ کدام است؟

۱) $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \sim S)$ ۲) $(r \Leftrightarrow S) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

۳) $(\sim r \Leftrightarrow S) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)$ ۴) $(\sim r \Leftrightarrow \sim S) \Rightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

سورها

تعریف عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» را سور می‌گویند.

- این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نما قرار گیرند و گزاره‌نما را به گزاره با ارزش درست یا نادرست تبدیل کنند.
- «به ازای هر» را سور عمومی و «برای بعضی مقادیر» را سور وجودی می‌گوییم.
- سور عمومی را با نماد $\forall$ و سور وجودی را با نماد $\exists$ نشان می‌دهیم.

مثال هریک از سورهای زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) برای هر عدد حقیقی x داریم $x^۲+۱\geq ۲x$.

ب) مربع بعضی از اعداد حقیقی کوچکتر از صفر است.

ج) هر عدد اولی، فرد است.

پاسخ

الف) $\forall x\in\mathbb{R}: x^۲+۱\geq ۲x$

ب) $\exists x\in\mathbb{R}: x^۲<۰$

ج) $\forall x\in P: x=۲k-۱ \quad (k\in\mathbb{Z})$

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند. یعنی هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثلاً گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{۱}{x}\in\mathbb{R}$ نادرست است، زیرا $x=۰$ برای آن یک مثال نقض است چون $\frac{۱}{۰}\notin\mathbb{R}$. ولی گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}: x^۲\geq ۰$ درست است، زیرا هیچ مثال نقضی برای این گزاره نیست و به بیان دیگر، برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{R})$ گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود.

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثلاً گزارهٔ $\exists x\in\mathbb{R}: x^۲+۱=۰$ نادرست است چون مجموعه جواب این گزاره‌نما تهی است. به بیان دیگر معادلهٔ $x^۲+۱=۰$ جواب حقیقی ندارد.

نقیض گزاره‌های سوری

۱) $\sim(\forall x;p(x))\equiv\exists x;\sim p(x)$

۲) $\sim(\exists x;p(x))\equiv\forall x;\sim p(x)$

مثال نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\exists x\in\mathbb{R};x^۲<۰$

ب) $\forall x\in\mathbb{R};x+\frac{۱}{x}\geq ۲$

ج) $\exists x\in\mathbb{R};(x>۰\wedge x^۲\leq ۴)$

پاسخ

الف) $\sim(\exists x\in\mathbb{R};x^۲<۰)\equiv\forall x\in\mathbb{R};x^۲\geq ۰$

ب) $\sim\left(\forall x\in\mathbb{R};x+\frac{۱}{x}\geq ۲\right)\equiv\exists x\in\mathbb{R};x+\frac{۱}{x}<۲$

ج) $\sim(\exists x\in\mathbb{R};x>۰\wedge x^۲\leq ۴)\equiv\forall x\in\mathbb{R};\sim(x>۰\wedge x^۲\leq ۴)\equiv\forall x\in\mathbb{R};x\leq ۰\vee x^۲>۴$

۲۹. اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -1\le x\le 4\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $\exists x\in A\,;\,x+5=3$
۲) $\forall x\in A\,;\,x+4<8$
۳) $\exists x\in A\,;\,\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$
۴) $\forall x\in A\,;\,x^2>0$

۳۰. مهم کدام گزارهٔ سوری زیر نادرست است؟

۱) $\exists x\in\mathbb{R}\,;\,\frac{x-4}{3}=0$
۲) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$
۳) $\exists x\in(0,+\infty)\,;\,x^2<x$
۴) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x+\frac{1}{x}\le -2\vee x+\frac{1}{x}\ge 2$

۳۱. ارزش کدام گزارهٔ سوری زیر درست است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,\frac{x^2}{x}=x$
۲) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$
۳) $\forall x,y\in\mathbb{R}\,;\,x^2+y^2>0$
۴) $\forall x\in\mathbb{N}\,;\,\frac{x}{x+1}<1$

۳۲. مهم نقیض گزاره‌های سوری $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x^2=-1)$ و $(\forall x\in\mathbb{Q}\,;\,x^2\ge x)$ به ترتیب کدامند؟

۱) $(\forall x\in\mathbb{Q}\,;\,x^2<x)$ و $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\ne -1)$
۲) $(\exists x\in\mathbb{Q}\,;\,x^2\ge x)$ و $(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2=-1)$
۳) $(\exists x\in\mathbb{Q}\,;\,x^2<x)$ و $(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\ne -1)$
۴) $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x^2<x)$ و $(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\ne -1)$

۳۳. دشوار نقیض گزارهٔ $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x>1)\vee(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2>0)$ کدام است؟

۱) $(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x\le 1)\vee(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\le 0)$
۲) $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x\le 1)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\le 0)$
۳) $(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x\le 1)\wedge(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\le 0)$
۴) $(\exists x\in\mathbb{R}\,;\,x\le 1)\vee(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2\le 0)$

۳۴. مهم نقیض گزارهٔ $\exists x\in\mathbb{R}\,;\,(x-2=0)\Leftrightarrow(x+2=0)$ کدام است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x-2\ne 0)\Leftrightarrow(x+2=0)$
۲) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x-2\ne 0)\Leftrightarrow(x+2\ne 0)$
۳) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x-2=0)\Leftrightarrow(x+2\ne 0)$
۴) گزینهٔ ۱ و ۳ صحیح است.

۳۵. نقیض گزارهٔ $\forall x,y\in\mathbb{R}\,;\,(xy=0\Leftrightarrow x=0\vee y=0)$ کدام است؟

۱) $\forall x,y\in\mathbb{R}\,;\,(xy\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0\wedge y\ne 0)$
۲) $\exists x,y\in\mathbb{R}\,;\,(xy\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0\vee y\ne 0)$
۳) $\exists x,y\in\mathbb{R}\,;\,(xy=0\Leftrightarrow x\ne 0\wedge y\ne 0)$
۴) $\exists x,y\in\mathbb{R}\,;\,(xy\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0\wedge y\ne 0)$

۳۶. عکس نقیض گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x>1\wedge x<3)\Rightarrow(x=2)$ کدام است؟

۱) $(x\ne 2)\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x>1\wedge x<3)$
۲) $(x\ne 2)\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,;\,(x\le 1\vee x\ge 3)$
۳) $(x\ne 2)\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\,;\,(x\le 1\wedge x\ge 3)$
۴) $(x\ne 2)\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,;\,(x>1\wedge x<3)$

درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه

زیرمجموعه

تعریف فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این صورت مجموعهٔ A را یک زیرمجموعه از B می‌نامیم، هرگاه هر عضـو A، عضوی از B باشد.

- اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، می‌نویسیم $A \subseteq B$.
- چنانچه عضوی در A باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد، در این صورت A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

مثال فرض کنید $A = \{a , \{a\} , \{a,b\} , \{b\}\}$. کدام‌یک از روابط زیر درست است؟

الف) $\{\{a\}\} \subseteq A$ ب) $\{a,b\} \subseteq A$ ج) $\{a,\{b\}\} \subseteq A$ د) $\varnothing \subseteq A$

پاسخ

الف) درست است، چون $\{a\} \in A$.

ب) نادرست است، چون $b \notin A$، پس $\{a , b\} \not\subseteq A$.

ج) درست است، چون $a \in A , \{b\} \in A$.

د) درست است چون $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

- اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{\varnothing , \{\varnothing\} , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}\}$ کدام است؟

پاسخ

این مجموعه سه عضو دارد پس دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است.

مثال اگر سه عضو از مجموعهٔ A را حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۵۶ عدد کم می‌شود. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

پاسخ فرض کنید مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، پس 2^n زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو از مجموعهٔ A کـم کـنیم، مجموعهٔ حاصل دارای $(n-3)$ عضو است و 2^{n-3} زیرمجموعه دارد و با توجه به فرض مسئله داریم:

$$2^{n-3} = 2^n - 56 \Rightarrow 2^n - 2^{n-3} = 56 \Rightarrow 2^n(1-2^{-3}) = 56 \Rightarrow 2^n\left(1-\frac{1}{8}\right) = 56 \Rightarrow 2^n\left(\frac{7}{8}\right) = 56 \Rightarrow 2^n = 64$$

پس مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است.

مثال تعداد زیرمجموعه‌های یـک مجموعـهٔ $(2n-1)$ عضـوی، ۹۶ عـدد کمتـر از تعـداد زیرمجموعـه‌هـای یـک مجموعـهٔ $(2n+1)$ عضوی است. در این صورت n کدام است؟

پاسخ

$$2^{2n-1} = 2^{2n+1} - 96 \Rightarrow 2^{2n+1} - 2^{2n-1} = 96 \Rightarrow 2^{2n}\left(2-\frac{1}{2}\right) = 96 \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{3}{2}\right) = 96 \Rightarrow 2^{2n} = 64 = 2^6 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۷عضوی آن برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ ۲عضوی دارد؟

پاسخ اگر تعداد اعضای مجموعهٔ مورد نظر را n در نظر بگیریم، داریم:

$$\binom{n}{۵}=\binom{n}{۷}\xrightarrow{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}\binom{n}{n-۵}=\binom{n}{۷}\Rightarrow n-۵=۷\Rightarrow n=۱۲$$

پس مجموعه دارای ۱۲ عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times ۱۱}{۲}=۶۶$$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

$$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)$$
$$A\not\subseteq B\Leftrightarrow \exists x;(x\in A\wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از مجموعهٔ A در نظر بگیریم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم x در B وجود دارد. چون x دلخواه بوده است، در واقع نشان داده شده است که هر عضو A در B وجود دارد و در نتیجه $A\subseteq B$ است.

مثال: فرض کنیم A، B، C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، آنگاه $A\cap C\subseteq B\cap D$.

اثبات: برای اثبات $A\cap C\subseteq B\cap D$ باید ثابت کنیم $\forall x;(x\in (A\cap C)\Rightarrow x\in (B\cap D))$.

بنابراین داریم:

$$\forall x;(x\in(A\cap C))\Rightarrow\begin{cases}x\in A\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\\ \wedge \qquad\qquad\qquad \wedge\\ x\in D\xrightarrow{C\subseteq D}x\in D\end{cases}\Rightarrow x\in B\wedge x\in D\Rightarrow x\in(B\cap D)$$

در نتیجه داریم:

$$A\cap C\subseteq B\cap D$$

چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها

برای مجموعه‌های A، B، C و D با مجموعهٔ مرجع U ویژگی‌های زیر را می‌توان با روش عضوگیری دلخواه اثبات کرد:

۱	$A\subseteq A$ هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.
۲	$\varnothing\subseteq A$ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.
۳	$A\subseteq B\,,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$
۴	$A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$ (A' و B' متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند.)
۵	$A\subseteq A\cup B$
۶	$A-B\subseteq A$
۷	$A\subseteq B\,,C\subseteq D\Rightarrow\begin{cases}A\cup C\subseteq B\cup D\\ \text{و}\\ A\cap C\subseteq B\cup D\end{cases}$
۸	$A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cap C\subseteq B\cap C\\ \text{و}\\ A\cup C\subseteq B\cup C\end{cases}$
۹	$A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$

مثال اگر $(A\cup B')\subseteq(A\cap C)$، در این صورت $A\cap B'$ با کدام مجموعه برابر است؟

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B')\subseteq(A\cap C)\Rightarrow(A\cup B')\subseteq A\\ \text{می‌دانیم}: A\subseteq(A\cup B')\end{array}\right\}\Rightarrow(A\cup B')=A\Rightarrow B'\subseteq A\Rightarrow A\cap B'=B'$$

افراز یک مجموعه

گوییم مجموعهٔ غیرتهی A به n زیرمجموعهٔ $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است، اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\forall 1\le i\le n; A_i\neq\varnothing \Leftrightarrow$ (هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند)

۲) $\forall i, j; A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)\Leftrightarrow$ (هیچ دو زیرمجموعه‌ای اشتراک نداشته باشند)

۳) $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A\Leftrightarrow$ (اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها برابر مجموعهٔ A شود)

مثال کلیهٔ افرازهای مجموعهٔ $A=\{1,2,3\}$ را بنویسید.

پاسخ

الف) $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

ب) $\{1\}, \{2,3\}$

ج) $\{2\}, \{1,3\}$

د) $\{3\}, \{1,2\}$

هـ) $\{1,2,3\}$

همان‌طور که می‌بینیم برای مجموعهٔ A پنج افراز می‌توانیم بنویسیم.

مثال چند افراز متمایز از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ وجود دارد که شامل یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد؟

پاسخ اگر افرازی از مجموعهٔ ۵ عضوی A بخواهد شامل یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد، بخش دیگر افراز یا باید دو مجموعهٔ یک عضوی باشد و یا یک مجموعهٔ دو عضوی.

می‌دانیم $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$ حالت می‌توان یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ ۵ عضوی انتخاب کرد. یکی از این زیرمجموعه‌ها را مثلاً $\{a,b,c\}$ انتخاب می‌کنیم. با این زیرمجموعه دو افراز متمایز $(\{a,b,c\}, \{d,e\})$ و $(\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\})$ را می‌توان نوشت. به طریق مشابه با هر کدام از ۹ زیرمجموعهٔ دیگر نیز می‌توان ۲ افراز نوشت. پس در کل به تعداد $10\times2=20$ افراز متمایز وجود دارد که در آن‌ها یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد.

دو مجموعه مساوی

دو مجموعهٔ A و B با مرجع U را مساوی هم می‌گوییم هرگاه هر عضو A عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد، یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$. در این صورت می‌نویسیم $A=B$.

با نماد ریاضی تساوی دو مجموعه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$$

مثال کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی هستند؟

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^3-x=0\right\}$ $\quad C=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad B=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2\le1\right\}$ $\quad A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-1=0\right\}$

پاسخ

مجموعهٔ A: $x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow A=\{-1,1\}$

مجموعهٔ B: $x^2\le1\Rightarrow|x|\le1\Rightarrow-1\le x\le1\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}B=\{-1,0,1\}$

مجموعهٔ C: $\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=1, x=-1\Rightarrow C=\{-1,1\}$

مجموعهٔ D: $x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0, x=\pm1\Rightarrow D=\{-1,0,1\}$

همان‌طور که می‌بینیم $A=C$ و $B=D$ است.

مثال اگر دو مجموعهٔ $A=\{۸,۱,x+y\}$ و $B=\{۱,۴,x-۳y\}$ با هم مساوی باشند، در این صورت x و y را بیابید.

پاسخ چون $A=B$، پس باید اعضای دو مجموعه یکسان باشند. یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+y=۴\\x-۳y=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+۳y=۱۲\\x-۳y=۸\end{cases}$$
$$۴x=۲۰\Rightarrow x=۵\Rightarrow ۵+y=۴\Rightarrow y=-۱$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۷. مهم اگر $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\},\{a,b\},\{b\}\}$، کدام رابطهٔ زیر نادرست است؟

۱) $\{a,\{a\}\}\in A$ ۲) $\{a,\{a\}\}\subseteq A$ ۳) $\{a,b\}\in A$ ۴) $\{a,b\}\subseteq A$

۳۸. با توجه به مجموعهٔ $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\{\varnothing\}\subseteq A\ ,\ \{\varnothing\}\not\in A$ ۲) $A-\varnothing=\{\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$

۳) مجموعهٔ A دارای ۱۶ زیرمجموعه است. ۴) $A-\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۳۹. اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$ و $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۴)*

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

۴۰. مهم اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $(A\cap B)\subseteq X\subseteq(A\cup B)$، تعداد مجموعه‌های X کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۱. مهم اگر $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A باشد، در این صورت مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $(B-A)$ کدام است؟

۱) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$ ۲) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ۳) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

۴۲. اگر دو عضو متمایز به مجموعهٔ A اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد اضافه می‌شود. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۳. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A از تعداد عضوهایش ۲۴۸ واحد بیشتر است. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه چند برابر تعداد عضوهایش است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۴۴. مهم اگر به یک مجموعهٔ nعضوی ۴ عضو جدید افزوده شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن به اندازهٔ ۲۴۰ بیشتر می‌شود. n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۵. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $k+۱$عضوی ۴۸ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $k-۱$عضوی است. مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۶. مهم اگر B مجموعهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A باشد و مجموعهٔ B دارای ۲۵۶ زیرمجموعه باشد، در این صورت مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۷. مجموعهٔ $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۲)*

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۸. مهم مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ دارای چند زیرمجموعهٔ شامل عضو a و فاقد عضوهای c و d است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۴۹. اگر از مجموعهٔ nعضوی A سه عضو حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۱۲ واحد کم می‌شود. A چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۰. دشوار مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع کوچکترین و بزرگترین عضو آن برابر ۱۱ شود؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۵۱. در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ بزرگترین عضو عدد اول است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۵۲. مهم مجموعهٔ $A=\{۱,۲,...,۹\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که هر یک از آن زیرمجموعه‌ها حداقل یکی از اعداد ۳ و ۵ را شامل بوده و هیچ یک از اعداد ۷ و ۸ را شامل نباشد؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۶ ۳) ۹۷ ۴) ۹۸

۵۳. اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ A با تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی آن برابر باشد، مجموعهٔ A دارای چند زیرمجموعه است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۴۸

۵۴. مهم چنانچه دو عضو جدید به مجموعهٔ A بیفزاییم، تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی آن ۳۶ واحد بیشتر خواهد شد. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۵. دشوار مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۵\}$ را در نظر بگیرید. A چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی دارد که ۴ و ۱۲ کوچکترین و بزرگترین عضو آن‌ها باشند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۵۶. دشوار چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,...,۲۰\}$ وجود دارد به طوری که اعضای آن جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰

۵۷. مهم در یک مجموعهٔ ۵ عضوی تعداد زیرمجموعه‌هایی که بیش از دو عضو داشته باشند کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

۵۸. اگر A مجموعهٔ اعداد دورقمی و $B=\{۷k \mid k\in A\}$، آنگاه مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های $(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۵۹. اگر $A=\{x \mid x=۳k\ ,\ k\in C\}$ ، $B=\{x \mid x=۵k\ ,\ k\in C\}$ و C مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۵ باشد، مجموعهٔ $(A\cap B)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۵

۶۰. مهم اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$، مجموعهٔ $A-\{B\}$ چند زیرمجموعهٔ غیرتهی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۱. اگر $A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ و B مجموعهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A باشد، آنگاه مجموعهٔ $B-A$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۳۱ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۶۲. مهم اگر $A\subseteq B$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B'\subseteq A'$ ۲) $A'\cup B=U$ ۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $A'\cap B=\varnothing$

۶۳. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آنگاه $(A-B)\subseteq A$

۲) اگر $A\cup B=\varnothing$ باشد، آنگاه هر دو مجموعهٔ A و B تهی هستند.

۳) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آنگاه همواره $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$.

۴) اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد، آنگاه حداقل یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است.

۶۴. مهم چه تعداد از گزاره‌های شرطی زیر درست است؟

الف) $A\subseteq B\cup C\Rightarrow A\subseteq B$ یا $A\subseteq C$

ب) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

ج) $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

د) $A-C=B-C\Rightarrow A=B$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵. مهم مجموعهٔ اعداد طبیعی به سه مجموعهٔ A، B و C افراز شده است. $A=\{6k+1, k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{6k-1, k\in\mathbb{N}\}$، کدام عدد طبیعی به مجموعهٔ C تعلق دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۹ ۳) ۳۳ ۴) ۳۷

۶۶. کدام دو مجموعهٔ یک افراز مجموعهٔ اعداد صحیح است؟

۱) مجموعهٔ اعداد مضرب ۳ و مجموعهٔ اعداد مضرب ۵

۲) مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ حاصل از قرینهٔ اعداد طبیعی

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح فرد و مجموعهٔ اعداد صحیح زوج

۴) مجموعهٔ حاصل از مضارب صحیح اعداد اول و مجموعهٔ اعداد فرد

۶۷. مهم مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ چند افراز دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۶۸. مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند افراز دارد به طوری که در هر یک از آن افرازها دو عضو d و c در یک مجموعه از افرازها قرار گیرند؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۶۹. مهم مجموعهٔ $A=\{2,3,4,5,6\}$ را به چند طریق می‌توان به دو زیرمجموعه افراز کرد که دو عضو ۲ و ۳ در یک مجموعه قرار داشته باشند؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۷۰. مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را به چند طریق می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۱. مجموعه‌ای دارای ۱۵ عضو است. این مجموعه را به ۹ زیرمجموعه افراز کرده‌ایم. حداکثر عضو یکی از زیرمجموعه‌ها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۲. تعداد افرازهای دو مجموعه‌ای، مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۷۳. مهم تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل مجموعه‌های دوعضوی و سه‌عضوی باشند، کدام است؟
(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۴. دشوار روی مجموعه‌ای n عضوی، حداکثر ۷۲ افراز، شامل حداقل یک مجموعهٔ $(n-2)$ عضوی می‌توان پیدا کرد. n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۷۵. یک از افرازهای مجموعهٔ A به‌صورت $\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{c\}$ است. تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک‌عضوی باشند، کدام است؟
(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۶. مهم اگر دو مجموعهٔ $A=\{7,2a+3b\}$ و $B=\{9,3a-2b\}$ مساوی باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۷. چهار مجموعهٔ $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^2-1=0\right\}$، $B=\left\{x \mid \left(\frac{-1}{x}\in\mathbb{N}\right)\wedge(x\in\mathbb{Z})\right\}$، $C=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x^2\le 1\right\}$ و $D=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x^3+1=0\right\}$ مفروض هستند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $B=C$ ۳) $A=D$ ۴) $B=D$

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

گزاره

۱. **گزینهٔ ۲** گزینهٔ ۱، ۳ و ۴ به ترتیب جملات تعجبی، امری و عاطفی هستند که گزاره محسوب نمی‌شوند.

۲. **گزینهٔ ۲** جملهٔ (الف) سؤالی است پس گزاره نیست.
جملهٔ (ب) دارای ارزش درست یا نادرست بودن نیست، پس گزاره نیست.
ولی جملات (ج) و (د) جملهٔ خبری هستند که دارای ارزش درست یا نادرست هستند، پس گزاره‌اند.

۳. **گزینهٔ ۳** برای اینکه گزارهٔ گزینهٔ ۳ درست باشد، باید عضو $\{۳\}$ در مجموعه باشد، که این چنین نیست. توجه داشته باشید گزینهٔ ۱ گزاره‌ای درست است. چون برای اینکه این گزاره نادرست باشد، باید انسان شش‌پایی پیدا کنیم که کمتر از ۱۰۰۰ سال عمر کرده باشند.

۴. **گزینهٔ ۴** هر سه جملهٔ (الف)، (ب) و (ج) با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شوند پس هر سه جمله گزاره‌نما هستند.

۵. **گزینهٔ ۴**

گزینهٔ ۱ : $\sqrt{-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow D = (-\infty, ۰]$

گزینهٔ ۲ : $\sqrt{x-۲} = \dfrac{۲}{x-۲} \Rightarrow D = (۲, +\infty)$

گزینهٔ ۳ : $\dfrac{x+۱}{x^۲-۱} \in \mathbb{N} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$

گزینهٔ ۴ : $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

۶. **گزینهٔ ۳** از مجموعهٔ اعداد صحیح، فقط به ازای $x = ۰$ و $x = -۲$ گزاره‌نمای $\dfrac{x}{x+۱} \in \mathbb{Z}$ به یک گزارهٔ باارزش درست تبدیل می‌شود. پس مجموعه جواب این گزاره‌نما $S = \{-۲, ۰\}$ است.

۷. **گزینهٔ ۴** برای ۵ گزاره به تعداد $۲^۵$ حالت ارزش گزاره در جدول ارزش وجود دارد.

ترکیب گزاره‌ها

۸. **گزینهٔ ۴** گزارهٔ $p \vee T$ همواره درست است و هم‌ارز گزارهٔ p نیست.

۹. **گزینهٔ ۴** گزارهٔ $\left(-\dfrac{۲}{۳} \in \mathbb{Q}\right)$ درست و گزارهٔ $(۳ \times ۷ = ۱۲)$ نادرست است. پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

۱۰. **گزینهٔ ۴** هر سه گزینه درست هستند.

گزینهٔ ۱ : $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv T \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$

گزینهٔ ۲ : $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$

گزینهٔ ۳ : $q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q \vee F \equiv q$

۱۱. **گزینهٔ ۳** $\sim q$ درست است، پس q نادرست است.
$p \Rightarrow q$ درست است و q نادرست، پس p باید نادرست باشد.
$p \vee r$ درست است و p نادرست، پس r باید درست باشد.

۱۲. **گزینهٔ ۳** گزارهٔ (الف) نادرست و گزاره‌های (ب)، (ج) و (د) درست است.
در گزارهٔ (الف) مقدم درست و تالی نادرست است پس گزاره نادرست است.
در گزارهٔ (ب) مقدم و تالی هر دو درست است پس گزاره درست است.
ـ دو گزارهٔ (ج) و (د)، به انتفای مقدم درست هستند.

۱۳. **گزینهٔ ۲** در گزارهٔ شرطی $(-۵ < -۳) \Rightarrow (۴ < ۳)$ مقدم درست و تالی نادرست است، پس گزاره نادرست است.

۱۴. **گزینهٔ ۲** چون $p \Rightarrow q$ نادرست است، پس p درست و q نادرست است، در نتیجه $\sim q$ درست بوده و گزارهٔ $p \wedge \sim q$ درست است. در نتیجه گزارهٔ $(p \wedge \sim q) \vee r$ همواره درست است.

۱۵. **گزینهٔ ۱** چون گزارهٔ $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است، پس p درست و $p \wedge q$ نادرست است و چون $p \wedge q$ نادرست، پس q نادرست است. در نتیجه $r \wedge q$ نادرست است و گزارهٔ $(r \wedge q) \Rightarrow S$ به انتفای مقدم همواره درست است.

۱۶. **گزینهٔ ۱**

نکته با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها می‌توان ثابت کرد:
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \equiv$$
$$(\sim p \vee p)(\sim q \vee q) \equiv T \vee T \equiv T$$

۱۷. **گزینهٔ ۲** چون p نادرست است، پس گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. در نتیجه تالی گزاره $(r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ درست بوده و این گزارهٔ شرطی درست است.

