تاریخ :　　　　　　　　　　　　وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　　　　　تعداد سوالات: ۲۰

موضوع　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　علیرضا فیضیان

سریال ۳۹۱۷۶۳

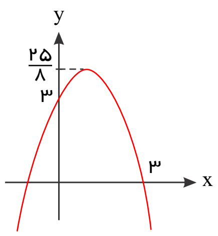
۱. اگر α و β ریشه‌های $x^{۲}-(m+۳)x+۸=۰$ باشند، مقدار m کدام باشد تا α و β و $\alpha+\beta$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟

۱) $m=۹$ یا $m=-۳$　　۲) $m=-۹$ یا $m=۳$　　۳) $m=۹$ یا $m=۳$　　۴) $m=-۹$ یا $m=-۳$

۲. اگر بین مقادیری که تابع $f(x)=x^{۲}+(۴m-۱)x+۱$ را صفر می‌کند، رابطه‌ی $x'-x''=\sqrt{x'}+\sqrt{x''}$ برقرار باشد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $\{\frac{۳}{۴}\}$　　۲) $\{-\frac{۱}{۲}\}$　　۳) $\{\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\}$　　۴) $\{۲\}$

۳. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است، a کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۹}$　　۲) $-\frac{۱}{۹}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) $-\frac{۲}{۵}$

۴. نقطهٔ A روی خط $y=۲x-۱$ طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $B(۰,-۱)$ و $C(۲,۳)$ برابر $\sqrt{۴۵}$ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$　　۲) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۵. دایره‌ای به مساحت ۹π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $۳x-۴y=۱$ و $۸y+nx=m$ مماس است. مقدار $m+۳n$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲۰　　۲) ۴۰　　۳) -۶۰　　۴) ۸۰

۶. در مثلث ABC با رئوس $A(۱,۱)$، $B(۲,-۱)$ و $C(۶,۲)$، فاصلهٔ ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) $۲٫۱$　　۲) $۲٫۴$　　۳) $۲٫۷$　　۴) ۳

۷. اگر در معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}-(m+۱)x+m=۰$, $m>۰$ و یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۱

۸. در مربع $ABCD$، مختصات رأس A به صورت $A(۳,۲)$ است و ضلع BC روی خط $y=kx+۱$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع ۵ باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۵}{۲}$

۹. مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha,۲\alpha)$ تا دو نقطهٔ مبدأ مختصات و $M(۲,۴)$، برابر $۲\sqrt{۵}$ است. دقیق‌ترین محدودهٔ α کدام است؟

۱) $\alpha\in\mathbb{R}$　　۲) $\alpha\leq۰$　　۳) $\alpha>۲$　　۴) $\alpha\in[۰,۲]$

۱۰. خطوط $y=۲$، $y=۵$ و $۳x-۴y+۱۱=۰$ منطبق بر سه ضلع یک لوزی هستند. کدام‌یک از نقاط زیر می‌تواند یکی از رئوس این لوزی باشد؟

۱) $(-۶,۲)$　　۲) $(۴,۵)$　　۳) $(۸,۲)$　　۴) $(-۱,۵)$

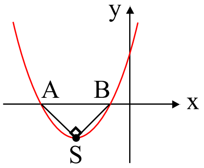
۱۱. مثلث ABC با رئوس $A(-۱,۲)$، $B(۳,۲m+۱)$ و $C(-۲,-۲)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳۴}$

۱۲. به ازای چه مقدار از a، مینیمم تابع $y=ax^۲-۴x+a$، برابر ۲ است؟

۱) $۱-\sqrt{۵}$ ۲) $۱+\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۵}-۱$

۱۳. نمودار تابع $y=۵x^۲+۱۲x+a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABS در رأس S قائمه باشد، مقدار a کدام است؟ (S رأس سهمی است.)



۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۴. اگر $x=-۱$ تنها صفر تابع $f(x)=\frac{ax^۲+۲x-۱}{۹x^۲+ax+b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x-۵=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۳+۱۴\beta$ کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۴۲ ۳) ۷۲ ۴) -۲۷

۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(۲x-۳)=۴$ باشند، کدام معادله دارای ریشه‌های $۱-\frac{۲}{\beta}$ و $۱-\frac{۲}{\alpha}$ می‌باشد؟

۱) $۲x^۲+۷x-۱=۰$ ۲) $۲x^۲+۵x-۱=۰$

۳) $۲x^۲-۷x+۱=۰$ ۴) $۲x^۲-۵x+۱=۰$

۱۷. اگر معادله‌ی $۱=\frac{x+a}{x^۲-۴}+\frac{x}{x-۲}$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -۲۰

۱۸. معادله‌ی $\sqrt{\sqrt{x+۳}-x}=۱+\sqrt{۱-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر نقطهٔ $A(۰,۶)$ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(۴,۷)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۰. به ازای چه حدودی از a تابع درجه دوم $f(x)=(a-۱)x^۲-۲\sqrt{۳}x+(a+۱)$، از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

۱) $a\geq ۲$ ۲) $۱\leq a\leq ۲$ ۳) R ۴) $a>۱$

تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	سریال ۳۹۱۷۶۳
موضوع		علیرضا فیضیان

۱.گزینه ۲ نکته‌ی ۱: اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است؛ یعنی:
$b=\frac{a+c}{۲}$

نکته‌ی ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

α، β و $\alpha+\beta$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\beta=\frac{\alpha+(\alpha+\beta)}{۲}\Rightarrow ۲\beta=۲\alpha+\beta\Rightarrow\beta=۲\alpha$$

از طرفی چون α و β ریشه‌های $x^۲-(m+۳)x+۸=۰$ هستند، داریم:

$$\begin{cases}P=\alpha\beta=۸\\ S=\alpha+\beta=m+۳\end{cases}$$

$$\alpha+\beta=m+۳\xrightarrow{\beta=۲\alpha}۳\alpha=m+۳\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{m+۳}{۳}\\ \beta=\frac{۲}{۳}(m+۳)\end{cases}\quad(*)$$

$$\alpha\beta=۸\xrightarrow{(*)}\frac{۲}{۹}(m+۳)^۲=۸\Rightarrow(m+۳)^۲=۳۶\Rightarrow m+۳=\pm۶\Rightarrow m=۳\ ya\ m=-۹$$

۲.گزینه ۲ اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ باشند، در این صورت طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x'-x'')^۲=(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^۲\Rightarrow x'^۲+x''^۲-۲x'x''=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}$$

$$\Rightarrow(S^۲-۲P)-۲P=S+۲\sqrt{P}\Rightarrow S^۲-۴P-S-۲\sqrt{P}=۰\qquad(۱)$$

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow S=۱-۴m\ ,\ P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=۱\xrightarrow{(۱)}(۱-۴m)^۲-۴-(۱-۴m)-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶m^۲-۴m-۶=۰\Rightarrow ۸m^۲-۲m-۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲},m=\frac{۳}{۴}$$

اما اگر $m=\frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $x'=x''=-۱$ که غیرقابل‌قبول‌اند پس $m=-\frac{۱}{۲}$

۳.گزینه ۳

$$f(۰)=۳\Rightarrow c=۳\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+۳$$

یکی از ریشه‌ها $x=۳$ است، پس $f(۳)=۰$ می‌باشد.

$$۹a+۳b+۳=۰\xrightarrow{+۳}۳a+b+۱=۰$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{۲۵}{۸}$ است.

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-\frac{b^۲-۴a(۳)}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-b^۲+۱۲a=\frac{۲۵}{۲}a\xrightarrow{\times۲}-۲b^۲+۲۴a=۲۵a\Rightarrow a=-۲b^۲$$

به‌جای a در معادله‌ی $۳a+b+۱=۰$ مقدار $-۲b^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$۳(-۲b^۲)+b+۱=۰\Rightarrow-۶b^۲+b+۱=۰\Rightarrow۶b^۲-b-۱=۰$$

$$b=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۲(۶)}=\frac{۱\pm۵}{۱۲}\begin{cases}\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۴}{۱۲}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

چون $a<۰$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{۲a})$ هم مثبت است پس باید $b>۰$ باشد و $b=-\frac{۱}{۳}$ قابل قبول نیست.

$$b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲b^{۲}=-۲(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{-۱}{۲}$$

۴.گزینه ۴ مختصات A را به‌صورت $(x,۲x-۱)$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{۴۵}\Rightarrow\sqrt{x^{۲}+(۲x-۱+۱)^{۲}}+\sqrt{(x-۲)^{۲}+(۲x-۱-۳)^{۲}}=\sqrt{۴۵}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۵}|x|+\sqrt{۵}|x-۲|=۳\sqrt{۵}\Rightarrow|x|+|x-۲|=۳$$

$$x\geq ۲: x+x-۲=۳\Rightarrow x=۲/۵\Rightarrow A_{۱}(۲/۵,۴)$$

$$۰<x<۲: x-x+۲=۳\Rightarrow ۲=۳\quad \text{غ ق ق}$$

$$x\leq ۰: -x-x+۲=۳\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow A_{۲}(-۰/۵,-۲)$$

$$OA_{۱}=\sqrt{۶/۲۵+۱۶}=\sqrt{۲۲/۲۵}=\frac{\sqrt{۸۹}}{۲}$$

$$OA_{۲}=\sqrt{۰/۲۵+۴}=\sqrt{۴/۲۵}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

۵.گزینه ۲ مساحت دایره برابر ۹π است، پس شعاع آن برابر $r=۳$ است.

طرفین معادلهٔ $۳x-۴y=۱$ را در -۲ ضرب می‌کنیم:

$$۸y-۶x=-۲$$

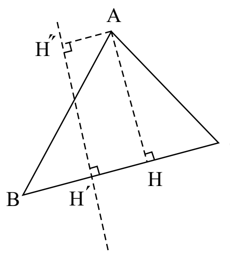
دو خط $۸y-۶x=-۲$ و $۸y+nx=m$ موازی‌اند، پس $n=-۶$. فاصلهٔ دو خط موازی باید برابر قطر دایره یعنی ۶ باشد:

$$\frac{|m+۲|}{\sqrt{۶۴+۳۶}}=۶\Rightarrow|m+۲|=۶۰\Rightarrow\begin{cases}m=۵۸\\ m=-۶۲\end{cases}$$

$$m+۳n=۵۸+(-۱۸)=۴۰$$

$$m+۳n=-۶۲+(-۱۸)=-۸۰$$

۶.گزینه ۱ طبق شکل مقابل فاصله ارتفاع رأس A تا عمود منصف BC همان فاصلهٔ نقطهٔ A تا عمود منصف BC است، پس معادلهٔ عمودمنصف BC را یافته و فاصلهٔ A را تا این خط به‌دست می‌آوریم:



$$B(۲,-۱),C(۶,۲)\rightarrow H'=\frac{B+C}{۲}\Rightarrow H'(۴,\frac{۱}{۲})$$

$$mBC=\frac{yC-yB}{xC-xB}=\frac{۲-(-۱)}{۶-۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \text{شیب عمود منصف}=-\frac{۴}{۳}$$

$$y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۴}{۳}(x-۴)\xrightarrow{\times ۶}۶y-۳=-۸x+۳۲\Rightarrow ۸x+۶y-۳۵=۰$$

$$A=(۱,۱)\Rightarrow AH''=\frac{|۸+۶-۳۵|}{\sqrt{۶۴+۳۶}}=\frac{۲۱}{۱۰}=۲/۱$$

۷.گزینه ۱ یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است، پس:

$$x_{۲}=۲x_{۱}+۳\ ,\ S=x_{۱}+x_{۲}=m+۱\Rightarrow x_{۱}+۲x_{۱}+۳=m+۱$$

$$\Rightarrow ۳(x_{۱}+۱)=m+۱\Rightarrow x_{۱}=\frac{m}{۳}-\frac{۲}{۳}\Rightarrow x_{۲}=۲(\frac{m}{۳}-\frac{۲}{۳})+۳$$

$$\Rightarrow x_۲ = \frac{۲m}{۳} + \frac{۵}{۳}\ ,\ P = x_۱ \cdot x_۲ = m \Rightarrow (\frac{m}{۳} - \frac{۲}{۳})(\frac{۲m}{۳} + \frac{۵}{۳}) = m$$

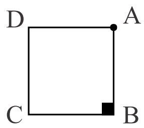
$$\Rightarrow \frac{۲m^۲}{۹} + \frac{۵m}{۹} - \frac{۴m}{۹} - \frac{۱۰}{۹} = m \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}} ۲m^۲ + m - ۱۰ = ۹m$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۸m - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} m^۲ - ۴m - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ & \text{غ ق ق } (m > ۰) \\ m = ۵ \end{cases}$$

۸.گزینه ۳ نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $AH = \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ از خط $y-kx-۱=۰$ برابر طول ضلع مربع است. از آنجا که مساحت مربع برابر ۵ است، طول ضلع مربع برابر $\sqrt{۵}$ است، پس با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:



$$\sqrt{۵} = \frac{|۲-۳k-۱|}{\sqrt{k^۲+۱}} \Rightarrow \sqrt{۵} \times \sqrt{k^۲+۱} = |-۳k+۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵(k^۲+۱) = (-۳k+۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۵k^۲ + ۵ = ۹k^۲ - ۶k + ۱ \Rightarrow ۴k^۲ - ۶k - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲k^۲ - ۳k - ۲ = ۰$$

راه حل اول: ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = (-۳)^۲ - ۴(۲)(-۲) = ۲۵ \Rightarrow k_{۱,۲} = \frac{۳ \pm \sqrt{۲۵}}{۴} \Rightarrow k_۱ = ۲ \ \text{یا}\ \ k_۲ = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $k_۱ + k_۲ = ۲ + (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$

راه حل دوم:

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه: $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$

با توجه به نکته، چون معادلهٔ حاصل دارای دو ریشه است ($\Delta > ۰$)، پس مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر $-\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}$ است.

۹.گزینه ۴ نکته: $\sqrt{u^۲} = |u|$

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_۱-x_۲)^۲ + (y_۱-y_۲)^۲}$

طبق فرض، مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha,۲\alpha)$ تا نقطهٔ $O(۰,۰)$ و $M(۲,۴)$، برابر $۲\sqrt{۵}$ است، بنابراین با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$OA + AM = \sqrt{\alpha^۲ + ۴\alpha^۲} + \sqrt{(\alpha-۲)^۲ + (۲\alpha-۴)^۲} = \sqrt{۵\alpha^۲} + \sqrt{۵(\alpha-۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۵} \times \sqrt{\alpha^۲} + \sqrt{۵} \times \sqrt{(\alpha-۲)^۲} \Rightarrow \sqrt{۵}(|\alpha| + |\alpha-۲|) = ۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow |\alpha| + |\alpha-۲| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq ۲ : ۲\alpha - ۲ = ۲ \Rightarrow \alpha = ۲ \\ ۰ \leq \alpha \leq ۲ : \alpha + ۲ - \alpha = ۲ \ \checkmark & \text{همواره برقرار} \\ \alpha \leq ۰ : -\alpha + ۲ - \alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = ۰ \end{cases}$$

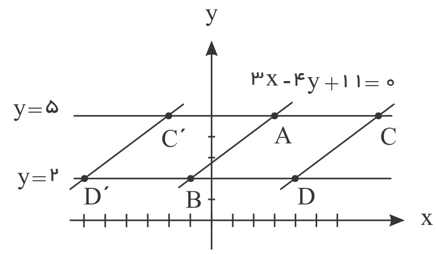
بنابراین دقیق‌ترین محدودهٔ α عبارت است از: $[۰,۲]$

۱۰.گزینه ۱ نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_۱-x_۲)^۲ + (y_۱-y_۲)^۲}$

دو خط $y=۲$ و $y=۵$ موازی هستند. محل تلاقی این دو خط با خط $۳x-۴y+۱۱=۰$ را که دو رأس لوزی هستند، پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳x - ۴y + ۱۱ = ۰ \\ y = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۲۰ + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow A(۳,۵)$$

$$\begin{cases} ۳x - ۴y + ۱۱ = ۰ \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۸ + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B(-۱,۲)$$

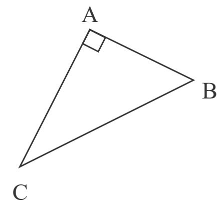


فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B طول ضلع لوزی می‌باشد، که برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

دو رأس دیگر می‌توانند سمت راست یا چپ ضلع AB باشند، اگر سمت راست باشند، با توجه به اینکه طول ضلع لوزی برابر ۵ است، مختصات آن‌ها به‌صورت $C(۳+۵,۵)$ و $D(-۱+۵,۲)$ یعنی $C(۸,۵)$ و $D(۴,۲)$ است و اگر سمت چپ باشند، مختصات آن‌ها به‌صورت $C'(۳-۵,۵)$ و $D'(-۱-۵,۲)$ یعنی $C'(-۲,۵)$ و $D'(-۶,۲)$ است. فقط نقطهٔ $(-۶,۲)$ در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۱۱.گزینه ۳ از آن‌جا که مثلث در رأس A قائمه است، داریم:



$$mAB=\frac{۲m+۱-۲}{۳-(-۱)}=\frac{۲m-۱}{۴}$$

$$mAC=\frac{-۲-۲}{-۲-(-۱)}=۴$$

$$AB\perp AC\Rightarrow mAB\times mAC=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۱}{۴}\times۴=-۱\Rightarrow۲m-۱=-۱\Rightarrow m=۰$$

معادلهٔ ضلع BC را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}B(۳,۱)\\C(-۲,-۲)\end{cases}\Rightarrow mBC=\frac{-۲-۱}{-۲-۳}=\frac{۳}{۵}$$

$$BC: y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۳)\Rightarrow ۵y-۵=۳x-۹\Rightarrow ۳x-۵y-۴=۰$$

طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC است.

$$AH=\frac{|۳(-۱)-۵(۲)-۴|}{\sqrt{۳^۲+(-۵)^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\Rightarrow AH=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\times\frac{\sqrt{۳۴}}{\sqrt{۳۴}}=\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

۱۲.گزینه ۲ طبق فرض مسئله داریم:

طول نقطه مینیمم$=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-(-۴)}{۲a}=\dfrac{۴}{۲a}=\dfrac{۲}{a}$

$$y=ax^۲-۴x+a\Rightarrow۲=a\left(\frac{۲}{a}\right)^۲-۴\left(\frac{۲}{a}\right)+a\Rightarrow۲=\frac{۴}{a}-\frac{۸}{a}+a\xrightarrow{\times a}۲a=۴-۸+a^۲\Rightarrow a^۲-۲a-۴=۰$$

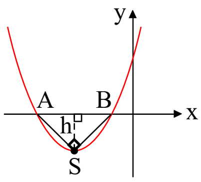
$$\Rightarrow\Delta=۴+۱۶=۲۰\to a=\frac{۲\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=۱\pm\sqrt{۵}$$

نکته: باتوجه به اینکه سهمی دارای نقطه‌ی می‌نیمم است. پس ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد. یعنی $a>۰$ است.

$a_۱=۱+\sqrt{۵}$ ق ق

$a_۲=۱-\sqrt{۵}$ غ ق ق

۱۳.گزینه ۱ نکته: در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$، مختصات رأس سهمی $S\left|\begin{matrix}-\dfrac{b}{۲a}\\-\dfrac{\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ و تفاضل ریشه‌ها برابر $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند.

