

(فصل ۳)

توابع نمایی و لگاریتمی

۱۹۸	درس ۱: تابع نمایی
۲۰۶	درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۲۱۱	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی
۲۱۹	آزمون جامع
۲۲۱	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۴)

مثلثات

۲۴۵	درس ۱: رادیان
۲۵۱	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی از زوایا
۲۶۵	درس ۳: توابع مثلثاتی
۲۷۴	درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۲۸۵	آزمون جامع
۲۸۷	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۵)

حد و پیوستگی

۳۱۸	درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۳۲۲	درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۳۱	درس ۳: قضایای حد
۳۳۷	درس ۴: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
۳۴۵	درس ۵: پیوستگی
۳۵۶	آزمون جامع
۳۵۸	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۱)

جبر و معادله

۸	درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۶	درس ۲: معادلات درجه دوم
۳۲	درس ۳: معادلات گویا و گنگ
۳۸	درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۵۰	درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی
۵۷	آزمون جامع
۵۹	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۲)

تابع

۱۱۸	درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع
۱۲۴	درس ۲: انواع تابع
۱۳۶	درس ۳: وارون تابع
۱۴۵	درس ۴: اعمال روی توابع
۱۵۷	آزمون جامع
۱۵۹	پاسخنامه تشریحی

جبر و معادله (فصل ۱)





درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی و نکاتش را سال گذشته یاد گرفتید. برای یادآوری هم که شده در جدول زیر مفاهیم و نکاتش را با هم مرور کنیم (البته برای بعضی‌ها تازگی داره!):

دنباله حسابی، دنباله‌ای که در آن تفاضل هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گویند و آن را با d نمایش می‌دهند. برای مثال دنباله $1, 5, 9, \dots$ یک دنباله حسابی با جمله اول 1 و قدرنسبت $4 = 5 - 1$ است.	
$a_n = a_1 + (n-1)d$	جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d برابر است با:
$b = \frac{a+c}{2}$	اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، آن‌گاه:
$d = \frac{b-a}{k+1}$	اگر بین دو عدد a و b واسطه حسابی قرار دهیم قدرنسبت دنباله حاصل برابر است با:
$a_m \pm a_n = a_p \pm a_q$ مثال: $a_7 + a_{10} = a_4 + a_{13}$	اگر $m \pm n = p \pm q$ آن‌گاه در دنباله حسابی داریم:

اثبات فرمول مجموع جملات یک دنباله حسابی

بحث را با یک مثال شروع کنیم. به دنباله حسابی $1, 2, 3, \dots$ توجه کنید. فرض کنید قرار باشد مجموع پنجاه جمله اول دنباله را محاسبه کنیم یعنی:

$$S_{50} = 1 + 2 + \dots + 49 + 50$$

یک روش اینه که بشینی یکی یکی اعداد را با هم جمع کنی! اما یک روش قشنگ‌تر وجود داره! این مجموع را از انتها به ابتدا بنویسید:

$$S_{50} = 50 + 49 + \dots + 2 + 1$$

اگر طرفین این دو تساوی را با هم جمع کنیم، داریم:

$$2S_{50} = \underbrace{(51+51+\dots+51+51)}_{50 \text{ تا}} \Rightarrow 2S_{50} = 50(51) \Rightarrow S_{50} = \frac{50(51)}{2} = 25(51) = 1275$$

مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

هه! پس در حالت کلی می‌توانیم یک روش برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی ارائه کنیم. این طوری:

فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ جمله اول یک دنباله حسابی باشند، مجموع این n جمله برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n \quad (1)$$

حالا این مجموع را از انتها به ابتدا می‌نویسیم:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \Rightarrow S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1 \quad (2)$$

با جمع تساوی‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

اگر فرمول جمله عمومی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ را در فرمول بالا به جای a_n جای‌گذاری کنیم، روش دیگری برای محاسبه مجموع بالا

حاصل می‌شود: $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

مثال در یک دنباله حسابی که ۱۵ جمله دارد، جمله اول ۳ و جمله پانزدهم ۲۵ است. مجموع همه جملات دنباله را بیابید.

پاسخ چون جمله اول و آخر (جمله پانزدهم) را داریم، از فرمول اول استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2} [a_1 + a_{15}] = \frac{15}{2} [3 + 25] = \frac{15}{2} [28] = 15 \times 14 = 210$$

تست مجموع ده جمله اول دنباله حسابی ...، ۵، ۲، -۱ کدام است؟

۱۴۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

پاسخ گزینه ۳. جمله اول دنباله -۱ و قدرنسبت آن $3 - (-1) = 4$ است. پس با توجه به فرمول دوم، مجموع ده جمله اول

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2(-1) + (10-1)4] = \frac{10}{2} [-2 + 36] = 5(34) = 170$$

برابر است با:

مثال مجموع n جمله اول دنباله ...، ۸، ۲، ۱۴ را بیابید.

پاسخ جمله اول دنباله $a_1 = 2$ و قدرنسبت آن $d = 6$ است. پس مجموع n جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2(2) + (n-1)6] = \frac{n}{2} [4 + 6n - 6] = \frac{n}{2} [6n - 2] \Rightarrow S_n = 3n^2 - n$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $S_n = An^2 + Bn$ نیز قابل نمایش است. در این حالت

نکات مقابل را خواهیم داشت: **۱** جمله اول دنباله: $a_1 = S_1$ **۲** قدرنسبت دنباله: $d = 2A$

تست مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - n$ است. جمله پنجم دنباله کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۷ (۳)

۲۶ (۲)

۲۲ (۱)

$$S_n = 3n^2 - n : \begin{cases} a_1 = S_1 = 3(1)^2 - (1) = 2 \\ d = 2A = 2(3) = 6 \end{cases}$$

روش اول

پاسخ گزینه ۲

بنابراین با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی، جمله پنجم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow a_5 = a_1 + (5-1)d = 2 + 4(6) = 26$$

روش دوم یک روش باهاتر! نگاه کن!

$$\begin{cases} S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{cases} \Rightarrow S_5 - S_4 = a_5 \xrightarrow{S_5=70, S_4=44} a_5 = 70 - 44 = 26$$

اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد آن‌گاه جمله n ام دنباله (جمله عمومی) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مجموع جملات دنباله هندسی

این‌جا هم اول مفاهیم و نکاتی که سال گذشته خوانده‌اید را مرور می‌کنیم:

دنباله هندسی، دنباله‌ای که در آن تقسیم هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامند و آن را با q (یا r) نمایش می‌دهند. برای مثال دنباله ...، ۵۴، ۱۸، ۶، ۲ یک دنباله هندسی با جمله اول ۲ و قدرنسبت $\frac{6}{2} = 3$ است.	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با:
$b^x = ac$	اگر a ، b و c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آن‌گاه:
$q^{k+1} = \frac{b}{a}$	اگر بین دو عدد a و b واسطه هندسی قرار دهیم، قدرنسبت دنباله حاصل به صورت مقابل محاسبه می‌شود:
$a_n \times a_m = a_p \times a_q$	اگر $m + n = p + q$ ، آن‌گاه در دنباله هندسی داریم:

اثبات فرمول مجموع جملات یک دنباله هندسی

دنباله هندسی ...، ۱۸، ۶، ۲ را در نظر بگیریم. اگر قرار باشد مجموع ده جمله اول دنباله را محاسبه کنیم می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم (چون $a_1 = 2$ و $q = 3$ ، پس جمله دهم دنباله برابر $a_{10} = 2 \times 3^9$ است.):

$$S_{10} = 2 + 6 + 18 + \dots + 2 \times 3^8 + 2 \times 3^9 \xrightarrow[\text{طرفین} \times q]{q=3} 3S_{10} = 6 + 18 + \dots + 2 \times 3^9 + 2 \times 3^{10}$$

دو طرف تساوی‌ها را از هم کم می‌کنیم (وقتی کم می‌شود، فقط جمله اول از تساوی اول و جمله آخر از تساوی دوم می‌ماند):

$$S_{10} - 3S_{10} = 2 - 2 \times 3^{10} \Rightarrow -2S_{10} = 2(1 - 3^{10}) \Rightarrow S_{10} = 3^{10} - 1$$

پس در حالت کلی رابطه مربوط به مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی به صورت زیر محاسبه می‌شود (جمله n ام $a_n q^{n-1}$ است):

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$\xrightarrow{\times q} qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با ($q \neq 1$):

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

تست مجموع ۸ جمله اول دنباله ...، ۲۰، ۱۰، ۵ کدام است؟

۱۲۰۰ (۴)

۱۲۲۵ (۳)

۱۲۵۰ (۲)

۱۲۷۵ (۱)

دنباله بالا یک دنباله هندسی با جمله اول ۵ و قدرنسبت $\frac{1}{2} = 2$ است. بنابراین طبق فرمول مجموع جملات

پاسخ گزینه ۱

دنباله هندسی، مجموع ۸ جمله اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{5(1-2^8)}{1-2} = \frac{5(1-256)}{-1} = 5(255) = 1275$$

مثال الف) مجموع ۸ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت q چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

ب) مجموع ۴ جمله دوم دنباله بالا چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

پاسخ الف)

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4$$

پس مجموع ۸ جمله اول دنباله $(1+q^4)$ برابر مجموع چهار جمله اول آن است.

ب) مجموع چهار جمله دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_8 - S_4 = \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\text{مجموع چهار جمله دوم}} + \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{\text{مجموع چهار جمله اول}} \Rightarrow S_8 - S_4 = S_8 - S_4$$

پس نسبت مجموع چهار جمله دوم به مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع چهار جمله دوم}}{\text{مجموع چهار جمله اول}} = \frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{S_8}{S_4} - 1 \stackrel{\text{قسمت الف)}}{=} 1 + q^4 - 1 = q^4$$

پس مجموع چهار جمله دوم دنباله، q^4 برابر مجموع چهار جمله اول دنباله است.

