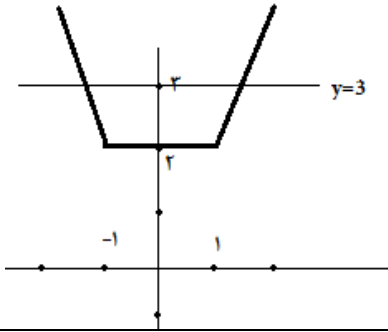


|                         |                                       |                              |
|-------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| نام و نام خانوادگی:     | به نام خالق اعداد                     | نوبت : خرداد ماه             |
| نام درس: حسابان (۱)     | اداره کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه | تاریخ امتحان: ۱۳۹۶ / ۰۱ / ۲۰ |
| رشته ی: ریاضی فیزیک     | مدیریت آموزش و پرورش سنقر و کلیایی    | ساعت شروع: ۸ صبح             |
| شماره ی دانش آموزی:     | دبیرستان : عفاف                       | مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه        |
| نام دبیر: روح ... احمدی | مهر مدیر یا آموزشگاه                  | تعداد صفحه: ۲                |

| ردیف | توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.<br>سوالات                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | نمره |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.<br>الف. مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی 3,8,13,... برابر ۱۰۱۰ است.<br>ب. فاصله ی دو خط موازی $3x+4y+1=0$ و $3x+4y+2=0$ برابر $\frac{1}{5}$ است.<br>ج. ضابطه ی وارون تابع $f(x)=x^2+2x+2$ در بازه ی $(-\infty,-1]$ ، برابر $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}-1$ است.<br>د. تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در همسایگی $x=1$ تعریف شده است.<br>جواب: الف. درست. ب. درست. ج. نادرست. د. نادرست. | ۲    |
| ۲    | جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.<br>الف. معادله ی درجه دومی که ریشه هایش $1\pm\sqrt{2}$ باشد، به صورت ..... است.<br>ب. دامنه ی تابع $f(x)=\frac{x}{ x -[x]}$ ، برابر ..... است.<br>ج. انتهای کمان $\pi-\frac{\pi}{6}$ در ربع ..... دایره ی مثلثاتی است.<br>د. خط $y=10$ نمودار تابع $y=(0.01)^x$ را در نقطه ی ..... قطع می کند.<br>جواب: الف. $x^2-2x-x=0$ ب. $\Re-W$ ج. دوم د. $-\frac{1}{2}$                             | ۲    |
| ۳    | معادله ی $\frac{5}{\sqrt{x}+2}=2-\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ را حل کنید.<br>جواب:<br>$\frac{5}{\sqrt{x}+2}=2-\frac{1}{\sqrt{x}-2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}=2 \Rightarrow \frac{5\sqrt{x}-10+\sqrt{x}+2}{x-4}=2 \Rightarrow 6\sqrt{x}-8=2x-8$ $6\sqrt{x}=2x \Rightarrow 9x=x^2 \Rightarrow x^2-9x=0 \Rightarrow x=0, x=9$<br>که هر دو جواب موردنظر، در معادله صدق می کنند.                                | ۱    |
| ۴    | نمودار تابع $f(x)= x-1 + x+1 $ را رسم کنید، سپس معادله ی $ x-1 + x+1 =3$ را حل کنید.<br>جواب:<br>$x < -1 \rightarrow f(x) = -(x-1) - (x+1) = -2x$ $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = (x+1) - (x-1) = 2$ $x > 1 \rightarrow f(x) = (x-1) + (x+1) = 2x$                                                                                                                                                                         | ۱,۵  |

حال اگر  $2x = 3$ ، آنگاه  $x = \frac{3}{2}$ ، و اگر  $2x = -3$ ، آنگاه  $x = -\frac{3}{2}$ .



نمودار تابع  $f(x) = [2x - 1]$  را در بازه  $[-1, 1]$  رسم کنید.