چون S، رأس سهمی است، پس $SA=SB$ و در نتیجه $\overset{\Delta}{ABS}$ متساوی‌الساقین نیز می‌باشد. بنابراین ارتفاع وارد بر وتر AB، میانه هم هست. پس: $h=\dfrac{|AB|}{۲}$

$$\begin{cases}|AB| = |\text{تفاضل ریشه‌های سهمی}| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{۵} \\ h = |\text{عرض رأس سهمی}| = \left|\dfrac{-\Delta}{۲۰}\right|\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲۰}\right| = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{۵} \Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲}\right| = \sqrt{\Delta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\Delta^۲}{۴} = \Delta \Rightarrow \Delta^۲ - ۴\Delta = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{دوریشه‌ی متمایز دارد}]{\text{زیرا معادله}\ \ \Delta \neq ۰} \Delta = ۴ \Rightarrow \Delta = ۱۲^۲ - ۴(۵a) = ۱۴۴ - ۲۰a = ۴ \Rightarrow ۲۰a = ۱۴۰ \Rightarrow a = ۷$$

.۱۴ گزینه ۲ نکتهٔ ۱: صفر یک تابع یعنی عددی که به‌ازای آن مقدار تابع برابر صفر باشد.

نکتهٔ ۲: در معادلات شامل عبارت‌های گویا، جوابی که مخرج کسرهای معادله را صفر کند، قابل قبول نیست.

$$\frac{ax^۲ + ۲x - ۱}{۹x^۲ + ax + b} = ۰ \Rightarrow ax^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$x = -۱$ صفر این معادله است، پس داریم:

$$a(-۱)^۲ + ۲(-۱) - ۱ = ۰ \Rightarrow a - ۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

پس معادله به‌صورت $۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ است. اگر $x = -۱$ بخواهد تنها صفر این معادله باشد، دو حالت وجود دارد:

حالت ۱:باید $x = -۱$ ریشهٔ مضاعف $۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ باشد که چون $\Delta = ۱۶$، امکان‌پذیر نیست.

حالت ۲: ریشهٔ دیگر معادله، ریشهٔ مخرج هم باشد و در نتیجه قابل قبول نباشد:

$$۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{یا} \quad x = \frac{۱}{۳}$$

پس $x = \dfrac{۱}{۳}$ ریشهٔ مخرج است:

$$۹(\frac{۱}{۳})^۲ + ۳(\frac{۱}{۳}) + b = ۰ \Rightarrow ۱ + ۱ + b = ۰ \Rightarrow b = -۲$$

.۱۵ گزینه ۱ نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم: $S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} \quad , \quad P = \alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$

چون α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۵ = ۰$ است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۳\alpha + ۵ \Rightarrow \alpha^۳ = ۳\alpha^۲ + ۵\alpha \overset{\alpha^۲ = ۳\alpha + ۵}{=\!=\!=\!=} ۳(۳\alpha + ۵) + ۵\alpha = ۱۴\alpha + ۱۵$$

با جایگذاری این مقدار داریم:

$$\alpha^۳ + ۱۴\beta = ۱۴\alpha + ۱۵ + ۱۴\beta = ۱۴(\alpha + \beta) + ۱۵ = ۱۴S + ۱۵ = ۱۴ \times ۳ + ۱۵ = ۵۷$$

.۱۶ گزینه ۳

روش اول:

$$x(۲x - ۳) = ۴ \rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس شوند}} -۴x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}\ (-۲)\ \text{برابر شوند}} -۴x^۲ + (-۲)(-۳x) + (-۲)^۲(۲) = ۰ \rightarrow -۴x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها افزوده شود}} -۴(x - ۱)^۲ + ۶(x - ۱) + ۸ = ۰$$

$$\rightarrow -۴x^۲ + ۸x - ۴ + ۶x - ۶ + ۸ = ۰ \rightarrow -۴x^۲ + ۱۴x - ۲ = ۰ \rightarrow +۲x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$$