در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q داریم:

$$1 \quad \frac{\text{مجموع } 2n \text{ جمله اول}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$2 \quad \frac{\text{مجموع } n \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$$

مثال دنباله هندسی ... ۱۲, ۶, ۳, ده جمله دارد. مجموع جملات ردیف زوج چند برابر مجموع جملات ردیف فرد است؟
پاسخ چون دنباله ۱۰ جمله دارد پس:

$$\frac{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}{\text{مجموع جملات ردیف فرد}} = \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{10}}{a_1 + a_3 + \dots + a_9} = \frac{a_1q + a_1q^3 + \dots + a_1q^9}{a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8} = \frac{q(a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8)}{a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8} = q$$

با توجه به دنباله، $q = 2$ است. پس مجموع جملات ردیف زوج، ۲ برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

نکته اگر تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج باشد، مجموع جملات ردیف زوج، q برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

یک رابطه مهم، به مجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ توجه کنید. این مجموع، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و

قدرنسبت a است. پس طبق رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ این مجموع را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1(1-a^n)}{1-a} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

طرفین وسطین $\rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$

مثال ساده‌شده عبارت $\frac{(a-1)(a^r + a^2 + a + 1)}{a^r - 1}$ را بیابید.

پاسخ در صورت کسر، از اتحاد کادر بالا و در مخرج هم از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(a^r - 1)}{(a^r - 1)(a^r + 1)} = \frac{1}{a^r + 1}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموع جملات دنباله حسابی

۱- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۰ کدام است؟

- (۱) ۱۹۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۶۰

۲- روی محیط دایره‌ای ۱۵ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده کدام است؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۹۱ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۳- مجموع ۱۵ جمله اول دنباله حسابی ... ۲, -۱, -۴, کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۵ (۳) ۲۷۰ (۴) ۲۸۵

۴- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ کم‌تر است. مجموع ده جمله اول آن کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{5}$ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{27}{5}$ (۴) ۳۰ *(مشابه تهرنی ۸۲)*

۵- در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده می‌شود؟

(ریاضی ۸۳)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

۶- مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۲۵ است. به هر یک از جمله‌ها ۶ واحد اضافه کرده و سپس در ۲ ضرب کرده و در پایان ۳ واحد

از هر یک کم می‌کنیم. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۸۴ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۴۰

۷- در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $\frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله، کدام است؟ *(تهرنی ۸۹)*

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۸- حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ کدام است؟

- (۱) n^2 (۲) $n^2 - 2n$ (۳) $n^2 + 2n$ (۴) $n^2 - n$

۹- اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی با دو جمله $a_1 = 1 + 2p$ و $a_7 = p - 1$ برابر ۶۰ باشد، p کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) -۹ (۴) -۷

۱۰- اعداد $\frac{5}{7}, y, x, 1$ ، چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

- ۵۷ (۱) $62/5$ (۲) $67/5$ (۳) ۶۸ (۴)

۱۱- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر است؟ (تجربی خارج ۸۸)

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۱۲- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است. اگر جمله پنجم ۳ واحد از جمله سوم بیشتر باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- ۰/۲۵ (۱) $-0/25$ (۲) ۰/۵ (۳) $-0/5$ (۴)

۱۳- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) (ریاضی ۹۰)

۱۴- مجموع ۱۵ جمله اول یک دنباله حسابی با مجموع ۲۵ جمله اول آن مساوی است. مجموع ۴۰ جمله اول این دنباله برابر کدام است؟

- صفر (۱) S_{20} (۲) S_{40} (۳) S_{50} (۴)

۱۵- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- ۷/۵ (۱) ۸ (۲) ۸/۵ (۳) ۹ (۴) (ریاضی خارج ۸۵)

۱۶- در دنباله حسابی $... -22, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟

- -135 (۱) $-\frac{289}{2}$ (۲) -146 (۳) $-\frac{319}{2}$ (۴)

۱۷- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جمله اول کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) (تجربی خارج ۸۵)

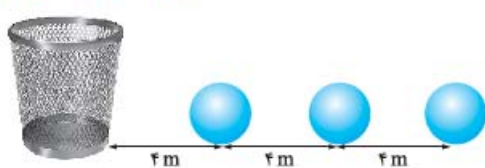
۱۸- با توجه به الگوی مقابل، مجموع نقطه‌ها تا ردیف دهم کدام است؟

- ۵۵ (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۱۱۰ (۴)

۱۹- در دنباله حسابی $... 5, 8, 11$ حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

۲۰- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۴ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۴ متر است. دوندای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. حداقل چند توپ باید به سبد بیندازد تا بیش از ۴۴۰ متر دویده باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۲۱- در دنباله $a_n = n^2 - (n+1)^2$ ، مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- ۱ (۱) -399 (۲) ۴۰۱ (۳) -400 (۴)

۲۲- یک دنباله حسابی ۹۹ جمله دارد. اگر جمله وسط دنباله برابر $\frac{20}{11}$ باشد، مجموع همه جملات دنباله کدام است؟

- ۱۸۰ (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۱۲ (۳) ۲۳۶ (۴)

۲۳- در یک دنباله حسابی $a_3 + a_6 + a_9 = 20$ است. مجموع ۱۱ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۵۲ (۱) ۵۵ (۲) ۵۸ (۳) ۶۲ (۴)

۲۴- جواب معادله $(x-1) + (x+3) + (x+7) + \dots + (x+27) = 180$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۹/۵ (۲) ۸ (۳) ۸/۵ (۴)

۲۵- بین دو عدد a و ۲۴، پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم. اگر مجموع همه جملات ۱۲۶ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۲۶- بین اعداد ۵ و ۲۹ تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. اگر مجموع تمام واسطه‌ها برابر ۱۱۹ باشد، قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۷- در یک دنباله حسابی مجموع همه جملات ۴ برابر مجموع جملات اول و آخر است. اگر جمله آخر ۲۱ واحد از جمله اول بیشتر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر ۲۴۰ است. اگر مجموع همه جملات دنباله برابر ۵۲۰ باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۸ (۳) ۲۶ (۴) ۲۸

۲۹- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد و $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ ، آن‌گاه مجموع ۶ جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۶ (۳) ۷۲ (۴) ۷۵

۳۰- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد و $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4$ ، آن‌گاه جمله چهارم چه قدر از جمله دوم بیشتر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۱- اگر مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی ۲ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر و ۵ واحد از مجموع پنج جمله اول کم‌تر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۲- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - n$ است. مجموع جملات با شماره زوج کوچک‌تر از جمله بیستم کدام است؟

- (۱) ۴۲۵ (۲) ۴۵۵ (۳) ۵۰۴ (۴) ۵۱۵

۳۳- مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم

به جمله هجدهم، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

۳۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد ... (۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ... مجموع جملات در دسته بیستم کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

- (۱) ۴۰۱۰ (۲) ۴۰۲۰ (۳) ۴۰۳۰ (۴) ۴۰۴۰

۳۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... مجموع بیست جمله اول دسته سی‌ام کدام است؟ (مشابه خارج ریاضی ۹۱ و تجربی ۹۴)

- (۱) ۱۸۶۰۰ (۲) ۱۸۷۰۰ (۳) ۱۷۸۰۰ (۴) ۱۶۸۰۰

۳۶- در دو دنباله حسابی به صورت ... (۱, ۳, ۷, ۱۱), ... و ... (۲, ۵, ۸, ۱۲), ... مجموع اعداد دورقمی مشترک کدام است؟

- (۱) ۳۷۵ (۲) ۳۸۸ (۳) ۴۱۲ (۴) ۴۲۴

۳۷- مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی که مضرب ۶ هستند، کدام است؟ (بزرگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۷۸۵ (۲) ۸۱۰ (۳) ۸۴۵ (۴) ۷۶۰

۳۸- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟ (تجربی ۱۸۵)

- (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۸۴

۳۹- مجموع اعداد طبیعی دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ می‌باشند، کدام است؟

- (۱) ۱۱۸۵ (۲) ۱۲۲۰ (۳) ۱۲۶۵ (۴) ۱۳۸۰

مجموع جملات دنباله هندسی

۴۰- مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی ... ۹, ۱۸, ۳۶, ... کدام است؟

- (۱) $\frac{277}{4}$ (۲) ۷۰ (۳) $\frac{279}{4}$ (۴) ۶۹

۴۱- مجموع چند جمله دنباله هندسی ... ۱۲, ۲۴, ۴۸, ... برابر ۱۰۲۶ است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۲- دنباله هندسی ... $\frac{1}{p}, x, y, \dots$ با قدرنسبت منفی مفروض است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟ (ریاضی ۸۶ با کمی تغییر)

- (۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

۴۳- در یک دنباله هندسی به صورت $\dots, b, a, 9, 4$ با قدرنسبت مثبت، مجموع شش جمله اول کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹ با کمی تغییر)

$$(1) \frac{81}{8} \quad (2) \frac{81}{4} \quad (3) \frac{82}{8} \quad (4) \frac{83}{8}$$

۴۴- به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت هستند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟ (تبری ۹۳ با کمی تغییر)

$$(1) \frac{117}{16} \quad (2) \frac{125}{16} \quad (3) \frac{63}{4} \quad (4) \frac{127}{8}$$

۴۵- جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 2^{1-n}$ است. مجموع شش جمله اول دنباله کدام است؟

$$(1) 63 \quad (2) \frac{63}{32} \quad (3) 127 \quad (4) \frac{127}{64}$$

۴۶- بین دو عدد 4 و 324 سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این 5 عدد مثبت کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

$$(1) 482 \quad (2) 484 \quad (3) 486 \quad (4) 488$$

۴۷- بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

$$(1) 30(2 + \sqrt{2}) \quad (2) 48\sqrt{2} \quad (3) 30(\sqrt{2} + 1) \quad (4) 36(\sqrt{2} + 1)$$

۴۸- در دنباله هندسی با قدرنسبت منفی $2, a, 6, \dots$ مجموع سه جمله دوم چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

$$(1) 3 \quad (2) -3 \quad (3) 3\sqrt{3} \quad (4) -3\sqrt{3}$$

۴۹- در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟ (ریاضی ۸۵)

$$(1) \frac{1}{16} \quad (2) \frac{1}{8} \quad (3) \frac{5}{32} \quad (4) \frac{1}{4}$$