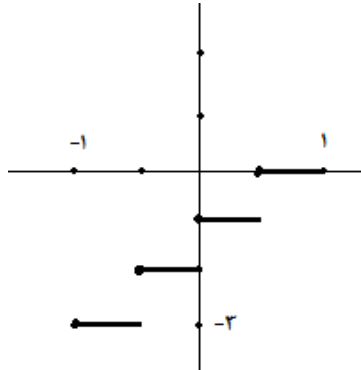
جواب. داریم

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = [2x] - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \rightarrow f(x) = [2x] - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = [2x] - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \rightarrow f(x) = [2x] - 1 = 1 - 1 = 0$$



اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  و  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$  دو تابع باشند، ضابطه و دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  را به دست آورید.

ج.  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(\sqrt{4 - x^2})^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$

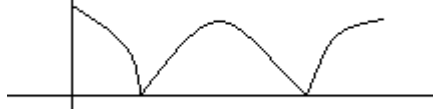
نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

ب.  $y = -3^x + 1$

الف.  $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$

جواب.

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |
| ۱    | <p>معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.</p> <p>الف. <math>\log_4 x^2 - \log_4 x - 3 = 0</math></p> <p>جواب. الف.</p> <p>ب. <math>\log x + \log(x+3) = 1</math></p> <p><math>\log_4 x^2 - \log_4 x = 3 \Rightarrow \log_4 \frac{x^2}{x} = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{x} = 4^3 = 64 \Rightarrow x^2 - 64x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 64</math></p> <p>که جواب <math>x = 0</math> قابل قبول نیست.</p> <p>ب.</p> <p><math>\log(x(x+3)) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -5</math></p> <p>که جواب <math>x = -5</math> قابل قبول نیست.</p> | ۸ |
| ۱    | <p>نسبت‌های مثلثاتی زاویه <math>300^\circ</math> درجه را محاسبه کنید.</p> <p>جواب.</p> <p><math>\sin 300^\circ = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p><math>\cos 300^\circ = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}</math></p> <p><math>\tan 300^\circ = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}</math></p> <p><math>\cot 300^\circ = \cot(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}</math></p>                                                                  | ۹ |
| ۰,۷۵ | <p>درستی معادله‌ی زیر را نشان دهید.</p> <p>جواب.</p> <p><math>\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1</math></p> <p><math>\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۷ |
| ۰,۷۵ | <p>در معادله‌ی <math>\sin x = \cos(x + 20^\circ)</math> به جای <math>x</math> یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.</p> <p>جواب.</p> <p><math>x + x + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | ۸ |
| ۱    | <p>نمودار تابع <math>y = \left  \sin(x + \frac{\pi}{2}) \right </math> را در بازه‌ی <math>[0, 2\pi]</math> رسم کنید.</p> <p>جواب. چون <math>y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x</math>، پس داریم</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | ۹ |



مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر در  $x = -1$  حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|}, & x \neq -1 \\ 3x + a, & x = -1 \end{cases}$$

جواب. برای این که تابع  $f$  در  $x = -1$  حد داشته باشد، باید حد چپ و راست آن در  $x = -1$  با هم برابر باشند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \frac{1 + (-2)}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 3x + a = -3 + a \Rightarrow -3 + a = -1 \Rightarrow a = 2$$

مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید.

ب.  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x}$

الف.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + [-x]}{x^3 + 1}$

جواب. الف.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + [-x]}{x^3 + 1} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}$

ب.  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} = \sqrt{2}$

حدود توابع زیر را تعیین کنید.

ب.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

الف.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}$

جواب. الف. با تغییر متغیر  $x - \frac{\pi}{3} = t$  داریم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6(x - \frac{\pi}{3})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}$$

ب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ۱۵ | <p>مقدار <math>a</math> و <math>b</math> را چنان تعیین کنید که تابع <math>f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} &amp; x &gt; 0 \\ b-1 &amp; x = 0 \\ x-2a &amp; x &lt; 0 \end{cases}</math> در <math>x=0</math> پیوسته باشد.</p> <p>جواب. برای این که تابع <math>f</math> در <math>x=0</math> پیوسته باشد، باید مقدار تابع و حد چپ و راست آن در <math>x=0</math> برابر باشند. پس</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-2a = -2a$ $f(0) = b-1 \Rightarrow b-1 = \frac{1}{2} = -2a \Rightarrow b = \frac{3}{2}, a = -\frac{1}{4}$ | ۱۳ |
| ۲۰ | موفق باشید. جمع نمره                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |