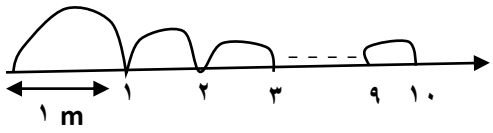
Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

حسابان

۱	توپی بر روی نیم دایره ای بالای یک محور مانند آنچه در شکل زیر نمایش داده شده است، حرکت می کند، پس از هربار برخورد توپ با زمین ۲۰ درصد از قطر دایره کاهش می یابد. پیش از ۱۰اُمین برخورد با زمین مجموع مسافت طی شده توسط توپ چقدر است؟  	۱
۲	مقدار m را چنن بیابید که چند جمله ای $P(x) = x^{۳} - mx^{۲} - x +$ ٤ بر $۱ + ۲\square$ بخش پذیر باشد.	۰/۷۵
۳	اگر β, α ریشه های معادله ی $۰ = ۱ + ۱۲\square + ۴\square^{۲}$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} +$ $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟	۰/۷۵
۴	مجموعه ی جواب نامعادله ی $\|x - ۱\| + \|x - ۲\| > x$ را بیابید.	۱
۵	به ازای چه مقدار m نمودار تابع $y = (m - ۱)x^{۲} + \sqrt{۳}x + m$، همواره در زیر محور xها است؟	۰/۷۵
۶	α را چنان بیابید که رابطه ی $f(x) = \begin{cases} ax + ۲ & x \geq ۲ \\ x^{۲} & x \leq ۲ \end{cases}$ در IR یک تابع باشد.	۰/۷۵
۷	اگر $f(x) = \sin x$، نمودار $f(۲x)$ و $-f(x)$ را در بازه ی $[-۲\square, ۲\square]$ رسم کنید.	۱
۸	اگر $f(x)=x-a$ و $g(x) = ax^{۲} + bx + c$، ضرایب c,b,a را طوری محاسبه کنید که: $fog(x) = x^{۲} + ۵\square - ۶$	۰/۷۵

Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

۹	مقدار b,a را به گونه ای بیابید که تابع $f(x) = (۲\square + b - ۵)\sin x + b\cos x + (a - b - ۱)x^۳$ تابعی زوج باشد.	۱/۲۵
۱۰	ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۱ & x \geq ۰ \\ \frac{۱}{x} - ۱ & x < ۰ \end{cases}$ وارون پذیر است. ضابطه ی وارون آن را به دست آورید.	۱/۵
۱۱	معادله را حل کنید. $\cos(x + \frac{\pi}{۵})\cos(x - \frac{\pi}{۵}) = \cos^۲ x - \cos^۲ ۲\square$	۱/۵
۱۲	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۵} \frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x^۲-۶\square+۵}$ ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}$ ج) $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x - ۱}{۴\square - \pi}$	۲/۲۵
۱۳	تابع $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^۲-۲\square+۱}}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۲ & x = ۱ \end{cases}$ را درنظر بگیرید. نوع پیوستگی تابع $f(x)$ را در $x_۰ = ۱$ تعیین کنید.	۰/۷۵
۱۴	مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \sqrt[۵]{۱ + \tan\alpha}$ ب) $(x^۳ - x^۲ - ۱)(x - \sqrt{x} + ۵)$	۱/۵
۱۵	از نقطه ی $A(-۲,۰)$ مماس یا مماس هایی بر منحنی تابع f با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x + ۱}$ رسم شده است. معادله ی مماس یا مماس ها را بیابید.	۱/۵
۱۶	وتر مثلث قائم الزاویه ای ۱۰cm است. اگر در موقعی که یک ضلع قائم مساوی ۸cm است همان ضلع با سرعت $۰/۲\frac{cm}{s}$ کاهش یابد، ضلع دیگر با چه سرعتی افزایش می یابد؟	۱

Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

۱۷	اگر $f(x^۲+x)=x+۵\square(۵\square-۵)$ و $f'(۲)=۱$باشد، مطلوب است محاسبه ی $g'(۰)$	۱

ریز بارم حسابان

۱- مطابق شکل پیش از ۱۰ امین برخورد با زمین، توپ ۱۰ نیم دایره را طی کرده است که قطر نیم دایره ها از دنباله ی هندسی زیر پیروی می کند:

۱ و ۰/۸ و $(۰/۸)^۲$ و ... و $(۰/۸)^۹$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ، دنباله هندسی تشکیل می دهد.

$$\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\times(۰/۸),\frac{\pi}{۲}\times(۰/۸)^۲,\dots,\frac{\pi}{۲}\times(۰/۸)^۹ \Longrightarrow a=\frac{\pi}{۲},q=۰/۸ \qquad (۰/۵)$$

$$s_{۱۰}=\frac{\pi}{۲}\times\left(\frac{۱-(۰/۸)^{۱۰}}{۱-۰/۸}\right)=\frac{۵\pi}{۲}(۱-(۰/۸)^{۱۰}) \qquad (۰/۵)$$

۲-

$$۲x+۱=۰ \rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{P\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۰} P\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳-m\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲-\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴ \rightarrow ۰=\frac{-۱}{۸}-\frac{m}{۴}+\frac{۱}{۲}+۴ \qquad (۰/۵)$$

$$\rightarrow ۰=\frac{-۱-۲m+۴+۸}{۸} \Longrightarrow -۲m+۱۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۱}{۲} \qquad (۰/۲۵)$$

۳- از معادله داریم:

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲-۳x+\frac{۱}{۴}=۰ \Longrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=s=۳\\ \alpha\beta=P=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{۲}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{\beta+\alpha+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$
$$=\frac{\sqrt{s+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

۴-

$$|x-۱|+|x-۲|>x \implies |x-۱|+|x-۲|-x>۰$$

$$\begin{cases} x\geq ۲ \implies x-۱+x-۲-x>۰ \implies x>۳ \text{ قابل قبول} \\ ۱<x>۲ \implies x-۱+۲-x-x>۰ \implies x<۱ \text{ غیرقابل قبول} \\ x<۱ \implies ۱-x+۲-x-x>۰ \implies x<۱ \text{ جواب قابل قبول} \end{cases}$$

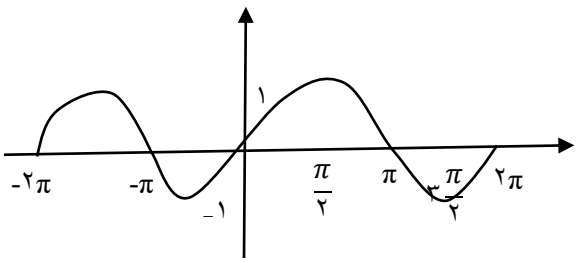
مجموعه جواب =$(-\infty,۱)\cup(۳,+\infty)$

۵- اگر $a<۰$ و $\Delta<۰$ منحنی همواره پایین محور xها قرار می گیرد (یعنی عبارت $ax^{۲}+bx+c$ همواره منفی است)

$$\left.\begin{array}{l}(m-۱)<۰ \rightarrow m<۱ \\ \Delta<۰ \implies ۳-۴m(m-۱)<۰ \implies m<\frac{-۱}{۲} \text{ یا } m>\frac{۳}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{۱\cap۲} m<\frac{-۱}{۲}$$

۶- دامنه ی مشترک دوضابطه $x=۲$ است پس باید هر دو ضابطه به ازای $x=۲$ مقدار برابر داشته باشند.