۵۰- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول 136 و مجموع شش جمله اول آن 153 است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟ (ریاضی ۸۹)

$$(1) \frac{81}{16} \quad (2) 8 \quad (3) 9 \quad (4) 16$$

۵۱- تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن 3 برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۵۲- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول از جمله ششم است. جمله پنجم چند برابر جمله اول است؟

$$(1) 2 \quad (2) \frac{5}{3} \quad (3) 3 \quad (4) \frac{4}{3}$$

۵۳- در یک دنباله هندسی، مجموع 8 جمله اول 48 و مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم برابر 240 است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$(1) \sqrt[3]{4} \quad (2) \sqrt[3]{5} \quad (3) 2 \quad (4) \sqrt{5}$$

۵۴- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر 1 و مجموع چهار جمله اول آن 3 می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

$$(1) \frac{10}{8} \quad (2) \frac{11}{2} \quad (3) \frac{12}{6} \quad (4) \frac{13}{4}$$

۵۵- در یک دنباله هندسی جمله سوم $\frac{1}{44}$ واحد از جمله دوم بیشتر است و جمله دوم $\frac{1}{8}$ واحد از جمله اول کم‌تر است. مجموع چهار جمله اول دنباله کدام است؟

$$(1) \frac{0}{376} \quad (2) \frac{0}{488} \quad (3) \frac{0}{328} \quad (4) \frac{0}{456}$$

۵۶- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت، مجموع جملات سوم و ششم برابر 14 و تفاضل جملات سوم و نهم برابر 98 است. مجموع چهار جمله اول کدام است؟

$$(1) 6 \quad (2) \frac{20}{3} \quad (3) \frac{11}{2} \quad (4) \frac{35}{6}$$

۵۷- جمله ششم یک دنباله هندسی 81 و حاصل ضرب پنج جمله اول دنباله، 243 است. مجموع پنج جمله اول دنباله کدام است؟

$$(1) 40\frac{1}{3} \quad (2) 40\frac{2}{3} \quad (3) 40\frac{1}{9} \quad (4) 41\frac{1}{9}$$

۵۸- حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای x کدام است؟ (ریاضی ۸۲)

$$(1) 507 \quad (2) 511 \quad (3) 512 \quad (4) 516$$

۵۹- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^2 + 1}$ به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

$$(1) 3 \quad (2) 4 \quad (3) 5 \quad (4) 6$$

(ریاضی ۹۳)

۶۰- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۱- اگر در خانه اول شطرنج ۱ گندم، در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل، گندم قرار دهیم، اولین خانه‌ای که تعداد گندم‌ها بیشتر از ۴۱۰۰ خواهد بود، کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۶۲- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ کرده سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۳- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر بیش از ۹۹ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۴- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها می‌شود، پس از زمین‌خوردن، به اندازه $\frac{1}{4}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. اگر این توپ از ارتفاع ۱۰ متری رها شود، در لحظه‌ای که توپ برای هفتمین بار به زمین می‌خورد، توپ تقریباً چه مسافتی را پیموده است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۷ (۳) ۲۳ (۴) ۲۷

سری

۶۵- اگر $a_n = 3^n$ و $b_n = 3^{1-n}$ ، مجموع ۵ جمله اول دنباله $a_n \cdot b_n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{422}{9}$ (۲) $\frac{211}{9}$ (۳) $\frac{211}{81}$ (۴) $\frac{422}{81}$

۶۶- دنباله مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $\dots, \frac{5}{4}, 1, \frac{1}{6}$ است. مجموع ده جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) $30 \cdot \frac{1}{3}$ (۲) $31 \cdot \frac{2}{3}$ (۳) $32 \cdot \frac{1}{3}$ (۴) $33 \cdot \frac{2}{3}$

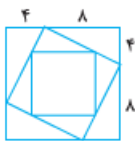
۶۷- مجموع ده جمله اول دنباله $9, 99, 999, \dots$ چندتا یک دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۸- مجموع ده جمله اول دنباله $\frac{1}{1024}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$ چند برابر $\frac{1}{1024}$ است؟

- (۱) ۹۱۷۲ (۲) ۹۷۱۲ (۳) ۹۲۱۷ (۴) ۹۲۷۱

۶۹- در شکل زیر، طول ضلع مربع بزرگ‌تر برابر ۱۲ است. مطابق شکل مربع‌هایی با نسبت‌های ثابت روی اضلاع، در داخل مربع بزرگ‌تر رسم شده است. با رسم حداقل چند مربع، مجموع مساحت‌های مربع‌ها از ۲۹۷ بیشتر می‌شود؟



- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۰- در یک دنباله حسابی جمله اول ۳ واحد از جمله دوم کم‌تر است. اگر مجموع n جمله اول ۱۰ و مجموع $2n$ جمله اول ۶۸ باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۷۱- حاصل مجموع $2 - 15x^{15} + 3x^3 + 2x^2 + x$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $5(2^{17})$ (۲) $5(2^{16})$ (۳) $7(2^{17})$ (۴) $7(2^{16})$

۷۲- در یک دنباله هندسی جمله $(n - m)$ برابر ۲۰ و جمله $(n + m)$ آن برابر ۵ است. اگر بین جمله m دنباله و عدد ۱۶۰، هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، مجموع کل نه عدد حاصل کدام است؟

- (۱) $280 + 70\sqrt{2}$ (۲) $320 + 120\sqrt{2}$ (۳) $290 + 140\sqrt{2}$ (۴) $310 + 150\sqrt{2}$

۷۳- مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی برابر $75/15$ و مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر $7/875$ است. حاصل ضرب این شش جمله کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ تشریحی جبر و معادله

وقتی به جملات ۶ واحد اضافه، سپس در ۲ ضرب و در پایان ۳ واحد از هر یک کم کنیم، جملات جدید به صورت $۲(a_1+۶)-۳, ۲(a_۲+۶)-۳, \dots, ۲(a_{۱۰}+۶)-۳$ خواهند بود. مجموع این جملات برابر است با:

$$\begin{aligned} S' &= 2(a_1+6) - 3 + 2(a_2+6) - 3 + \dots + 2(a_{10}+6) - 3 \\ \Rightarrow S' &= 2a_1 + 9 + 2a_2 + 9 + \dots + 2a_{10} + 9 \\ &= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + \underbrace{9+9+\dots+9}_{10} \\ \Rightarrow S' &= 2(25) + 10(9) = 50 + 90 = 140 \end{aligned}$$

۷- **گزینه ۲** از رابطه $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}]$$

جمله عمومی دنباله را داریم، پس:

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 \\ a_{15} = \frac{45}{2} - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \left[\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5 \right] = \frac{15}{2} \left[\frac{48}{2} - 10 \right]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} [24 - 10] = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

۸- **گزینه ۱** **روش اول** مجموع داده شده، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و جمله آخر $2n-1$ است. (جمله اول دنباله ۱، $2(1)-1=1$ ، جمله دوم $2(2)-1=3$ و ... و در نتیجه جمله n ام، $2(n)-1$ است. پس n جمله داریم.)

با توجه به فرمول $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ داریم:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}[1 + 2n-1]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

روش دوم مطابق الگوی زیر عمل کنیم:

$$1 = 1^2 \quad 1 + 3 = 2^2 \quad 1 + 3 + 5 = 3^2 \quad \dots \quad 1 + 3 + 5 + (2n-1) = n^2$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۹- **گزینه ۲** جمله اول و دوم را داریم، پس قدرنسبت را هم داریم: $d = a_2 - a_1 = (p-1) - (1+2p) = -p-2$ (*)
مجموع ۸ جمله اول را هم داریم:

$$S_8 = 60 \Rightarrow \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 60$$

$$\Rightarrow 4[2(1+2p) + 7(-p-2)] = 60$$

$$\Rightarrow 4(2+4p-7p-14) = 60 \Rightarrow 4(-3p-12) = 60$$

$$\Rightarrow -3p-12=15 \Rightarrow -3p=27 \Rightarrow p=-9$$

۱- **گزینه ۲** مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ است. بنابراین:}$$

$$S_{15} = 1+2+\dots+20 = \frac{20(21)}{2} = 210$$

۲- **گزینه ۱** نقطه اول به ۱۴ نقطه دیگر وصل می‌شود و

۱ تا ۱۴ وتر ایجاد می‌کند.

نقطه دوم به ۱۳ نقطه باقی‌مانده وصل می‌شود و ۱ تا ۱۳ وتر ایجاد می‌کند. با ادامه این عمل داریم:

$$105 = \frac{14(14+1)}{2} = 105$$

۳- **گزینه ۲**

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ d = a_2 - a_1 = -1 - (-4) = 3 \end{cases}$$

دنباله: $-4, -1, 2, \dots$

قدرنسبت و جمله اول را داریم. پس مجموع پانزده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(-4) + 14(3)]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[-8 + 42] = 15 \times 17 = 255$$

۴- **گزینه ۲** «هر جمله از جمله مقابل خود به اندازه $\frac{1}{2}$

کم‌تر است» پس:

$$d = -\frac{1}{2}$$

با توجه به مقادیر $a_1 = 5$ و $d = -\frac{1}{2}$ مجموع ده جمله اول دنباله

برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(5) + 9(-\frac{1}{2})] = 5(5 - \frac{9}{2}) = 27\frac{1}{2}$$

۵- **گزینه ۲** مجموع ۲۰ جمله اول (وقتی هنوز دست به

پیزی نزنیم!) برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] = 10[2a_1 + 19d]$$

حالا قدرنسبت را یک واحد زیاد می‌کنیم و مجموع ۲۰ تا جمله اول این دنباله جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$S'_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + 19(d+1)] = 10[2a_1 + 19d + 19]$$

$$= \underbrace{10[2a_1 + 19d]}_{S_{20}} + 190$$

پس با دست‌زدن به قدرنسبت! 190 واحد به مجموع بیست جمله اول اضافه می‌شود.