روش دوم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$$

$$S = ۱ - \frac{۲}{\alpha} + ۱ - \frac{۲}{\beta} = ۲ - \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = ۲ - \frac{۲(\frac{۳}{۲})}{-۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$P = (۱ - \frac{۲}{\alpha})(۱ - \frac{۲}{\beta}) = ۱ - ۲(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) + \frac{۴}{\alpha\beta} = ۱ - ۲\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}\right) + \frac{۴}{-۲} = ۱ + \frac{۳}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

$$\rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۲}x + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$$

.۱۷ گزینه ۴ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x(x+۲)+x+a}{x^۲-۴}=۱ \Rightarrow x^۲+۳x+a=x^۲-۴ \Rightarrow ۳x+a=-۴ \Rightarrow x=\frac{-۴-a}{۳}$$

برای این‌که ریشه بدست آمده قابل قبول نباشد باید مخرج کسر را صفر کند پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌اوریم:

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲ \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{-۴-a}{۳}} \begin{cases} \frac{-۴-a}{۳}=۲ \Rightarrow -۴-a=۶ \Rightarrow a=-۱۰ \\ \frac{-۴-a}{۳}=-۲ \Rightarrow -۴-a=-۶ \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

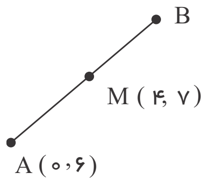
$\Rightarrow$ a حاصلضرب مقادیر ممکن برای $=-۱۰\times ۲=-۲۰$

۱۸.گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+۳}-x=۱+۱-x+۲\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۳}=۲+۲\sqrt{۱-x} \Rightarrow x+۳=۴+۴-۴x+۸\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow ۵x-۵=۸\sqrt{۱-x} \Rightarrow ۲۵(x-۱)^۲=۶۴(۱-x) \Rightarrow ۲۵(x-۱)^۲+۶۴(x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(۲۵x-۲۵+۶۴)=۰ \Rightarrow (x-۱)\cdot(۲۵x+۳۹)=۰$$
$$\rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۳۹}{۲۵} \end{cases}$$

جواب $x=-\frac{۳۹}{۲۵}$ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب $x=۱$ است.

۱۹.گزینه ۴ اگر نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ M قرینه کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است. داریم:

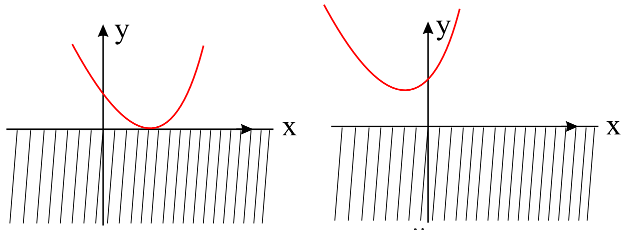


$$M\left| \begin{array}{l} xM=\frac{xA+xB}{۲} \Rightarrow xB=۲xM-xA \\ yM=\frac{yA+yB}{۲} \Rightarrow yB=۲yM-yA \end{array}\right.$$

در نتیجه مختصات نقطهٔ B به‌صورت زیر است:

$$B\left| \begin{array}{l} x=۲(۴)-۰=۸ \\ y=۲(۷)-۶=۸ \end{array}\right. \Rightarrow xB+yB=۸+۸=۱۶$$

۲۰.گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد.



توجه: برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید $\Delta \le ۰$

$\Rightarrow a-۱>۰ \rightarrow a>۱$ تابع باید مینیمم داشته باشد. $\quad (۱)$

$$\Delta \le ۰ \rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(-۲\sqrt{۳})^۲-۴(a-۱)(a+۱)\le ۰$$
$$\Rightarrow ۱۲-۴a^۲+۴\le ۰ \Rightarrow ۴a^۲\ge ۱۶ \Rightarrow a^۲\ge ۴ \Rightarrow |a|\ge ۲$$
$$\Rightarrow a\le -۲ \text{ یا } a\ge ۲ \qquad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\bigcap(۲)} a\ge ۲$$