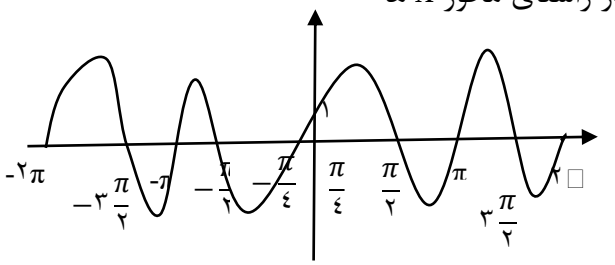
$$\left.\begin{array}{l} y=x^{۲} \overset{x=۲}{\implies} y_{۱}=۲^{۲}=۴ \\ y=ax+۲ \overset{x=۲}{\implies} y_{۲}=۲a+۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{y_{۱}=y_{۲}} ۲a+۲=۴ \implies ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$$



f(x) =sin x

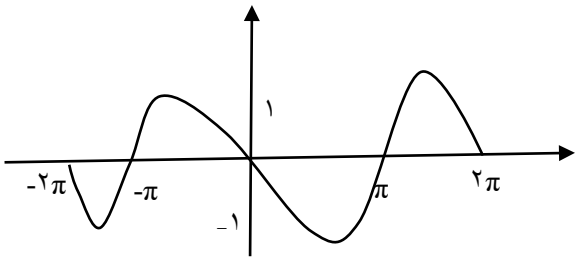
F(۲x)=sin۲x

انقباض در راستای محور x ها



Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

-۱



f(-x)

قرینه شدن نسبت به محور yها

$$f(g(x)=g(x)-a \Rightarrow ax^{۲}+bx+c-a=x^{۲}+۵\square-۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۵ \\ c-a=-۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۵ \\ c=-a \end{cases}$$

$D_f = IR$ پس دامنه ی f نسبت به مبدأ متقارن است

$$f(-x)=(۲\square+b-۵)\sin(-x)+b\cos(-x)+(a-b-۱)(-x)^{۳}$$
$$=-(۲\square+b-۵)\sin x+b\cos x-(a-b-۱)(x)^{۳}$$

برای آنکه تابع f زوج باشد f(-x)=f(x)

$$\Rightarrow -(۲\square+b-۵)\sin x+b\cos x-(a-b-۱)x^{۳}$$
$$=(۲\square+b-۵)\sin(-x)+b\cos x+(a-b-۱)x^{۳}$$
$$\Rightarrow ۲(۲\square+b-۵)\sin x+۲(a-b-۱)x^{۳}=۰$$

تساوی زمانی برقرار است که ضرایب sinx و $x^{۳}$ برابر صفر قرار می دهیم

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\square+b-۵=۰ \\ ۲(۲\square-b-۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow b=۱ \Rightarrow a=۲$$

$$f_{۱}(x)=\sqrt{x}+۱ \overset{x\geq ۰}{\Rightarrow} \sqrt{x}=y-۱ \overset{y\geq ۱}{\underset{y-۱\geq ۰}{}} (y-۱)^{۲}=x \Rightarrow f_{۱}^{-۱}(x)$$
$$=(x-۱)^{۲}\ ;x\geq ۱$$

$$f_{۲}(x)=\frac{۱}{x}-۱ \underset{x<۰}{\Rightarrow} y+۱=\frac{۱}{x} \overset{y<-۱}{\underset{y+۱<۰}{}} x=\frac{۱}{y+۱} \Rightarrow f_{۲}^{-۱}(x)$$
$$=\frac{۱}{(x+۱)}\ ;x<-۱$$

Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\geq 1\\ \dfrac{1}{x+1} & x<-1\end{cases}$$

-11

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2x\cos^2 2\square$$

$$\Rightarrow(\cos x\cos\frac{\pi}{5}-\sin x\sin\frac{\pi}{5})(\cos x\cos\frac{\pi}{5}+\sin x\sin\frac{\pi}{5})$$

$$=\cos^2x\cos^2\frac{\pi}{5}-\sin^2x\sin^2\frac{\pi}{5}$$

$$=\cos^2x.\cos^2\frac{\pi}{5}-(1-\cos^2x)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\cos^2x\cos^2\frac{\pi}{5}-1+\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos^2x-\cos^2x\cos^2\frac{\pi}{5}$$

$$=\cos^2x+\cos^2\frac{\pi}{5}-1$$

$$\xrightarrow{\text{طرف دوم=طرف اول}}\cos^2x+\cos^2\frac{\pi}{5}-1=\cos^2x-\cos^2 2\square\Rightarrow-\sin^2\frac{\pi}{5}$$

$$=\cos^2 2\square\Rightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2 2\square\Rightarrow\cos^2 2\square=\cos^2\frac{3\square}{10}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\square=2\square\square+\dfrac{3\square}{10}\\ 2\square=2\square\square+\dfrac{7\square}{10}\end{cases}$$