۱۸. **گزینهٔ ۱** گزارهٔ $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است. چون گزارهٔ $p \Rightarrow p \vee q$ وقتی نادرست می‌شود که p درست و $p \vee q$ نادرست باشد که در اینجا اگر p درست باشد، قطعاً $p \vee q$ نیز درست می‌باشد، لذا گزارهٔ $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است.

۱۹. **گزینهٔ ۳**

$$\sim p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \wedge (\sim p \vee q) \xlongequal{\text{قانون جذب}} \sim p$$

۲۰. گزینهٔ ۲

$\sim$ (x زوج است $\Rightarrow$ (x+۱) فرد است) $\equiv$
(x زوج است) $\wedge\sim$ (x+۱ فرد است) $\equiv$
(x زوج است) $\wedge$ (x+۱ فرد نیست) $\equiv$
x زوج است و x+۱ فرد نیست

۲۱. گزینهٔ ۲

$$p\wedge((p\Rightarrow q)\wedge\sim q)\equiv p\wedge(\sim q\wedge(p\Rightarrow q))\equiv$$
$$(p\wedge\sim q)\wedge(p\Rightarrow q)\equiv\sim\underbrace{(p\Rightarrow q)}_{r}\wedge\underbrace{p\Rightarrow q}_{r}\equiv\sim r\wedge r\equiv F$$

۲۲. گزینهٔ ۱

نکته
$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$$
$$p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$$

$$\sim p\Rightarrow(\sim q\Rightarrow r)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\Rightarrow r\equiv$$
$$\sim(\sim p\wedge\sim q)\vee r\equiv(p\vee q)\vee r$$

۲۳. گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه گزارهٔ p درست است، پس $\sim p$ نادرست و درنتیجه گزارهٔ $(\sim p\wedge q)$ نادرست است. درنتیجه گزارهٔ $(\sim p\wedge q)\Rightarrow(\sim p\vee r)$ به انتفای مقدم درست است.

۲۴. گزینهٔ ۱

$$p\Rightarrow[q\Rightarrow\sim(p\Rightarrow\sim q)]\equiv(p\wedge q)\Rightarrow\sim(p\Rightarrow\sim q)\equiv$$
$$(p\wedge q)\Rightarrow(p\wedge q)\equiv T$$

۲۵. گزینهٔ ۳ جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ به‌صورت زیر است:

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۲۶. گزینهٔ ۳ گزاره‌های (الف) و (د) درست هستند و گزاره‌های (ب) و (ج) نادرست اند. می‌دانیم گزارهٔ دوشرطی $p\Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q یا هر دو درست باشند و یا هر دو نادرست. در گزارهٔ (الف) و (د) فرض و حکم هر دو نادرست‌اند لذا گزاره‌ها نادرست هستند.

۲۷. گزینهٔ ۲ چون $(p\wedge q)\Rightarrow r$ نادرست است، پس $p\wedge q$ درست و r نادرست است، در نتیجه p و q هر دو درست هستند. لذا گزارهٔ $p\wedge r$ نادرست و گزارهٔ $q\vee r$ درست است. در نتیجه گزارهٔ $(p\wedge r)\Leftrightarrow(q\vee r)$ نادرست هستند.

۲۸. گزینهٔ ۳ می‌دانیم عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ به‌صورت $\sim q\Rightarrow\sim p$ می‌باشد، پس عکس نقیض گزارهٔ $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow(r\Leftrightarrow S)$ عبارت است از:

$$\sim(r\Leftrightarrow S)\Rightarrow\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv(\sim r\Leftrightarrow S)\Rightarrow(p\Leftrightarrow\sim q)$$

سورها

۲۹. گزینهٔ ۳ با توجه به مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -۱\le x\le ۴\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$ سور وجودی در گزینهٔ ۳ درست است. چون به ازای $x=۱$ داریم $\frac{۱}{x}\in\mathbb{Z}$.

۳۰. گزینهٔ ۲ $x=-۲$ مثال نقضی برای سور عمومی $\forall x\in\mathbb{R};\frac{x^۲-۴}{x+۲}=x-۲$ است، پس این گزارهٔ سوری نادرست است.

۳۱. گزینهٔ ۴ سور عمومی $\forall x\in\mathbb{N};\frac{x}{x+۱}<۱$ درست است زیرا برای هر عدد طبیعی کسر $\frac{x}{x+۱}$ همواره کوچکتر از ۱ می‌باشد.
برای سه گزینهٔ دیگر می‌توان مثال نقض آورد:
مثال نقض گزینهٔ ۱: $x=۰$
مثال نقض گزینهٔ ۲: $x=-۱$
مثال نقض گزینهٔ ۳: $x=۰\,,\,y=۰$

۳۲. گزینهٔ ۳

نکته
$$\sim(\forall x\,;p(x))\equiv\exists x\,;\sim p(x)$$
$$\sim(\exists x\,;p(x))\equiv\forall x\,;\sim p(x)$$

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R}\,;x^۲=-۱)\equiv\forall x\in\mathbb{R}\,;x^۲\ne-۱$$
$$\sim(\forall x\in\mathbb{Q}\,;x^۲\ge x)\equiv\exists x\in\mathbb{Q}\,;x^۲<x$$

۳۳. گزینهٔ ۳ با توجه به هم‌ارزی $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ و نقیض گزاره‌های سوری داریم:

$$\sim\Big((\exists x\in\mathbb{R}\,;x>۱)\vee(\forall x\in\mathbb{R}\,;x^۲>۰)\Big)\equiv$$
$$\sim(\exists x\in\mathbb{R}\,;x>۱)\wedge\sim(\forall x\in\mathbb{R}\,;x^۲>۰)\equiv$$
$$(\forall x\in\mathbb{R}\,;x\le۱)\wedge(\exists x\in\mathbb{R}\,;x^۲\le۰)$$

۳۴. گزینهٔ ۴

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R}\,;(x-۲=۰)\Leftrightarrow(x+۲=۰))\equiv$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,;\sim(x-۲=۰\Leftrightarrow x+۲=۰)\equiv$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,;(x-۲\ne۰\Leftrightarrow x+۲=۰)\equiv$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,;(x-۲=۰\Leftrightarrow x+۲\ne۰)$$

توجه $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

۳۵. گزینهٔ ۳

$$\sim(\forall x,y\in\mathbb{R}\,;(xy=۰\Leftrightarrow x=۰\vee y=۰))\equiv$$
$$\exists x,y\in\mathbb{R}\,;\sim(xy=۰\Leftrightarrow x=۰\vee y=۰)\equiv$$
$$\exists x,y\in\mathbb{R}\,;(xy=۰\Leftrightarrow\sim(x=۰\vee y=۰))\equiv$$
$$\exists x,y\in\mathbb{R}\,;(xy=۰\Leftrightarrow x\ne۰\wedge y\ne۰)$$

۳۶. گزینهٔ ۲ می‌دانیم عکس نقیض گزارهٔ $p\Rightarrow q$ به‌صورت $\sim q\Rightarrow\sim p$ است. پس عکس نقیض گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}\,;(x>۱\wedge x<۳)\Rightarrow x=۲$ عبارت است از:

$$x\ne۲\Rightarrow\sim(\forall x\in\mathbb{R}\,;(x>۱\wedge x<۳))\equiv$$
$$x\ne۲\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,;(x\le۱\vee x\ge۳)$$

درس دوم: مجموعه – زیرمجموعه

زیرمجموعه

۳۷. گزینه ۴

$b \notin A \Rightarrow \{a,b\} \not\subseteq A$

۳۸. گزینه ۴ گزینهٔ ۱ نادرست است، چون $\varnothing \in A$، پس $A \supseteq \{\varnothing\}$ و از طرفی $\{\varnothing\} \in A$.

گزینهٔ ۲ نادرست است، چون $A - \varnothing = A$.

گزینهٔ ۳ نادرست است، چون A دارای ۳ عضو $\varnothing$، $\{\varnothing\}$ و $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ است، پس $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه دارد.

گزینهٔ ۴ درست است: $A - \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۳۹. گزینه ۴

گزینهٔ ۱ نادرست است. $A - B = \{\{۱,۲,۳\}\} \neq C$

گزینهٔ ۲ نادرست است. $B - C = \{\{۱,۲\}\} \neq \varnothing$

گزینهٔ ۳ نادرست است. $B - C = \{\{۱,۲\}\} \neq \{۱,۲\}$

گزینهٔ ۴ درست است. $A - B = \{\{۱,۲,۳\}\} = \{C\}$

۴۰. گزینه ۳

$A \cap B = \{۲,۳,۴\}\ ,\ A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

مجموعهٔ X به ۴ صورت $\{۲,۳,۴\}$، $\{۱,۲,۳,۴\}$، $\{۲,۳,۴,۵\}$ و $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌تواند باشد.

۴۱. گزینه ۱ با توجه به اینکه $B = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های A است، پس مجموعهٔ A به‌صورت زیر است:

$A = \{\varnothing\}$

در نتیجه:

$B - A = \{\varnothing,\{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$

پس مجموعهٔ زیرمجموعه‌های این مجموعه عبارت است از:

$\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$

۴۲. گزینه ۲ اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، در این صورت دارای ۲^n زیرمجموعه است. با اضافه شدن ۲ عضو متمایز به مجموعهٔ A تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ جدید برابر $۲^{n+۲}$ است که با توجه به فرض مسئله داریم:

$$۲^{n+۲} = ۲^n + ۹۶ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^n = ۹۶ \Rightarrow ۲^n(۲^۲ - ۱) = ۹۶ \Rightarrow$$
$$۲^n(۳) = ۹۶ \Rightarrow ۲^n = ۳۲ \Rightarrow n = ۵$$

۴۳. گزینه ۳

$۲^n = n + ۲۴۸ \Rightarrow n = ۸$

پس تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $۲^۸ = ۲۵۶$ است و داریم:

$\dfrac{۲۵۶}{۸} = ۳۲$

۴۴. گزینه ۱ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$۲^{n+۴} = ۲^n + ۲۴۰ \Rightarrow ۲^{n+۴} - ۲^n = ۲۴۰ \Rightarrow ۲^n(۲^۴ - ۱) = ۲۴۰ \Rightarrow$$
$$۲^n(۱۵) = ۲۴۰ \Rightarrow ۲^n = ۱۶ \Rightarrow n = ۴$$

۴۵. گزینه ۲

$$۲^{k+۱} = ۲^{k-۱} + ۴۸ \Rightarrow ۲^{k+۱} - ۲^{k-۱} = ۴۸ \Rightarrow ۲^k\left(۲ - \frac{۱}{۲}\right) = ۴۸ \Rightarrow$$
$$۲^k\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۴۸ \Rightarrow ۲^k = ۳۲ \Rightarrow k = ۵$$

۴۶. گزینه ۱ اگر A دارای n عضو باشد، آنگاه ۲^n زیرمجموعه دارد، پس مجموعهٔ B دارای ۲^n عضو است. در نتیجه مجموعهٔ B دارای $۲^{۲^n}$ زیرمجموعه است و داریم:

$$۲^{۲^n} = ۲۵۶ \Rightarrow ۲^{۲^n} = ۲^۸ \Rightarrow ۲^n = ۸ \Rightarrow ۲^n = ۲^۳ \Rightarrow n = ۳$$

۴۷. گزینه ۲ چون a باید عضو همهٔ زیرمجموعه باشد، پس سه عضو دیگر هر کدام می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد زیرمجموعه‌های شامل عضو a درواقع برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{b,\{a\},\{b\}\}$ یعنی $۲^۳ = ۸$.

۴۸. گزینه ۲ بدون در نظر گرفتن a، c و d تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{b,e,f\}$ برابر است با $۲^۳ = ۸$. کافی است به هرکدام از این زیرمجموعه‌ها عضو a را اضافه کنیم تا زیرمجموعه‌هایی شامل عضو a به‌دست بیایند که دو عضو c و d را نیز ندارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر ۸ است.

۴۹. گزینه ۳ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$۲^{n-۳} = ۲^n - ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n - ۲^{n-۳} = ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n(۱ - ۲^{-۳}) = ۱۱۲ \Rightarrow$$
$$۲^n\left(\frac{۷}{۸}\right) = ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n = ۱۲۸ \Rightarrow n = ۷$$

۵۰. گزینه ۳ با توجه به اینکه مجموع کوچکترین و بزرگترین عضو باید برابر ۱۱ باشد، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر کوچکترین عضو ۳ و بزرگترین عضو ۸ باشد، در این صورت باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۳ و ۸ و فاقد ۲ را بیابیم که برابر است با $۲^۴ = ۱۶$.

حالت دوم: اگر کوچکترین عضو ۴ و بزرگترین عضو ۷ باشد، باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۴ و ۷ و فاقد ۲ و ۳ و ۸ را بیابیم که برابر است با $۲^۲ = ۴$.

حالت سوم: اگر کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین عضو ۶ باشد، فقط زیرمجموعه به‌صورت $\{۵,۶\}$ یعنی یک زیرمجموعه داریم. پس تعداد کل حالات برابر است با $۱۶ + ۴ + ۱ = ۲۱$

۵۱. گزینه ۳ بزرگترین عضو زیرمجموعه‌ها باید ۲ یا ۳ یا ۵ باشد. اگر بزرگترین عضو برابر ۲ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برابر ۲ است، یعنی زیرمجموعه‌های $\{۱,۲\}$ و $\{۲\}$.

اگر بزرگترین عضو برابر ۳ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲\}$ یعنی $۲^۲ = ۴$.

در صورتی که بزرگترین عضو برابر ۵ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ یعنی $۲^۴ = ۱۶$.

پس تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با $۲ + ۴ + ۱۶ = ۲۲$

۵۲. گزینهٔ ۲ با کنار گذاشتن اعداد ۷ و ۸ از زیرمجموعه، ۷ عضو خواهیم داشت که مجموعاً $۲^۷$ زیرمجموعه دارد. تعداد زیرمجموعه‌هایی که شامل ۲ و ۵ نباشند نیز برابر $۲^۵$ است. پس تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر است با:

$$۲^۷ - ۲^۵ = ۱۲۸ - ۳۲ = ۹۶$$

۵۳. گزینهٔ ۴ اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد داریم:

$$\binom{n}{۴} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی } A$$

$$\binom{n}{۷} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی } A$$

$$\Rightarrow \binom{n}{۴} = \binom{n}{۷} \Rightarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow n = ۴ + ۷ = ۱۱$$

پس مجموعهٔ A دارای ۱۱ عضو بوده، لذا $۲^{۱۱} = ۲۰۴۸$ زیرمجموعه دارد.

۵۴. گزینهٔ ۲ اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، با توجه به فرض داریم:

$$\binom{n+۲}{۳} = \binom{n}{۳} + ۳۶ \Rightarrow \binom{n+۲}{۳} - \binom{n}{۳} = ۳۶ \Rightarrow$$

$$\frac{(n+۲)!}{۳!(n-۱)!} - \frac{n!}{۳!(n-۳)!} = ۳۶ \Rightarrow$$

$$\frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶} = ۳۶ \Rightarrow$$

$$\frac{n^۳ + ۳n^۲ + ۲n - n^۳ + ۳n^۲ - ۲n}{۶} = ۳۶ \Rightarrow n^۲ = ۳۶ \Rightarrow n = ۶$$

۵۵. گزینهٔ ۲ عضوهایی که در زیرمجموعه‌های مورد نظر قطعاً وجود ندارند، عبارتند از ۱۵ ,۱۴ ,۱۳ ,۳ ,۲ ,۱ و اعضایی که قطعاً وجود دارند ۴ و ۱۲ هستند. بنابراین از بین $۱۵ - ۸ = ۷$ عضو باقیمانده، باید ۲ عضو دیگر انتخاب کنیم که به تعداد $\binom{۷}{۲} = ۲۱$ حالت این کار صورت می‌گیرد.

۵۶. گزینهٔ ۱ اگر a، b و c سه عضو زیرمجموعه‌ها باشند، چون جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، باید $b = \frac{a+c}{۲}$ باشد. پس باید جمع a و c عددی زوج باشد تا b عددی طبیعی شود. بنابراین باید a و c یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد. چون در مجموعهٔ A نصف اعداد زوج و نصف دیگرش فرد هستند، پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۲} + \binom{۱۰}{۲} = ۴۵ + ۴۵ = ۹۰$$

۵۷. گزینهٔ ۴

$$\left(\begin{array}{c}\text{تعداد}\\ \text{زیرمجموعه‌های}\\ \text{بیش از ۲ عضو}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{تعداد کل}\\ \text{زیرمجموعه‌ها}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{تعداد زیرمجموعه‌های}\\ \text{صفرعضوی و}\\ \text{یک‌عضوی و دوعضوی}\end{array}\right)$$

$$= ۲^۵ - \left(\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۲}\right) = ۳۲ - (۱ + ۵ + ۱۰) = ۳۲ - ۱۶ = ۱۶$$

۵۸. گزینهٔ ۴

$$\left.\begin{array}{l} A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, \ldots, ۹۹\} \\ B = \{۷k \,;\, k \in A\} = \{۷۰, ۷۷, \ldots, ۶۹۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A \cap B = \{۷۰, ۷۷, ۸۴, ۹۱, ۹۸\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $۲^۵ = ۳۲$ است.

۵۹. گزینهٔ ۲ با توجه به مجموعهٔ $C = \{۱, ۲, \ldots, ۱۴\}$ عضوهای مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x = ۳k \,,\, k \in C\} = \{۳, ۶, ۹, \ldots, ۴۲\} \\ B = \{x \mid x = ۵k \,,\, k \in C\} = \{۵, ۱۰, ۱۵, \ldots, ۷۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \{۱۵, ۳۰\}$$

پس مجموعهٔ $A \cap B$ دارای ۲ عضو است که $۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه دارد.

۶۰. گزینهٔ ۳

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$$

در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A - \{B\}$ برابر $۲^۳ = ۸$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی آن برابر $۸ - ۱ = ۷$ است.

۶۱. گزینهٔ ۲ چون مجموعهٔ A سه عضو دارد، پس دارای $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه است. یعنی مجموعهٔ B دارای ۸ عضو است که دو عضو $\{a\}$ و $\{\{a\}\}$ با مجموعهٔ A مشترک می‌باشند. پس مجموعهٔ $B - A$ دارای ۶ عضو بوده که $۲^۶ = ۶۴$ زیرمجموعه دارد.

۶۲. گزینهٔ ۴ برای بررسی گزینه‌ها می‌توان $A = \{۱\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ و مجموعهٔ مرجع را $U = \{۱, ۲, ۳\}$ در نظر بگیریم. در این صورت $A' = \{۲, ۳\}$ و $B' = \{۳\}$ و داریم:

گزینهٔ ۴ نادرست است $A' \cap B = \{۲\} \neq \varnothing \Rightarrow$

۶۳. گزینهٔ ۴ ممکن است $A \cap B = \varnothing$ باشد ولی A و B هیچ‌کدام تهی نباشند، مانند دو مجموعهٔ زیر:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{۳, ۴, ۵\} \\ B = \{۷, ۲۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$$

۶۴. گزینهٔ ۱ (الف) نادرست است. کافی است $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۰, ۱\}$ و $C = \{۲, ۳\}$ باشند، در این صورت $A \subseteq B \cup C$ است ولی $A \not\subseteq B$ و $A \not\subseteq C$.

(ب) درست است چون $A \cup B = A \cap B$، می‌توان نتیجه گرفت $A = B$. (اثبات به روش عضوگیری دلخواه)

(ج) نادرست است. کافی است $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۳\}$ و $C = \{۲, ۳\}$ در نظر بگیریم.

(د) نادرست است. کافی است $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۲\}$ و $C = \{۱, ۲\}$ در نظر بگیریم.

۶۵. گزینهٔ ۳ چون $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ است، پس همهٔ اعداد طبیعی باید عضو یکی از این سه مجموعه باشند. با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ ۱: $۱۱ = ۱۲ - ۱ = ۶(۲) - ۱ \in B$

گزینهٔ ۲: $۲۹ = ۳۰ - ۱ = ۶(۵) - ۱ \in B$

گزینهٔ ۳: $۳۷ = ۳۶ + ۱ = ۶(۶) + ۱ \in A$

ولی عدد ۳۳ به هیچ‌یک از مجموعه های A و B تعلق ندارد، پس الزاماً به مجموعهٔ C تعلق دارد.

۶۶. گزینه ۳ دو مجموعهٔ A و B یک افراز مجموعهٔ اعداد صحیح است، هرگاه $A \cap B = \varnothing$ و $A \cup B = \mathbb{Z}$. که مجموعه اعداد صحیح فرد و مجموعه اعداد صحیح زوج این ویژگی را دارند.

۶۷. گزینه ۴ مجموعهٔ A را به‌صورت‌های زیر می‌توان افراز کرد:

ـ مجموعه‌های تک‌عضوی ← یک حالت

ـ یک مجموعهٔ ۲ عضوی و دو مجموعهٔ تک‌عضوی ← $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت

ـ یک مجموعهٔ سه‌عضوی و یک مجموعهٔ تک‌عضوی ← $\binom{۴}{۳} = ۴$ حالت

ـ دو مجموعهٔ دوعضوی ← $\frac{\binom{۴}{۲}}{۲} = ۳$ حالت

$$(\{۱,۲\},\{۳,۴\}) \,,\, (\{۱,۳\},\{۲,۴\}) \,,\, (\{۲,۳\},\{۱,۴\})$$

ـ یک مجموعهٔ چهارعضوی ← یک حالت

پس تعداد کل افرازها برابر است با: $۱+۶+۴+۳+۱ = ۱۵$

۶۸. گزینه ۲ برای آنکه دو عضو c و d در مجموعه باشند، می‌توان c و d را در یک دسته قرار داد و آن‌ها را یک عضو در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعهٔ جدید ۴ عضو دارد و در واقع تعداد کل افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی را می‌خواهیم که همانند تست قبل برابر ۱۵ است.

۶۹. گزینه ۴ حالت‌هایی که مجموعهٔ A به دو زیرمجموعه افراز شود که دو عضو ۲ و ۳ در یک مجموعه باشند به‌صورت زیر است:

$$(\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\}) \,,\, (\{۲,۳,۴\},\{۵,۶\}) \,,\, (\{۲,۳,۵\},\{۴,۶\})$$
$$(\{۲,۳,۶\},\{۴,۵\}) \,,\, (\{۲,۳,۴,۵\},\{۶\}) \,,\, (\{۲,۳,۴,۶\},\{۵\})$$
$$(\{۲,۳,۵,۶\},\{۴\})$$

همان‌طور که می‌بینیم تعداد این افرازها برابر ۷ است.

۷۰. گزینه ۴ اگر بخواهیم یک مجموعهٔ ۴ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کنیم، باید یک مجموعهٔ ۲ عضوی و ۲ مجموعهٔ یک عضوی در نظر بگیریم. به این صورت:

$$(\{a,b\},\{c\},\{d\}) \,,\, (\{a,c\},\{b\},\{d\}) \,,\, (\{b,c\},\{a\},\{d\})$$
$$(\{b,d\},\{a\},\{c\}) \,,\, (\{a,d\},\{b\},\{c\}) \,,\, (\{c,d\},\{a\},\{b\})$$

که تعداد این افرازها برابر ۶ است.

۷۱. گزینه ۳ بهترین حالت این است که ۸ مجموعه را یک‌عضوی در نظر بگیریم، آنگاه مجموعهٔ آخر ۷ عضوی است که این حداکثر تعداد عضوهای یکی از زیرمجموعه‌ها است.

۷۲. گزینه ۴ مجموعهٔ ۵ عضوی را به دو صورت می‌توان به دو مجموعه افراز کرد. یکی به‌صورت یک مجموعهٔ ۴ عضوی و یک مجموعهٔ ۱ عضوی و دیگری به‌صورت یک مجموعهٔ ۳ عضوی و یک مجموعهٔ ۲ عضوی. پس تعداد افرازهای دو مجموعه‌ای برابر است با:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴} + \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳} = (۵\times۱) + (۱۰\times۱) = ۱۵$$

۷۳. گزینه ۳ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۵ عضوی A که شامل مجموعه‌های دوعضوی و سه‌عضوی باشند برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳} = ۱۰\times۱ = ۱۰$$

۷۴. گزینه ۴ در افراز یک مجموعهٔ n عضوی که شامل یک مجموعهٔ $(n-۲)$ عضوی است، جزء دیگر افراز، یا باید یک مجموعهٔ دوعضوی باشد و یا دو مجموعهٔ یک‌عضوی. از طرفی می‌دانیم به $\binom{n}{n-۲}$ طریق می‌توان زیرمجموعهٔ $(n-۲)$ عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی انتخاب کرد و به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها می‌توان دو افراز متمایز ساخت. بنابراین:

$$۲\binom{n}{n-۲} = ۷۲ \Rightarrow \binom{n}{n-۲} = ۳۶ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!۲!} = ۳۶ \Rightarrow$$
$$\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}۲!} = ۳۶ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow n(n-۱) = ۷۲ \Rightarrow n = ۹$$

۷۵. گزینه ۲ با توجه به افراز داده شده می‌توان نتیجه گرفت مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است، یعنی $A = \{a,b,c,d\}$. پس افرازهای این مجموعهٔ ۴ عضوی که فاقد مجموعهٔ تک‌عضوی باشند یا به صورت دو مجموعهٔ دوعضوی است و یا به‌صورت یک مجموعهٔ ۴ عضوی است. به این صورت:

$$(\{a,b,c,d\}) \,,\, (\{a,b\},\{c,d\}) \,,\, (\{a,d\},\{b,c\}) \,,\, (\{a,c\},\{b,d\})$$

پس تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک‌عضوی است، برابر ۴ است.