۶- **گزینه ۲** مجموع ۱۰ جمله اول دنباله برابر ۲۵ است،

$$S_{10} = 25 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 25 \quad (\approx)$$

پس:

۱۰- گزینه

جمله اول را داریم: $a_1 = 1$ اما قدرنسبت را نه. آفچه پیکاریه؟ فب درست و فسایی قدرنسبت رو هم برین دیگه! باید با توجه به جملات معلوم، قدرنسبت را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_7 = \frac{5}{3} \Rightarrow a_7 - a_1 = 3d \Rightarrow \frac{5}{3} - 1 = 3d \\ \Rightarrow 3d = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را داریم، پس از فرمول $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ برای محاسبه یازدهم جمله اول استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2(1) + 14(\frac{1}{9})] = \frac{15}{2}[2 + \frac{14}{9}] = \frac{15 \times 9}{2} = 67.5$$

۱۱- گزینه

جمله هفتم نصف جمله سوم است $a_7 = \frac{1}{2}a_3$

$$\Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

برای این که ببینیم مجموع چند جمله اول دنباله صفر است، باید $S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 0$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$\xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2}[-20d + (n-1)d] = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[(n-21)d] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ (همه جملات صفر می‌شوند که مدنظر نیست.)} \\ n = 21 \end{cases}$$

پس مجموع ۲۱ جمله اول دنباله، صفر است.

۱۲- گزینه

مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است:

$$S_5 = S_3 + 10$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] = \frac{3}{2}[2a_1 + 2d] + 10$$

$$\Rightarrow 5a_1 + 10d = 3a_1 + 3d + 10 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 10 \quad (*)$$

$$a_5 - a_3 = 3 \quad \text{جمله پنجم، ۳ واحد از جمله سوم بیشتر است.}$$

$$\Rightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} 2a_1 + 7(\frac{3}{2}) = 10 \Rightarrow 2a_1 + 10.5 = 10$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -0.5 \Rightarrow a_1 = -0.25$$

۱۳- گزینه

مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول است:

$$S_{20} = 3S_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{2}[2a_1 + (20-1)d] = 3(\frac{12}{2}[2a_1 + (12-1)d])$$

$$\Rightarrow 10[2a_1 + 19d] = 18[2a_1 + 11d] \Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d$$

$$\Rightarrow 16a_1 = -8d \Rightarrow d = -2a_1$$

هم‌چنین جمله سوم دنباله برابر ۶ است:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{d = -2a_1} a_1 + 2(-2a_1) = 6$$

$$\Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{d = -2a_1} d = 4$$

با توجه به مقادیر a_1 و d جمله دهم دنباله برابر است با:

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۱۴- گزینه

مجموع ۱۵ جمله اول با مجموع ۲۵ جمله اول برابر است، پس:

$$S_{25} = S_{15}$$

با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ داریم:

$$\frac{25}{2}[2a_1 + 24d] = \frac{15}{2}[2a_1 + 14d]$$

$$\Rightarrow 5[2a_1 + 24d] = 3[2a_1 + 14d]$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 120d = 6a_1 + 42d \Rightarrow 4a_1 + 78d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 39d = 0 \quad (**)$$

از طرفی مجموع چهل جمله اول برابر است با:

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2a_1 + 39d] \stackrel{(*)}{=} 20(0) = 0$$

۱۵- گزینه

مجموع ۴ جمله اول ۱۵ است، پس

$$S_4 = 15 \quad \text{مجموع پنج تا جمله بعدی هم ۳۰ است، پس طراح}$$

غیرمستقیم مجموع ۹ تا جمله اول را هم داده است. نگاه کن:

مجموع پنج جمله بعدی + مجموع چهار جمله اول $S_9 = 15 + 30 = 45$

$$S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \quad (**)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}[2a_1 + 3d] = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \quad (*) \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \quad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(**) - (*)} \delta d = 10 - \frac{15}{2} \Rightarrow \delta d = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 2a_1 + 8(\frac{1}{2}) = 10 \Rightarrow 2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$$

با توجه به مقدار a_1 و d ، جمله یازدهم را محاسبه کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 8$$

۱۶- گزینه

با توجه به جملات دنباله داریم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_3 = -22 \Rightarrow a_3 - a_1 = 2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow -22 - (-27) = 2d \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

برای محاسبه مجموع جملات منفی، اول باید ببینیم چندتا جمله منفی داریم. پس جمله عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ d = \frac{5}{2} \Rightarrow a_n = -27 + (n-1)\frac{5}{2} \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای چندتا n $a_n < 0$ است:

$$-27 + (n-1)\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \frac{5}{2}(n-1) < 27$$

$$\Rightarrow n-1 < \frac{54}{5} \Rightarrow n-1 < 10.8 \Rightarrow n < 11.8$$

پس دنباله، ۱۱ تا جمله منفی دارد! بنابراین مجموع این جملات برابر

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2(-27) + 10(\frac{5}{2})] = \frac{11}{2}[-54 + 25] \quad \text{است با:}$$

$$= \frac{11}{2}[-29] = -\frac{319}{2}$$

$$= \begin{cases} n_1 = \frac{-7 + 109 / \dots}{6} = \frac{102 / \dots}{6} = 17 / \dots \\ n_2 = \frac{-7 - 109 / \dots}{6} = \frac{-116 / \dots}{6} = -19 / \dots \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادله (\exists) خارج دو ریشه است پس:

$$3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow \begin{cases} n > 17 / \dots \\ n < -19 / \dots \end{cases}$$

چون n مثبت است $\rightarrow n > 17 / \dots \Rightarrow n \geq 18$

پس حداقل باید ۱۸ جمله اول را جمع کنیم تا مجموع بیشتر از ۵۰۰ شود.

۲۰- گزینه برای برداشتن توپ اول، ۴ متر میره ۴ متر

میاره. یعنی (۴)۰۲. برای برداشتن توپ دوم، ۸ متر میره ۸ متر میار. یعنی (۸)۰۲ و همین‌بوری میره و میار...! پس کل مسافتی که دونده برای انداختن توپ n ام طی می‌کند به صورت مجموع زیر است:

$$S = 2(4) + 2(8) + 2(12) + \dots + 4n \\ = 8(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 4n^2 + 4n$$

هالا آگه بفوایم هاشو بگیریم و یک کاری کنیم بیش از ۳۳۰ متر بدونه!... باید نامعادله $S > 440$ را حل کنیم:

$$4n^2 + 4n > 440 \Rightarrow n^2 + n > 110 \Rightarrow n^2 + n - 110 > 0 \\ \Rightarrow (n - 10)(n + 11) > 0 \Rightarrow n < -11, n > 10$$

پس باید بیشتر از ۱۰ تا توپ داخل سبد بندازه. پس حداقل ۱۱ تا توپ باید بندازه.

۲۱- گزینه اول جمله عمومی را کمی ساده‌تر کنیم؛ با

استفاده از اتحاد اول این کار را انجام می‌دهیم:

$$a_n = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1 \\ a_n = an + b \text{ به صورت } \\ \text{است و این جا هم جمله عمومی یعنی } -2n - 1, a_n = -2n - 1, \text{ همین فرم را دارد، پس با یک دنباله حسابی سروکار داریم. بنابراین با کمک فرمول} \\ S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]. \text{ مجموع } 19 \text{ جمله اول را محاسبه می‌کنیم:}$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}[a_1 + a_{19}] \\ \frac{a_n = -2n - 1}{a_1 = -3, a_{19} = -39} \rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}[(-3) + (-39)] \\ = \frac{19}{2}(-42) = 19(-21) = -399$$

۲۲- گزینه وقتی دنباله ۹۹ جمله دارد، جمله ۱۵۰

جمله وسط خواهد بود، پس: $a_{50} = \frac{20}{11}$. از طرفی مجموع ۹۹ جمله

$$S_{99} = \frac{99}{2}[a_1 + a_{99}] \text{ اول دنباله برابر است با:}$$

چون جمله پنجاهم وسط جملات اول و نود و نهم است، پس:

$$a_1 + a_{99} = 2a_{50}. \text{ (جمع اندیس‌ها در دو طرف برابر است.)} \\ \Rightarrow S_{99} = \frac{99}{2}[2a_{50}] = 99a_{50} = 99\left(\frac{20}{11}\right) = 180$$

۱۷- گزینه مجموع جملات ردیف زوج 15° است:

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150 \quad (*)$$

مجموع جملات ردیف فرد 135 است:

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \quad (**)$$

هالا بین چی کار می‌کنیم!

$$\begin{aligned} & \text{۱۰ تا جمله} \\ (*) - (**): & \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \dots + \underbrace{(a_{20} - a_{19})}_d \\ & = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1/5 \end{aligned}$$

$$(*) + (**): a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19} + a_{20} = 285$$

$$\Rightarrow S_{20} = 285 \Rightarrow \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] = 285$$

$$10(2a_1 + 19d) = 285 \xrightarrow{d=1/5} 2a_1 + 19(1/5) = 28/5$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 28/5 = 28/5 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

۱۸- گزینه **روش اول** در ردیف اول، دو نقطه، در

ردیف دوم، چهار نقطه و ... است. پس دنباله نقاط این ردیف‌ها به صورت مقابل است:

برای محاسبه مجموع نقطه‌های توپ تا ردیف دهم باید مجموع ده جمله اول دنباله را حساب کنیم:

$$2, 4, 6, 8, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 4 - 2 = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(2) + 9(2)] = 10[2 + 9] = 110$$

روش دوم از نکته زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در ردیف دهم بیست تا نقطه داریم، بنابراین:

$$S_{10} = 2 + 4 + \dots + 20 = 2(1 + 2 + \dots + 10) = 2\left(\frac{10(11)}{2}\right) = 110$$

۱۹- گزینه

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود، یعنی کم‌ترین مقداری از n را حساب کنید که $S_n > 500$:

$$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] > 500$$

$$\xrightarrow{a_1=5, d=3} \frac{n}{2}[2(5) + (n-1)3] > 500$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[10 + 3n - 3] > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}[3n + 7] > 500$$

$$\xrightarrow{\times 2} 3n^2 + 7n > 1000 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \quad (\exists)$$

جواب‌های معادله $3n^2 + 7n - 1000 = 0$ برابر است با:

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(3)(-1000)}}{2(3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{12049}}{6} \\ = \frac{-7 \pm 109 / \dots}{6}$$

۲۳- گزینه

مجموع ۱۱ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2a_1 + 10d] \quad (\approx)$$

حالا از تساوی داده شده کمک می‌گیریم: $a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20$

$$\Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 8d = 20$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 20d = 20 \xrightarrow{\div 4} 2a_1 + 5d = 5$$

$$\xrightarrow{(*)} S_{11} = \frac{11}{2}[5] = 55$$

۲۴- گزینه

دنباله اعداد $1, 3, 7, \dots, 27$ تشکیل

یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -1$ ، جمله آخر $a_n = 27$ و

قدرنسبت $d = 4$ می‌دهند. بنابراین تعداد جملات را از رابطه زیر به

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 27 = -1 + (n-1)4$$

$$\Rightarrow 28 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

می‌توانید تعداد جملات را به صورت زیر هم حساب کنید:

$$\frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{قدرنسبت}} = \frac{27 - (-1)}{4} + 1$$

برگردیم معادله را حل کنیم. برای حل معادله، طرف چپ را به

صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{(x + x + \dots + x)}_{8 \text{ تا}} + (-1 + 3 + 7 + \dots + 27) = 180$$

$$(27 + 7 + 3 + 1) - 1 = \text{مجموع ۸ جمله اول یک دنباله حسابی}$$

با جمله اول -1 و جمله آخر 27 است، بنابراین:

$$\Rightarrow 8x + \frac{8}{2}[-1 + 27] = 180 \Rightarrow 8x + 4(26) = 180$$

$$\Rightarrow 8x + 104 = 180 \Rightarrow 8x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{8} = 9.5$$

۲۵- گزینه

بین دو عدد a و 24 پنج واسطه حسابی قرار

می‌دهیم. پس تعداد جملات برابر 7 ، جمله اول a و جمله آخر (جمله هفتم)

24 است. چون مجموع همه جملات برابر 126 است، بنابراین:

$$S_7 = \frac{7}{2}[\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}] = \frac{7}{2}[a + 24] = 126$$

$$\Rightarrow a + 24 = 36 \Rightarrow a = 12$$

برای محاسبه قدرنسبت هم از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی

استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = a = 12 \\ a_7 = 24 \end{cases} \Rightarrow a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow 24 = 12 + 6d$$

$$\Rightarrow 12 = 6d \Rightarrow d = 2$$

۲۶- گزینه

بین 5 و 29 تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم.

پس جمله اول و آخر واسطه را با فرض این که قدرنسبت دنباله حاصل d است

می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم: $5, 5+d, \dots, 29-d, 29$

حالا با کمک رابطه $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ مجموع واسطه‌ها را می‌یابیم.

فقط دقت کنید که جمله اول واسطه‌ها $5+d$ و جمله آخر آن

$$29-d$$
 است: $S_n = \frac{n}{2}[5+d+29-d] \Rightarrow 119 = \frac{n}{2}[34]$

$$\Rightarrow 119 = 17n \Rightarrow n = 7$$

با توجه به این که تعداد واسطه‌ها 7 تا است، عدد 29 جمله نهم و عدد 5

جمله اول است، پس: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_9 = a_1 + 8d$

$$\Rightarrow 29 = 5 + 8d \Rightarrow 24 = 8d \Rightarrow d = 3$$

۲۷- گزینه مجموع همه جملات، 4 برابر مجموع

جملات اول و آخر است. پس: $S_n = 4(a_1 + a_n)$

با توجه به تساوی بالا از فرمول $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ استفاده کرده

و تعداد جملات را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 4(a_1 + a_n) \Rightarrow \frac{n}{2} = 4 \Rightarrow n = 8$$

جمله آخر 21 واحد از جمله اول بیشتر است. چون $n = 8$ است

پس جمله آخر همان جمله هشتم است. در نتیجه:

$$a_8 = 21 + a_1 \Rightarrow a_1 + 7d = 21 + a_1 \Rightarrow 7d = 21 \Rightarrow d = 3$$

۲۸- گزینه مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر 240

است: $(*)$ $240 = \text{مجموع سه جمله آخر} + \text{مجموع سه جمله اول}$

$$\begin{cases} \text{مجموع سه جمله اول} = a_1 + a_2 + a_3 \\ \text{مجموع سه جمله آخر} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2})$$

$$= 240 \quad (**)$$

مجموع اندیس‌های هر پرانتز برابر $n+1$ است، پس:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 3(a_1 + a_n) = 240 \Rightarrow a_1 + a_n = 80$$

مجموع همه جملات دنباله برابر 520 است. پس با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

داریم:

$$520 = \frac{n}{2}(80) \Rightarrow 520 = 40n \Rightarrow n = 13$$

۲۹- گزینه

با توجه به این که $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ پس: $a_n = 2n + 3$

در نتیجه مجموع 6 جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_6 = \frac{6}{2}[a_1 + a_6] \xrightarrow{a_1=5, a_6=15} S_6 = 3[5 + 15] = 60$$

۳۰- گزینه داریم:

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4 \Rightarrow S_n - S_{n-1} - S_{n-1} + S_{n-2} = 4$$

$$\Rightarrow (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = 4 \quad (\approx)$$

می‌دانیم $a_n = S_n - S_{n-1}$ ، بنابراین $a_n - a_{n-1} = S_n - S_{n-1} - S_{n-1} + S_{n-2}$ و در

نتیجه: $\xrightarrow{(*)} a_n - a_{n-1} = 4 \Rightarrow d = 4 \quad (\approx \approx)$

پس برای این که ببینیم جمله چهارم چه قدر از جمله دوم بیشتر

است به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 2d \stackrel{(**)}{=} 2(4) = 8$$

$$= 1 \cdot [382 + 19] = 4010$$

تازه یک کار دیگر هم میشه کرد! بگیم چون تا جمله آخر دسته نوزدهم ۱۹۰ تا عدد داریم پس تا جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ تا عدد داریم. پس با توجه به $a_n = n$ ، جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ است. پس طبق فرمول [جمله آخر + جمله اول] $S_n = \frac{n}{2}$ مجموع بیست جمله را حساب کنیم:

$$S = \frac{20}{2} [191 + 210] = 4010$$

۳۵- گزینه ۴: فیلی سوال چون داره! باید اول ببینیم تا

اون جمله ای که می‌خواهد چندتا عدد داریم:

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته n ام برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

↓ ↓ ↓
دسته سوم دسته دوم دسته اول

تا جمله آخر دسته بیست و نهم $\frac{29(30)}{2} = 435$ تا عدد می‌بینیم. پس تا جمله اول دسته سی ام ۴۳۶ تا عدد می‌بینیم. بنابراین جمله اول دسته سی ام، جمله ۴۳۶ ام دنباله کل اعداد یعنی ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... است. این دنباله، دنباله اعداد طبیعی فرد است. پس جمله عمومی آن اول یک و قدرنسبت ۲ روبه‌رو هستیم و جمله عمومی آن به صورت $a_n = 2n - 1$ است. (می‌توانید بگویید با یک دنباله حسابی با جمله اول یک و قدرنسبت ۲ روبه‌رو هستیم و جمله عمومی آن به صورت $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ است.)
جمله ۴۳۶ ام دنباله برابر است با:

$$a_{436} = 2(436) - 1 = 871$$

برای محاسبه مجموع بیست جمله اول دسته سی ام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(871) + 19(2)] = 17800$$

۳۶- گزینه ۴: قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر

ک.م.م قدرنسبت دنباله‌هاست. جمله اول این دنباله هم اولین جمله

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \Rightarrow d_1 = 4 \\ 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow d_2 = 3 \end{cases}$$

مشترک دورقمی است:

$$\begin{cases} 11 = a_1 \\ 12 = \text{ک.م.م}(3, 4) = d \end{cases}$$

پس جمله عمومی دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1)12$$

$$\Rightarrow a_n = 12n - 1$$

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی مشترک باید تعداد جملات را محاسبه کنیم. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 12n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 12n \leq 100$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} \leq n \leq \frac{100}{12} = 8 \dots \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 8$$

۳۱- گزینه ۴: مجموع چهار جمله اول، ۲ واحد بیشتر از

مجموع سه جمله اول است، پس: $S_4 - S_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 2$ (\neq)

مجموع چهار جمله اول، ۵ واحد از مجموع پنج جمله اول کم‌تر است،

پس: $S_4 = S_5 - 5 \Rightarrow S_5 - S_4 = 5 \Rightarrow a_5 = 5$ ($\neq \neq$)

$$\xrightarrow{(*)}, (**)} \begin{cases} a_4 = 2 \\ a_5 = 5 \end{cases} \Rightarrow d = a_5 - a_4 = 5 - 2 = 3$$

۳۲- گزینه ۴: با توجه به رابطه مربوط به مجموع n

جمله اول دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را حساب می‌کنیم:

$$S_n = 3n^2 - n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 3(1)^2 - 1 = 2 \\ d = 2A = 2(3) = 6 \end{cases}$$

دنباله جملات با شماره زوج به صورت زیر است: $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{18}$

پس جمله اول این دنباله برابر a_2 و قدرنسبت آن برابر $(a_4 - a_2 = 2d)$

است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2d = 2(6) = 12 \\ a_2 = a_1 + d = 2 + 6 = 8 \end{cases}$$

تعداد جملات زوج کوچک‌تر از جمله بیستم برابر ۹ تا است. پس

مجموع این جملات برابر است با:

$$S_9 = \frac{9}{2} [2(8) + 8(12)] = \frac{9}{2} [2(8) + 4(12)] = 9(8 + 48) = 9(56) = 504$$

۳۳- گزینه ۴: مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و

ختم به جمله هجدهم برابر است با: $a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$

برای محاسبه این مجموع، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{18} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_6}_{S_6} + \underbrace{a_7 + a_8 + \dots + a_{18}}_{\text{خواسته مسئله}}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6$$

چون $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ پس داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 - (-9) = 18$$

۳۴- گزینه ۴: برای این که جملات دسته بیستم را

شناسایی کنیم، اول باید بررسی کنیم تا جمله آخر دسته نوزدهم،

چندتا عدد وجود دارد!

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته نوزدهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = \frac{19(20)}{2} = 190$$

پس جمله اول دسته بیستم، جمله ۱۹۱ ام دنباله اعداد طبیعی است.

$\Rightarrow a_n = n$ دنباله اعداد طبیعی

جمله اول دسته بیستم: $a_{191} = 191$

پس در دسته بیستم، بیست تا جمله با جمله اول ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ داریم.

پس طبق فرمول $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ مجموع آن‌ها را حساب

می‌کنیم: $\frac{20}{2} [2(191) + (19)(1)] =$ مجموع جملات دسته بیستم

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ است، اول باید تعداد جملات را حساب کنیم، برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 4n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 4n \leq 100 \Rightarrow \frac{11}{4} \leq n \leq 25$$

$$\Rightarrow 3 \leq n \leq 25$$

$$\text{تعداد جملات} = 25 - 3 + 1 = 23$$

بنابراین مجموع جملات موردنظر برابر است با:

$$S_{23} = \frac{23}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) = \frac{23}{2} (a_3 + a_{25})$$

جمله عمومی دنباله، $a_n = 4n - 1$ است، پس:

$$S_{23} = \frac{23}{2} (11 + 99) = \frac{23}{2} (110) = 23(55) = 1265$$

به طور کلی اعدادی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر p برابر t است یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن p است.

۴۰- گزینه \bullet با یک دنباله هندسی با جمله اول ۳۶ و

قدرنسبت $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ مواجهیم. پس مجموع پنج جمله اول برابر است با:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{36(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{36(1-\frac{1}{32})}{\frac{1}{2}} = \frac{36(\frac{31}{32})}{\frac{1}{2}} = 36(\frac{31}{16}) = \frac{9 \times 31}{4} = \frac{279}{4}$$

۴۱- گزینه \bullet دنباله داده شده یک دنباله هندسی با جمله

اول ۶ و قدرنسبت ۲- است. پس طبق فرمول $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = \frac{6(1-(-2)^n)}{3} = 2(1-(-2)^n)$$

می‌خواهیم مجموع برابر ۱۰۲۶ شود، بنابراین:

$$S_n = 1026 \Rightarrow 2(1-(-2)^n) = 1026$$

$$\Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

۴۲- گزینه \bullet برای محاسبه مجموع شش جمله اول به a_1 و

q احتیاج داریم. a_1 که برابر ۲ است. برای محاسبه q هم به صورت زیر عمل

$$\text{می‌کنیم: } a_1 = 2, a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 q^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{a_1=2} 2q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

چون قدرنسبت منفی است، پس $q = -\frac{1}{2}$ را قبول می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{63}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

پس این دنباله ۸ جمله دارد. در نتیجه مجموع جملات برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2} [2(11) + (7)(12)] = \frac{8}{2} [2(11 + 7(6))]$$

$$= 4[11 + 42] = 4 \times 53 = 212$$

برای محاسبه مجموع ۸ جمله، می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

$$S_8 = \frac{8}{2} [a_1 + a_8]$$

$$\xrightarrow{a_n=12n-1, a_1=11, a_8=95} S_8 = 4(11 + 95) = 4(106) = 424$$

۳۷- گزینه \bullet اعداد طبیعی مضرب ۶ به صورت زیر هستند:

$$6, 12, 18, \dots$$

دنباله این اعداد، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ است. جمله

عمومی دنباله هم برابر $a_n = 6n$ است. برای محاسبه مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶، باید تعداد جملات را حساب کنیم.

پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 6n \leq 99 \Rightarrow \frac{10}{6} \leq n \leq \frac{99}{6}$$

$$\Rightarrow 1/\dots \leq n \leq 16/\dots \Rightarrow 2 \leq n \leq 16$$

بنابراین، دنباله تا ۱۶ جمله دارد. در نتیجه با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{16} = \frac{16}{2} (a_2 + a_{16}) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2} (12 + 6(16))$$

$$\Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2} (108) = 16 \times 54 = 864$$

۳۸- گزینه \bullet اعداد طبیعی فرد بخش‌پذیر بر ۳ به

$$3, 9, 15, \dots$$

صورت مقابل است:

این دنباله، یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت

$d = 6$ است. پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

چون مجموع اعدادی که کوچکتر از ۱۰۱ هستند را باید حساب کنیم؛ پس ابتدا تعداد جملات کوچکتر از ۱۰۱ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n < 101 \Rightarrow 6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104$$

$$\Rightarrow n < \frac{104}{6} = 17/\dots \Rightarrow n = \{1, 2, \dots, 17\}$$

پس دنباله، ۱۷ جمله کوچکتر از ۱۰۱ دارد. مجموع این ۱۷ جمله

برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2} [2(3) + 16(6)] = \frac{17}{2} [2(3 + 48)]$$

$$= 17 \times 51 = 867$$

۳۹- گزینه \bullet اعداد طبیعی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر

۴ برابر ۳ است به صورت زیر هستند:

$$3, 7, 11, 15, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی: } a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 324 = 4q^4 \Rightarrow q^4 = 81$$

$$\Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow{\text{جملات مثبت هستند}} q = 3$$

پس مجموع ۵ جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow S_5 = \frac{4(1-3^5)}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = \frac{2(-242)}{-1} = 484$$

۴۷- **گزینه ۲** با توجه به این که بین ۲ و $16\sqrt{2}$ شش تا عدد قرار می‌دهیم، پس $a_1 = 2$ و $a_8 = 16\sqrt{2}$ است، در نتیجه قدرنسبت را اول می‌یابیم:

$$a_8 = a_1 q^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^7 \Rightarrow q^7 = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q^7 = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow q^7 = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \sqrt{2} \end{cases} \text{ پس مجموع هشت جمله اول برابر است با:}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

$$\xrightarrow{\text{گویای کنیم}} S_8 = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۴۸- **گزینه ۲** گفتیم نسبت مجموع n جمله دوم به مجموع n جمله اول q^n است، در نتیجه:

$$\frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = q^3 \quad (*)$$

پس باید q را داشته باشیم. با توجه به جملات دنباله، $a_1 = 2$ و $a_3 = 6$ ، پس داریم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1} = 3 \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{q < 0} q = -\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = (-\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3}$$

۴۹- **گزینه ۲** مجموع ۸ جمله اول، $\frac{5}{4}$ برابر مجموع

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \quad (*) \text{ چهار جمله اول است، پس:}$$

$$\frac{S_{8n}}{S_n} = 1+q^n \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 1+q^4$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{5}{4} = 1+q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

حالا بررسی می‌کنیم جمله هفتم چند برابر جمله اول است. برای این کار نسبت $\frac{a_7}{a_1}$ را باید حساب کنیم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۴۳- **گزینه ۲** قدرنسبت، روداشته باشیم تمام مشکون جمله ۱

$$a_1 = 4, a_3 = 9 \Rightarrow a_1 q^2 = 9 \Rightarrow 4q^2 = 9 \Rightarrow q^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow q = \pm \frac{3}{2} \xrightarrow{q > 0} q = \frac{3}{2}$$

پس مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = -8\left(\frac{-665}{64}\right) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

۴۴- **گزینه ۲** برای این که سه عدد $x^2 + 4, 2x, x^2 - 2$

سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, 4, 2 \quad (q > 0) \\ x = -2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, -4, 2 \quad * \end{cases}$$

پس جملات دنباله به صورت $8, 4, 2, \dots$ هستند که این جملات،

جملات متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$

است، پس مجموع هفت جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-\frac{1}{128}) = 16(\frac{127}{128}) = \frac{127}{8}$$

۴۵- **گزینه ۲** جمله اول دنباله با قراردادن $n=1$ در

جمله عمومی محاسبه می‌شود. برای محاسبه قدرنسبت هم، جمله دوم

را حساب می‌کنیم و بعد از تقسیم $\frac{a_2}{a_1}$ ، مقدار q را حساب می‌کنیم:

$$a_n = 2^{1-n} = \begin{cases} a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \\ a_2 = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

پس تمام بساطمون برای محاسبه مجموع شش تا جمله اول پوره!

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی $a(b)^{kn+c}$ ، برابر b^k است.

پس قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی 2^{1-n} برابر $2^{-1} = \frac{1}{2}$ است.

۴۶- **گزینه ۲** بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد درج

می‌کنیم، پس ۴، جمله اول و ۳۲۴، جمله پنجم می‌شود. پس طبق

فرمول جمله عمومی دنباله هندسی یعنی $a_n = a_1 q^{n-1}$ داریم:

۵۰- گزینه

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

پس جمله اول، ۱۶ برابر جمله پنجم است.

۵۱- گزینه

در درسنامه گفتیم وقتی تعداد جملات زوج است، نسبت مجموع جملات ردیف زوج ($S_{\text{زوج}}$) به مجموع جملات ردیف فرد ($S_{\text{فرد}}$) برابر q است. پس با توجه به این که مجموع تمام جملات ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد، داریم:

$$\begin{cases} S_{\text{زوج}} = q S_{\text{فرد}} \\ S_{\text{کل}} = 3 S_{\text{فرد}} \end{cases}$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}} \rightarrow 3 S_{\text{فرد}} = q S_{\text{فرد}} + S_{\text{فرد}}$$

$$\xrightarrow{+S_{\text{فرد}}} 3 = q + 1 \Rightarrow q = 2$$

۵۲- گزینه

مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول و ششم است: $S_5 = 3(a_6 - a_1)$ (*)
جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ و مجموع n جمله اولش به صورت $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ است. پس با توجه به تساوی (*) داریم:

$$q > 1 \rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 3(a_1 q^5 - a_1)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = -3a_1(1-q^5) \Rightarrow \frac{1}{1-q} = -3$$

$$\Rightarrow 1-q = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{4}{3}$$

۵۳- گزینه

مجموع ۸ جمله اول ۴۸ است: $S_8 = 48 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 48$ (*)
مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم، ۲۴۰ است:

$$a_4 + a_5 + \dots + a_{11} = 240 \quad (**)$$

مجموع $a_4 + a_5 + \dots + a_{11} = 8$ جمله اول a_4 و قدرنسبت q ($\frac{a_5}{a_4}$) است. پس با استفاده از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی در تساوی (***) داریم:

$$\frac{a_4(1-q^8)}{1-q} = 240 \Rightarrow \frac{a_1 q^3(1-q^8)}{1-q} = 240$$

$$\xrightarrow{(*)} q^3(48) = 240 \Rightarrow q^3 = 5 \Rightarrow q = \sqrt[3]{5}$$

تعداد اعداد طبیعی از a تا b (a و b نیز جزو اعداد هستند) برابر $b - a + 1$ است.

۵۴- گزینه

مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ است:

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1 \quad (*)$$

مجموع چهار جمله اول ۳ است:

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1+q^2)(1-q^2)}{1-q} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1(1-q^2)}{1-q} = 3 \Rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 3 \Rightarrow 1+q = 3$$

$$\Rightarrow q = 2 \xrightarrow{(*)} a_1(1+4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

بنابراین مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{5}(1-2^6)}{1-2} = \frac{\frac{1}{5}(-63)}{-1} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5} \\ q = 2 \end{cases}$$

۵۵- گزینه

جمله سوم $1/44$ واحد از جمله دوم بیشتر است:

$$a_3 = 1/44 + a_2 \Rightarrow a_3 - a_2 = 1/44$$

$$\Rightarrow a_1 q^2 - a_1 q = 1/44 \Rightarrow a_1 q(q-1) = 1/44 \quad (**)$$

جمله دوم $1/8$ واحد از جمله اول کم تر است:

$$a_2 = a_1 - 1/8 \Rightarrow a_2 - a_1 = -1/8$$

$$a_1 q - a_1 = -1/8 \Rightarrow a_1(q-1) = -1/8 \quad (***)$$

با تقسیم (***) بر (***) داریم:

$$\frac{a_1 q(q-1)}{a_1(q-1)} = \frac{1/44}{-1/8} \Rightarrow q = -\frac{144}{180} = -\frac{4}{5} = -0.8$$

$$\xrightarrow{(***)} a_1(-0.8-1) = -1/8 \Rightarrow a_1(-1.8) = -1/8$$

$$\Rightarrow a_1 = 1$$

پس مجموع ۴ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1(1-(-0.8)^4)}{1-(-0.8)}$$

$$= \frac{(1-(0.8)^4)(1+(0.8)^4)}{1/8} = \frac{(0.36)(1.64)}{1/8} = 0.328$$

می توانید چهار جمله اول را بنویسید و با هم جمع کنید.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -0.8 \end{cases} \Rightarrow \text{چهار جمله اول: } 1, -0.8, 0.64, -0.512$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 0.328$$

۵۶- گزینه

مجموع جملات سوم و ششم برابر ۱۴ است:

$$a_3 + a_6 = 14 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^2 + a_1 q^5 = 14$$

$$\Rightarrow a_1 q^2(1+q^3) = 14 \quad (*)$$

تفاضل جملات سوم و نهم برابر ۹۸ است:

$$a_9 - a_3 = 98 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^8 - a_1 q^2 = 98$$

$$\Rightarrow a_1 q^2(q^6 - 1) = 98 \quad (**)$$

با تقسیم (***) بر (*) داریم:

$$\frac{a_1 q^r (q^r - 1)}{a_1 q^r (1 + q^r)} = \frac{98}{14} \Rightarrow \frac{(q^r - 1)(q^r + 1)}{(1 + q^r)} = 7$$

$$\Rightarrow q^r - 1 = 7 \Rightarrow q^r = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\xrightarrow{(*)} a_1 (2)^r (1 + 2^r) = 14$$

$$\Rightarrow a_1 (4)(9) = 14 \Rightarrow a_1 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

a_1 و q را داریم، پس مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = \frac{\frac{7}{18}(1 - 2^4)}{1 - 2} = \frac{\frac{7}{18}(-15)}{-1} = \frac{7}{6}(\Delta) = \frac{35}{6}$$

۵۷- گزینه

(*) $a_1 q^5 = 81 \Rightarrow a_1 = 81$: جمله ششم برابر ۸۱ است.

$243 = a_1 a_2 \dots a_6$: حاصل ضرب پنج جمله اول ۲۴۳ است.

$$\Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4) = 243$$

$$\Rightarrow a_1^5 q^{1+2+3+4} = 243 \Rightarrow a_1^5 q^{10} = 243$$

$$\Rightarrow (a_1 q^2)^5 = 3^5 \Rightarrow a_1 q^2 = 3 \quad (**)$$

با تقسیم (*) بر (***) داریم:

$$\frac{a_1 q^5}{a_1 q^2} = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$\xrightarrow{(**)} a_1 (3)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع پنج جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{\frac{1}{3}(-242)}{-2} = \frac{121}{3} = 40\frac{1}{3}$$

۵۸- گزینه

عبارت $(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ مجموع ۹

جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت x است، پس:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^8 = \frac{1(1 - x^9)}{1 - x} = \frac{1 - x^9}{1 - x}$$

عبارت $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ مجموع ۹ جمله اول یک دنباله

هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-x)$ است، پس:

$$1 - x + x^2 - \dots + x^8 = \frac{1(1 - (-x)^9)}{1 - (-x)} = \frac{1 + x^9}{1 + x}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1 - x^9}{1 - x}\right) \left(\frac{1 + x^9}{1 + x}\right) = \frac{1 - x^{18}}{1 - x^2}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = \frac{1 - (\sqrt{2})^{18}}{1 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 511$$

۵۹- گزینه

صورت کسر، مجموع ۹ جمله اول یک

دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-t)$ است. مخرج کسر

هم مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و

قدرنسبت $(-t^2)$ است. پس با توجه به فرمول مجموع جملات

دنباله هندسی، عبارت را ساده می‌کنیم و حاصل را حساب می‌کنیم:

$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^8 - t^7 + 1} = \frac{1(1 - (-t)^9)}{1 - (-t)} = \frac{1 + t^9}{1 + t}$$

$$= \frac{1 + t^9}{1 + t} = \frac{(1 + t)(1 - t + t^2)}{1 + t} = 1 - t + t^2$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \text{عبارت} = 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \frac{1+17+2\sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{4 - 2 - 2\sqrt{17} + 1 + 17 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

۶۰- گزینه

صورت کسر، مجموع ۱۲ جمله اول یک

دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت t است. مخرج کسر هم

مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول یک و

قدرنسبت t^2 است. در نتیجه: $\frac{1(1 - t^{12})}{1 - t} = \frac{1 - t^{12}}{1 - t} = \frac{1 - t^4}{1 - t^2}$

$$= \frac{(1 - t)(1 + t + t^2)}{1 - t} = 1 + t + t^2$$

با قراردادن $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ حاصل را می‌یابیم:

$$\text{عبارت} = 1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{4 - 2 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۶۱- گزینه

در خانه اول ۱ دانه گندم (2^0)، در خانه

دوم تا 2^1 تا، در خانه سوم تا 2^2 تا و در خانه n ام 2^{n-1}

گندم قرار می‌گیرد. پس تعداد کل گندم‌ها تا خانه n ام به صورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow S_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$$



مجموع بالا، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و

قدرنسبت ۲ است: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$

اگر قرار باشد تعداد گندم‌ها بیشتر از ۴۱۰۰ دانه باشد باید:

$$S_n > 4100 \Rightarrow 2^n - 1 > 4100 \Rightarrow 2^n > 4101$$

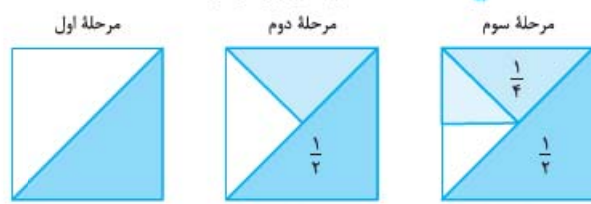
با توجه به این‌که $2^{11} = 2048$ ، $2^{12} = 4096$ و $2^{13} = 8192$

است، پس کم‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. این یعنی خانه سیزدهم

اولین خانه‌ای است که تعداد گندم‌هایش بیشتر از ۴۱۰۰ است.

۶۲- گزینه

شکل‌های زیر گویای اطلاعات مسئله هستند:



$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} \quad S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

پس مساحت قسمت رنگی تا پایان مرحله n برابر است با:(مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$)

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

قرار است بیشتر از ۹۸ درصد مربع را رنگ بزنیم:

$$S_n > \frac{98}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{98}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{98}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{50} \Rightarrow 2^n > 50 \Rightarrow n \geq 6$$

پس از ۶ مرحله، حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ می‌شود.

۶۳- گزینه

بعد از عبور از لایه اول شدت تابش نصف می‌شود (مرحله اول) پس $\frac{1}{2}$ شدت تابش از بین می‌رود و $\frac{1}{2}$ می‌ماند. بعد از عبور از لایه دوم نصفه باقی‌مانده باز هم نصف می‌شود ($\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$). یعنی $\frac{1}{4}$ شدت تابش هم در مرحله دوم نابود می‌شود! در مرحله سوم $\frac{1}{8}$ شدت تابش از بین می‌رود و ... پس کل شدت تابشی که بعد از عبور از لایه n ام (مرحله n ام) از بین می‌رود، برابر مجموع مقابل است:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

برای این که شدت تابش‌ها بیشتر از ۹۹ درصد کاهش پیدا کند باید $S_n > \frac{99}{100}$ باشد. S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است:

$$S_n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} > \frac{99}{100}$$

$$\frac{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

پس حداقل ۷ تا لایه باید ساخته شود.

روش دوم

این سوال، سال‌های ساله که تو کتابا هست. نمیبونم هم که چه اصراریه این سوال با کمک فرمول مجموع عملیات هندسی حل بشه! این طوری که خیلی بهتره:

از شدت تابش، بعد از عبور از لایه اول $\frac{1}{2}$ باقی می‌ماند.بعد از عبور از لایه دوم $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ باقی می‌ماند و ...پس بعد از عبور از لایه n ام، $\frac{1}{2^n}$ از شدت تابش باقی می‌ماند. حالا

برای این که شدت تابش بیشتر از ۹۹ درصد کاهش پیدا کند باید کم‌تر از یک درصدش باقی بماند یعنی:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100$$

$$\Rightarrow n \geq 7$$

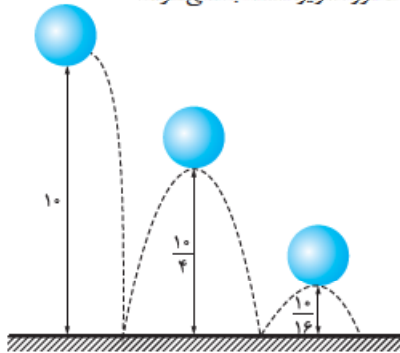
۶۴- گزینه

به شکل زیر توجه کنید. وقتی توپ از

ارتفاع ۱۰ متری رها می‌شود ۱۰ متر پایین می‌آید. بعد که به زمین

می‌خورد $\frac{1}{4}$ ارتفاع قبلی‌اش بالا می‌رود یعنی $\frac{10}{4}$. در این مرحله،توپ $\frac{10}{4}$ بالا می‌رود و $\frac{10}{4}$ پایین می‌آید. یک بار دیگر که به زمینمی‌خورد $\frac{10}{4}(\frac{1}{4})$ بالا می‌رود و $\frac{10}{4}$ پایین می‌آید و ... پس مسافت

طی شده توسط توپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$S = 10 + 2(\frac{10}{4}) + 2(\frac{10}{16}) + \dots \Rightarrow S = 10 + 2(\frac{10}{4} + \frac{10}{16} + \dots)$$

لحظه زمین خوردن توپ برای هفتمین بار یعنی پایان مرحله ششم. پس باید مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$S = 10 + 2(\frac{10}{4} + \frac{10}{16} + \dots + \frac{10}{4^5}) = 10 + 2(\frac{10}{4}(1 - (\frac{1}{4})^5))$$

مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی

با جمله اول $\frac{10}{4}$ و قدرنسبت $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S = 10 + 2(\frac{10}{4} \frac{1 - \frac{1}{4^5}}{1 - \frac{1}{4}}) = 10 + \frac{1705}{256}$$

$$= 10 + 7 = 17$$

۶۵- گزینه

$$a_n \cdot b_n = 2^n \cdot (3^{1-n}) = 2^n \times (3 \times 3^{-n})$$

$$= 2^n \times \frac{3}{3^n} = 3(\frac{2}{3})^n$$

این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول ۲ = $3(\frac{2}{3})^1$ و قدرنسبت

$$\frac{2}{3} = 3(\frac{2}{3})^1 = \frac{2}{3}$$

در نتیجه:

$$S_5 = \frac{2(1 - (\frac{2}{3})^5)}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2(1 - \frac{32}{243})}{\frac{1}{3}} = 6 \left(\frac{211}{243} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{211}{81} \right) = \frac{422}{81}$$

۶۶- گزینه **د** با توجه به جملات دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6} \\ S_2 = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{6}} \frac{1}{6} + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
 پس با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{6}$ و قدرنسبت $d = \frac{2}{3}$ مواجهیم! پس مجموع ده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left[2 \left(\frac{1}{6} \right) + 9 \left(\frac{2}{3} \right) \right] = 5 \left[\frac{1}{3} + \frac{18}{3} \right]$$

$$= 5 \left(\frac{19}{3} \right) = \frac{95}{3} = 31 \frac{2}{3}$$

دقت کنید که:

$$\frac{95}{3} = 31 \frac{2}{3}$$

۶۷- گزینه **د** جملات این دنباله را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$10^1 - 1, 10^2 - 1, 10^3 - 1, \dots$$

مجموع ده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)$$

$$= (10^1 + 10^2 + \dots + 10^{10}) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

تا ۱۰ دنباله هندسی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۰

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10(1 - 10^{10})}{1 - 10} - 10 = \frac{10(1 - 10^{10})}{-9} - 10$$

$$= \frac{10 - 10^{11} + 90}{-9} = \frac{100 - 10^{11}}{-9} = \frac{10^{11} - 100}{9}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10000000000 - 100}{9} = \frac{9999999900}{9} = 1111111100$$

۶۸- گزینه **د** دنباله داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right), 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

در نتیجه:

$$S_{10} = (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2})^2 + \dots + (1 - \frac{1}{2})^{10}$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{10} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}_{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}}$$

$$= 10(1) - \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 10 - (1 - \frac{1}{1024})$$

$$= 10 - \frac{1023}{1024} = \frac{10240 - 1023}{1024} = \frac{9217}{1024} = 9217 \left(\frac{1}{1024} \right)$$

۶۹- گزینه **د** مساحت مربع اول برابر $(12)^2 = 144$ است. از طرفی طول ضلع مربع دوم با توجه به قضیه فیثاغورس برابر است با: $\sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ پس مساحت مربع دوم برابر $(\sqrt{80})^2 = 80$ است. دنباله مساحت مربع‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۴۴ و قدرنسبت $q = \frac{80}{144} = \frac{5}{9}$ می‌دهند.

حالا باید بررسی کنیم مجموع مساحت‌های چند مربع بزرگ‌تر از ۲۹۷ می‌شود. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_n > 297 \Rightarrow \frac{144(1 - (\frac{5}{9})^n)}{1 - \frac{5}{9}} > 297$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 144(1 - (\frac{5}{9})^n)}{4} > 297$$

$$\Rightarrow 9 \times 36(1 - (\frac{5}{9})^n) > 297 \Rightarrow 36(1 - (\frac{5}{9})^n) > 33$$

$$1 - (\frac{5}{9})^n > \frac{11}{12} \Rightarrow (\frac{5}{9})^n < \frac{1}{12} \Rightarrow (\frac{9}{5})^n > 12 \Rightarrow n \geq 5$$

۷۰- گزینه **د** جمله اول، ۳ واحد از جمله دوم کم‌تر است، پس: $a_1 = a_2 - 3 \Rightarrow a_2 - a_1 = 3 \Rightarrow d = 3$

هم‌چنین با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ و اطلاعات مسئله داریم: $S_n = 10$: مجموع n جمله اول ۱۰ است.

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)3] = 10 \quad (**)$$

$$S_{2n} = 68: \text{مجموع } 2n \text{ جمله اول } 68 \text{ است.}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{2}[2a_1 + (2n-1)3] = 68 \quad (***)$$

با تقسیم دو رابطه بالا بر هم داریم:

$$\frac{68}{10} = \frac{\frac{2n}{2}[2a_1 + (2n-1)3]}{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)3]} \Rightarrow \frac{34}{5} = \frac{2[2a_1 + 6n - 3]}{[2a_1 + 3n - 3]}$$

$$68a_1 + 102n - 102 = 20a_1 + 60n - 30$$

$$\Rightarrow 48a_1 = 72 - 42n \Rightarrow 4a_1 = 12 - 7n$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7n}{4} \quad (*) \rightarrow \frac{n}{2} \left[\frac{12 - 7n}{2} + 3n - 3 \right] = 10$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \left[\frac{12 - 7n + 12n - 12}{2} \right] = 10 \Rightarrow \frac{n}{2} \left(\frac{5n}{2} \right) = 10$$

$$\Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7(4)}{4} = -2$$

۷۱- گزینه

اول کاری به اون ۲ نداشته باشیم:

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 15x^{15}$$

$$= \underline{x} + (\underline{x^2} + \underline{x^2}) + (\underline{x^3} + \underline{2x^3}) + \dots + (\underline{x^{15}} + \underline{14x^{15}})$$

$$\Rightarrow S = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15}) + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15})$$

برای محاسبه مقدار عبارت بالا، یک $15x^{16}$ اضافه و کم می‌کنیم

$$\Rightarrow S = \underbrace{(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15})}_{a_1=x, q=x} + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15})$$

$$+ 15x^{16} - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15} + 15x^{16}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(x + 2x^2 + \dots + 15x^{15}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(S) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S - x(S) = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S(1-x) = \frac{x(1-x^{15}) - 15x^{16}(1-x)}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x - x^{16} - 15x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2}$$

پس مجموع داده شده برابر است با:

$$S' = S - 2 = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} - 2$$

$$\xrightarrow{x=2} S' = 2 - 16(2)^{16} + 15(2)^{17} - 2$$

$$\Rightarrow S' = 15(2^{17}) - 16(2^{16}) = 2^{16}(15(2) - 16)$$

$$= 14(2^{16}) = 7(2^{17})$$

۷۲- گزینه

$a_{n-m} = 20$: جمله $(n-m)$ ام ۲۰ است.

$a_{n+m} = 5$: جمله $(n+m)$ ام ۵ است.

جمله وسط جمله‌های $(n-m)$ ام و $(n+m)$ ام دنباله برابر جمله n ام $(\frac{(n+m) + (n-m)}{2})$ است. در نتیجه طبق رابطه واسطه هندسی دو عدد داریم:

$$a_n^2 = a_{n+m} a_{n-m} = 5(20) \Rightarrow a_n^2 = 100 \Rightarrow a_n = \pm 10$$

حالا بین a_n و 160 باید هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، پس حتماً $a_n = 10$ است. در نتیجه:

$$10, \square, \square, \dots, \square, 160 \Rightarrow a_1 = a_1 q^1 \Rightarrow 160 = 10 q^8$$

جمله نهم تا جمله اول

$$\Rightarrow q^8 = 16 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{16} \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} q = \sqrt{2}$$

پس مجموع نه عدد برابر است با:

$$S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{10(1-\sqrt{2}^9)}{1-\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} S_9 = \frac{10(1-\sqrt{2})^9}{1-2} (1+\sqrt{2}) = 10(\sqrt{2}-1)^9(\sqrt{2}+1)$$

$$= 10(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}^8 + \sqrt{2}^7 + \dots + 1)(\sqrt{2}+1)$$

$$= 10(\sqrt{2}^8 + \sqrt{2}^7 + \dots + 1)$$

$$= 10(16 + 8\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1)$$

$$= 10(31 + 15\sqrt{2}) = 310 + 150\sqrt{2}$$

۷۳- گزینه

مجموع شش جمله اول برابر $15/75$

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 15/75$$

است، پس:

مجموع معکوس‌های آن‌ها نیز برابر $7/175$ است، پس:

$$S' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_6} = 7/175$$

باید $A = a_1 a_2 \dots a_6$ را محاسبه کنیم. از طرفی می‌دانیم:

$$a_1 a_6 = a_2 a_5 = a_3 a_4 = (*) \Rightarrow A = a_1 a_2 \dots a_6 = (a_1 a_6)^3$$

حالا از S' و S کمک می‌گیریم:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = \frac{a_1 a_6}{a_6} + \frac{a_2 a_5}{a_5} + \dots + \frac{a_3 a_4}{a_1}$$

$$(*) \frac{a_1 a_6}{a_6} + \frac{a_2 a_5}{a_5} + \dots + \frac{a_3 a_4}{a_1}$$

$$\Rightarrow S = a_1 a_6 \left(\frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_1} \right) \Rightarrow S = a_1 a_6 S'$$

$$\Rightarrow 15/75 = a_1 a_6 (7/175)$$

$$\Rightarrow a_1 a_6 = \frac{15/75}{7/175} = 2 \Rightarrow A = (a_1 a_6)^3 = (2)^3 = 8$$