-12

الف)

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-6\square+5}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x^2-6\square+5)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)}{(x-5)(x-1)(2+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{16}$$

ب)

Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

ج)

$$x-\frac{\pi}{4}=t\to x=t+\frac{\pi}{4}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}{4x}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t+1}{1-\tan t}-1}{4x}=$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{2\tan t}{4(1-\tan t)t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2(1-\tan t)}\times\frac{\tan t}{t}\right)=\frac{1}{2}$$

۱۳-

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x+\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\left(x+\frac{|x-1|}{x-1}\right)\overset{x>1}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 1^+}\left(x+\frac{x-1}{x-1}\right)=2$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x+\frac{|x-1|}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(x-\frac{x-1}{x-1}\right)=0\qquad f(1)=2$$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=2$ پس تابع در $x_0=1$ پیوستگی راست دارد.

۱۴-

الف)

$$y=(1+\tan\alpha)^{\frac{1}{5}}\to \acute{y}=\frac{1}{5}(1+\tan\alpha)^{\frac{-4}{5}}\times(1+\tan^2\alpha)$$
$$=\frac{1}{5\sqrt[5]{(1+\tan\alpha)^4}}\times(1+\tan^2\alpha)$$

ب) $\acute{y}=(2x^2-2x)\left(x-\sqrt{x}+5\right)+\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^3-x^2-1)$

۱۵- اگر نقطه ی تماس $(\alpha\ ,\sqrt{\alpha+1})$ باشد معادله ی شیب را می نویسیم. $(a,b)=(-2,0)$

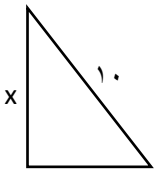
Hamkelasi.ir T.me/ihamkelasi

$$\acute{f}(\alpha)=\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۱}}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۱}}=\frac{f(\alpha)-b}{\alpha-a}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha+۱}}=\frac{\sqrt{\alpha+۱}-۰}{\alpha-(-۲)}$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha+۱)=\alpha+۲$$

α یک عدد است پس یک مماس داریم.

$$y-f(\alpha)=\acute{f}(\alpha)(x-\alpha)\Longrightarrow y-f(۰)=\acute{f}(۰)(x-۰)\Longrightarrow y-۱$$
$$=\frac{۱}{۲}(x-۰)\Longrightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۱$$

۱۶- $x^۲+y^۲=۱۰۰\Longrightarrow y=\sqrt{۱۰۰-x^۲}$



$X_۰$ طول اولیه $x=$ آهنگ تغییرات $(-۰.۲)\frac{cm}{s}\Longrightarrow x=x_۰-۰.۲t$

$$y(t)=\sqrt{۱۰۰-(x_۰-۰.۲t)^۲}=\sqrt{۱۰۰-(x_۰^۲-۰.۴t+۰.۰۴t^۲)}$$

$$\acute{y}(t)=\frac{۰.۴(x_۰-۰.۲t)}{۲\sqrt{۱۰۰-(x_۰-۰.۲t)^۲}}\xrightarrow{x=۸=x_۰-۰.۲t}\frac{۰.۴\times ۸}{۲\sqrt{۳۶}}=\frac{۰.۸}{۳}\frac{cm}{s}$$

۱۷-

$$f(x^۲+x)=x+۵t(۵t-۵)$$

از طرفین رابطه مشتق $\Longrightarrow \acute{y}=\acute{f}(x^۲+x).(۲t+۱)=۱+۵\acute{g}(۵t-۵)\times ۵$

$x=۱\longrightarrow \acute{f}(۱+۱)\times ۳=۱+۱+۵\acute{g}(۰)\rightarrow \acute{g}(۰)=\frac{۲}{۲۵}$