۷۶. گزینه ۲ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲a + ۳b = ۹ \\ ۳a - ۲b = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a + ۶b = ۱۸ \\ ۹a - ۶b = ۲۱ \end{cases}$$
$$۱۳a = ۳۹ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a + b = ۴$$

۷۷. گزینه ۴

$$A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N} \,;\, x^۲ - ۱ = ۰\right\} \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = ۱ \in \mathbb{N} \\ x = -۱ \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow A = \{۱\}$$
$$B = \left\{x \mid \left(-\frac{۱}{x} \in \mathbb{N}\right) \wedge (x \in \mathbb{Z})\right\} = \{-۱\}$$
$$C = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z} \,,\, x^۲ \le ۱\right\} \Rightarrow x^۲ \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$
$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} C = \{-۱,۰,۱\}$$
$$D = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z} \,;\, x^۳ + ۱ = ۰\right\} \Rightarrow x^۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ = -۱ \Rightarrow$$
$$x = -۱ \Rightarrow D = \{-۱\}$$

همان‌طور که می‌بینیم، مجموعهٔ B و D با هم برابرند.

درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

جبر مجموعه‌ها

۷۸. گزینه ۱ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲: فقط زمانی درست است که $A = \varnothing$ باشد.

گزینهٔ ۳: هیچ‌گاه درست نیست.

گزینهٔ ۴: فقط زمانی درست است که $A = U$ باشد.

۷۹. گزینهٔ ۱ هر چهار تساوی درست است.

۸۰. گزینهٔ ۱

$A\cup(B-A)=B\Rightarrow A\cup(B\cap A')=B\Rightarrow$

$(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{U}=B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$

۸۱. گزینهٔ ۳

$A-B=A\cup B\Rightarrow A\cap B'=A\cup B\Rightarrow$

$(A\cap B')\cap B=(A\cup B)\cap B\Rightarrow \underbrace{A\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}}_{\varnothing}=B\Rightarrow B=\varnothing$

۸۲. گزینهٔ ۳

$(C-D)\cup(C-A)\cup(C-B)=(C-D)\cup[C-(A\cup B)]$

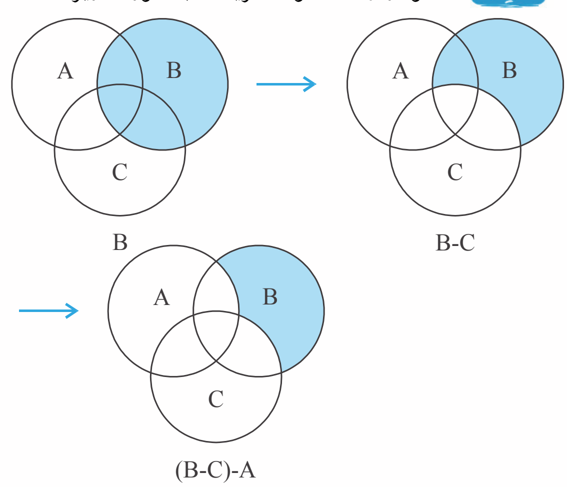
بنا به فرض $A\cup B=D$، در نتیجه:

$(C-D)\cup(C-D)=C-D$

بنابراین:

$(A\cap B)-(A\cup B)=(A\cap B)\cap(A\cup B)'=(A\cap B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

۸۳. گزینهٔ ۴ نمودار ون مجموعهٔ گزینهٔ ۴ به‌صورت زیر است:



۸۴. گزینهٔ ۱

$(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)=(A\cap B\cap C')-(A\cap B\cap C)$

$\xlongequal{A\subset B}(A\cap C')-(A\cap C)=(A\cap C')\cap(A\cap C)'=$

$(A\cap C')\cap(A'\cup C')=\underbrace{(A\cap C'\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap C'\cap C')=A\cap C'$

۸۵. گزینهٔ ۴

$A-B=B-A\Rightarrow A\cap B'=B\cap A'$

$\Rightarrow(A\cap B)\cup(A\cap B')=(A\cap B)\cup(B\cap A')\Rightarrow$

$A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}=B\cap\underbrace{(A\cup A')}_{U}\Rightarrow A\cap U=B\cap U\Rightarrow A=B$

۸۶. گزینهٔ ۴

گزینهٔ ۱: $B\cap(B\cap A')'=A\Rightarrow B\cap(B'\cup A)=A\Rightarrow$

$(B\cap B')\cup(B\cap A)=A\Rightarrow\varnothing\cup(B\cap A)=A\Rightarrow A\subseteq B$

گزینهٔ ۲: $B'\subseteq A'\Rightarrow B'\cap A'=B'\Rightarrow(B'\cap A')'=B\Rightarrow$

$B\cup A=B\Rightarrow A\subseteq B$

گزینهٔ ۳: $A-B=\varnothing\Rightarrow B\cup(A-B)=B\cup\varnothing\Rightarrow$

$B\cup(A\cap B')=B\Rightarrow(B\cup A)\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}=B\Rightarrow$

$B\cup A=B\Rightarrow A\subseteq B$

۸۷. گزینهٔ ۲

$(A-B)\cup(B\cap A')=(A\cap B')\cup(B\cap A')=$

$((A\cap B')\cup B)\cap((A\cap B')\cup A')=$

$((B\cup A)\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U})\cap(\underbrace{(A'\cup A)}_{U}\cap(A'\cup B'))=$

$(B\cup A)\cap(A'\cup B')$

۸۸. گزینهٔ ۱

$B'\cup A=A'-B=A'\cap B'=B'-A\Rightarrow$

$B'\cup A=B'-A\Rightarrow A=\varnothing$

۸۹. گزینهٔ ۲ اگر $B'\subseteq A'$، آنگاه $A\subseteq B$ است و داریم:

$(B-A)\cup\underbrace{(A-B)\cup(A\cap B)}_{A}=(B-A)\cup A=(B\cap A')\cup A=$

$(B\cup A)\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B\cup A\xlongequal{\text{چون } A\subseteq B}B$

۹۰. گزینهٔ ۲

$(A\cap B')-(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')'=$

$A\cap\underbrace{B'\cap(B'\cup A)}_{B'}=A\cap B'=A-B$

قانون جذب

۹۱. گزینهٔ ۱

$[\underbrace{A\cup(A\cap B)}_{A}]'\cap[\underbrace{(B\cap A)\cup(B-A)}_{B}]=A'\cap B=A'-B'$

قانون جذب

۹۲. گزینهٔ ۱

$(A\cup B)'=A'\cap B'=\{2,3\}$

۹۳. گزینهٔ ۳

$(B'-A')'\cup B=(B'\cap A)'\cup B=(B\cup A')\cup B=$

$(B\cup B)\cup A'=B\cup A'\Rightarrow(B\cup A')'=B'\cap A=B'-A'$

۹۴. گزینهٔ ۲

نکته قانون دمورگان برای بیش از ۲ مجموعه نیز برقرار است:

$(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$

$(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

$(C\cup A'\cup B')'=C'\cap A\cap B=A\cap(B-C)=$

$(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$

۹۵. گزینهٔ ۱

$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A'=$

$(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A'=((A'\cap A)\cup B)\cap A'=$

$(\varnothing\cup B)\cap A'=B\cap A'=B-A$

۹۶. گزینه ۴

$$(B\cup A')'\cup(B'\cup A)'\xlongequal{\text{دمورگان}}(B'\cap A)\cup(B\cap A')=$$
$$(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A-B)\cup(B-A)=$$
$$(A\cup B)-(A\cap B)\xlongequal[A\cap B=\varnothing]{\text{با توجه به فرض}}A\cup B=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$$

پس این مجموعه دارای ۳ عضو است که $2^3=8$ زیرمجموعه دارد.

۹۷. گزینه ۱

$$[(A\cup(A\cup B)')\cap B]\cup A=[(A\cup(A'\cap B'))\cap B]\cup A=$$
$$[\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap(A\cup B')\cap B]\cup A=[(A\cap B)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]\cup A=$$
$$(A\cap B)\cup A\xlongequal{\text{جذب}}A$$

۹۸. گزینه ۴

$$A\cup(A\cap B)\xlongequal{\text{قانون جذب}}A\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$$

پس تعداد عضوهای آن صفر است.

۹۹. گزینه ۲ می‌دانیم اگر $A\subseteq B$ باشد، در این صورت:

$$A\cap B=A\ ,\ A\cup B=B\ ,\ A\cap B'=\varnothing$$

پس داریم:

$$(A'\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A\cap B)=(A'\cap B)\cup\varnothing\cup A=$$
$$(A'\cap B)\cup A=\underbrace{(A'\cup A)}_{U}\cap\underbrace{(B\cup A)}_{B}=B$$

۱۰۰. گزینه ۱

$$(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)=(A\cap(B\cap C'))-(A\cap B\cap C)$$
$$\xlongequal[A\cap B=A]{A\subseteq B}(A\cap C')-(A\cap C)=(A\cap C)\cap(A\cap C)'=$$
$$(A\cap C')\cap(A'\cup C')=(\underbrace{A\cap C'\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap\underbrace{C'\cap C'}_{C'})=A\cap C'$$

۱۰۱. گزینه ۴ چون مجموعهٔ n عضوی A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی است، پس کلاً ۱۶ زیرمجموعه دارد و داریم:

$$2^{n(A)}=16\Rightarrow n(A)=4$$
$$C=A\cap(A'-B)'=A\cap(A'\cap B')'=A\cap(A\cup B)\xlongequal{\text{قانون جذب}}A$$
$$C=A$$

پس مجموعهٔ C نیز دارای ۴ عضو بوده که $2^4=16$ زیرمجموعه دارد.

۱۰۲. گزینه ۳

$$A_3=\{m: m\ge -3\ ,\ 2^m\le 3\}=\{1,0,-1,-2,-3\}$$
$$A_4=\{m: m\ge -4\ ,\ 2^m\le 4\}=\{1,0,-1,-2,-3,-4\}$$
$$\Rightarrow A_4\cap A_3=\{1,0,-1,-2,-3\}$$

پس مجموعه $A_4\cap A_3$ دارای $2^5=32$ زیرمجموعه است.

۱۰۳. گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned}A_3&=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\\A_6&=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_3\cup A_6=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(A_3\cup A_6)-A_3=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

۱۰۴. گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\{m\in\mathbb{Z}\mid -1\le m\le 7\}=\{-1,0,\dots,7\}\\A_2&=\{m\in\mathbb{Z}\mid -2\le m\le 6\}=\{-2,-1,\dots,6\}\\&\vdots\\A_8&=\{m\in\mathbb{Z}\mid -8\le m\le 0\}=\{-8,-7,\dots,0\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\bigcup_{i=1}^{8}A_i=\{-8,\dots,7\}\ ,\ \bigcap_{i=1}^{8}A_i=\{-1,0\}$$
$$\Rightarrow n\left(\bigcup_{i=1}^{8}A_i-\bigcap_{i=1}^{8}A_i\right)=16-2=14$$

۱۰۵. گزینه ۱

$$\left.\begin{aligned}A_1&=[1,2]\\A_2&=\left[\frac{1}{2},1\right]\\A_3&=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\&\vdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots=$$
$$[1,2]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\dots=(0,2]$$

۱۰۶. گزینه ۳

$$\left.\begin{aligned}A_1&=(-1,1)\\A_2&=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\A_3&=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\\&\vdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots=$$
$$(-1,1)\cap\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cap\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\cap\dots=\{0\}$$

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

۱۰۷. گزینه ۲ چون A و B غیرتهی هستند، از تساوی $A\times B=B\times A$ نتیجه می‌گیریم $A=B$.

با توجه به برابری دو مجموعهٔ A و B داریم:

$$A\cap B=A\cup B$$

و

$$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

و

$$A\cap B=A=B\ne\varnothing$$

پس گزینهٔ ۲ نادرست است.

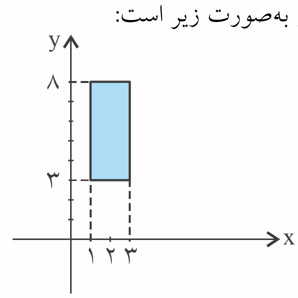
۱۰۸. گزینه ۱

$$(A\times B)\subseteq(B\times A)\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq B\\B\subseteq A\end{cases}\Rightarrow A=B\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=A\\A\cap B=A\end{cases}\Rightarrow$$
$$(A\cup B)-(A\cap B)=\varnothing-\varnothing=\varnothing$$

۱۰۹. گزینه ۲

$$A\times B-B^2=(A-B)\times B=[1,3]\times[3,8]=$$
$$\{(x,y)\mid x\in[1,3]\ ,\ y\in[3,8]\}$$

پس نمودار این حاصل‌ضرب دکارتی به‌صورت زیر است:



$\Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = ۲\times ۵ = ۱۰$

۱۱۰. گزینه ۳

$(A-B)\times(B\cap A') = (A-B)\times(B-A) =$
$\{۳,۹\}\times\{۱,۵\} = \{(۳,۱),(۳,۵),(۹,۱),(۹,۵)\}$

پس دو تایی $(۳,۱)$ عضو این مجموعه می‌باشد.

۱۱۱. گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix} A=\{a,b,\varnothing\} \\ B=\{\{a,b\},a\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A-B=\{b,\varnothing\} \\ B-A=\{\{a,b\}\} \end{cases}$$
$$\Rightarrow n((A-B)\times(B-A)) = n(A-B)\times n(B-A) = ۲\times ۱ = ۲$$

۱۱۲. گزینه ۱

$$n((A\times B)\cup(B\times A)) = n(A\times B)+n(B\times A)-\underbrace{n((A\times B)\cap(B\times A))}_{(n(A\cap B))^۲}$$
$$=(۵\times ۴)+(۴\times ۵)-(۳)^۲ = ۴۰-۹ = ۳۱$$

۱۱۳. گزینه ۱ با توجه به اینکه $A\cap B=\{۱,۲\}$، داریم:

$$n(A^۲\cap B^۲) = (n(A\cap B))^۲ = ۲^۲ = ۴$$

۱۱۴. گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N}\,;\, x^۲<۱۶\right\}=\{۱,۲,۳\} \\ B=\{۲k+۱ \mid k\in\mathbb{Z}\,;\, ۰\le k\le ۳\}=\{۱,۳,۵,۷\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cap B=\{۱,۳\}$$
$$\Rightarrow n(A^۲-B^۲) = n(A^۲)-n(A^۲\cap B^۲) = (n(A))^۲-(n(A\cap B))^۲$$
$$=۹-۴=۵$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A^۲-B^۲$ برابر $۲^۵=۳۲$ است.

۱۱۵. گزینه ۳ مجموعهٔ $C=B\times\{۲,۶\}$ دارای ۸ عضو به‌صورت زیر است:

$$C=\{(۱,۲),(۱,۶),(۲,۲),(۲,۶),(۳,۲),(۳,۶),(۵,۲),(۵,۶)\}$$

مجموعهٔ $A^۲=A\times A$ دارای ۲۵ عضو است که با مجموعهٔ C در ۴ عضو $(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۵,۲)$ اشتراک دارد. پس تعداد عضوهای مجموعهٔ $A^۲-B\times\{۲,۶\}$ برابر است با:

$$n(C)=n(A^۲)-n(A^۲\cap C)=۲۵-۴=۲۱$$

۱۱۶. گزینه ۳ اگر مجموعهٔ $A\cap B$ دارای n عضو باشد، طبق فرض داریم $۲^n=۸$ پس $n=۳$.

از طرفی $n(A\times B)=m\cdot k=۵۴$ چون $n(A\cap B)=۳$، پس باید $m,k\ge ۳$ باشد، در نتیجه داریم:

$$m\cdot k=۵۴ \Rightarrow m=۶\,,\,k=۹$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۹-۳=۱۲$$

۱۱۷. گزینه ۱

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^۲=\varnothing \Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

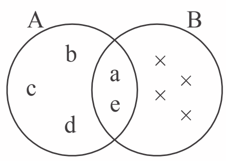
می‌دانیم: $A-B=A-\underbrace{(A\cap B)}_{\varnothing}=A-\varnothing=A$

۱۱۸. گزینه ۲

$$n(A^۲-B^۲)=n(A^۲)-n(A^۲\cap B^۲)\Rightarrow$$
$$n(A^۲-B^۲)=(n(A))^۲-(n(A\cap B))^۲\Rightarrow$$
$$۵۴۴=(۲۵)^۲-(n(A\cap B))^۲\Rightarrow (n(A\cap B))^۲=۶۲۵-۵۴۴=۸۱\Rightarrow$$
$$n(A\cap B)=۹$$

۱۱۹. گزینه ۳

$A=\{a,b,c,d,e\}$
$A\cap B=\{a,e\}$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow A-B=\{b,c,d\}$

مجموعهٔ $A-B$ دارای سه عضو است. از طرفی طبق فرض مجموعهٔ $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۱۲ عضو بوده، پس مجموعهٔ $B-A$ چهار عضو دارد. در نتیجه مجموعهٔ B دارای $۴+۲$ می‌باشد. چون:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۴=n(B)-۲\Rightarrow n(B)=۶$$

۱۲۰. گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} A=\left\{x\in\mathbb{N}\,;\,۵<x^۲<۵۰\right\}=\{۳,۴,۵,۶,۷\} \\ B=\{۳k-۲ \mid k\in\mathbb{Z}\,;\,۱\le k\le ۴\}=\{۱,۴,۷,۱۰\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap B=\{۴,۷\}$$
$$\Rightarrow n((A\times B)\cap(B\times A))=(n(A\cap B))^۲=۲^۲=۴$$

پس مجموعهٔ $(A\times B)\cap(B\times A)$ دارای ۴ عضو بوده که $۲^۴=۱۶$ زیرمجموعه دارد.

۱۲۱. گزینه ۳

$$n((A\cap B')\times(A\cup B')')=n((A\cap B')\times(A'\cap B))=$$
$$n((A-B)\times(B-A))=n(A-B)\times n(B-A)=$$
$$(n(A)-n(A\cap B))(n(B)-n(B\cap A))=$$
$$(۵-۲)(۶-۲)=۳\times ۴=۱۲$$