

حسابان ۲- دوازدهم ریاضی

فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

- ۱- بازه (۴ و ۵) یک همسایگی راست ۵ است. (.....)
- ۲- بازه (۲ و ۳) یک همسایگی چپ ۲ است. (.....)
- ۳- مجموعه  $\{۳\}$  - (۴ و ۵) یک همسایگی ۳ است. (.....)
- ۴- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  برابر  $\infty$  است. (.....)
- ۵- حد تابع  $\left[\frac{1}{x}\right]$  وقتی  $x$  به سمت  $-\infty$  میل می کند برابر ۱- است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

- ۱- حد تابع  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1}$  برابر با ..... است.
- ۲- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{1}{\sin x}$  برابر ..... است.

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

۱- حاصل تدهای زیر را بدست آورید.

- الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} =$
- ب)  $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 2} =$
- پ)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x - 5} =$
- ت)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 2x - 2} =$

۲- حاصل تدهای زیر را بدست آورید.

- الف)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x - 5} =$
- ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x - 5}{3 - x} =$
- پ)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 9}{2 - x} =$
- ت)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - 1}{|x - 2|} =$

$$c) \lim_{x \rightarrow b} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^b - cx + c}} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{b}} \frac{[x] - b}{\sqrt{x^b - cx + 1}} =$$

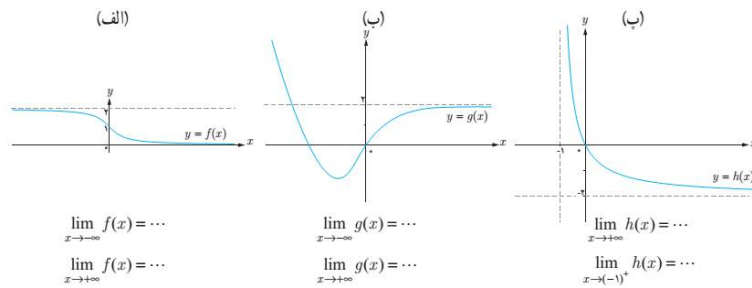
$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b + x - b}{x^b - bx^b + bx - 1} =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{[x] - b}{x - b} =$$

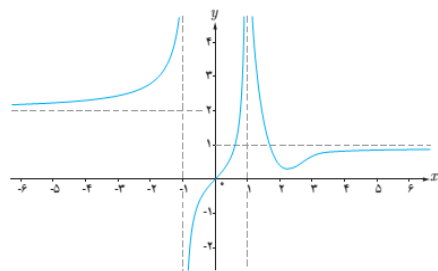
$$g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{b}^+} \frac{1}{\cos x} =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{b}^+} \tan x =$$

۱۱- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



۱۲- (الف) با توجه به نمودار، حدود خواسته شده را بنویسید.



(الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

(ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) مبنای های قائم و افقی را در شکل فوق بنویسید.

۵- حدود زیر را مناسبه کنید

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( a + \frac{1}{x^p} \right) =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p + \frac{1}{x^p}}{\frac{q}{x} - \delta} =$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px^p - qx + 1}{x^p + \delta x - p} =$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-qx^p + rx - a}{px^p - qx^p + x} =$

ث)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^\delta - qx^p - x}{x^p - \delta x + 1} =$

ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{p}x^p + rx^p - q \right) =$

۶- اگر  $p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+px^p+1}}{qx^q - x^p + \delta}$  باشد، حاصل  $a + n$  را پیدا کنید.

۷- معادله های قائم و افقی هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف)  $y = \frac{px - \delta}{x - q}$

ب)  $y = \frac{\delta x}{x^p - a}$

پ)  $y = \frac{\delta + px^p}{q - x^p}$

ت)  $y = px^p$

۸- معادلات خطوط مماس قائم و افقی تابع  $y = \frac{px - \delta}{|qx| - p}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

۹- کدامیک از خطوط  $x = -p$  و  $x = 1$  مماس های قائم  $f(x) = \frac{x^p - qx + p}{x^p + x - p}$  می باشند؟

۱۰- اگر  $x = -۱$  و  $x = ۱$  میانب های قائم  $y = \frac{x+1}{-x^۲+ax+b}$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

۱۱- اگر  $y = \frac{x^۲+mx-n}{x^۲+n}$  تنها دارای میانب قائم  $x = ۲$  باشد، مقادیر  $m$  و  $n$  را بیابید.

۱۲- وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲-x+۲}$  را در همسایگی  $x = ۲$  رسم کنید.

۱۳- اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{۲}$  و  $f(x) = \frac{ax^۲-۳x+۲}{۲x^۲+x-۳}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow ۱} f(x)$  را پیدا کنید.

۱۴- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود فواسته شده را بدست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = x^۲ - ۱, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow ۰} f(x) = \dots$$

$$\text{ب) } g(x) = \begin{cases} ۲x + ۱, & x > ۰ \\ ۳, & x < ۰ \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$

پاسخنامه فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

۱- (ص)

۲- (غ)

۳- (ص)

۴- (ص)

۵- (ص)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

۱- صفر

۲- یک

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

۱- حاصل نهادهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^p + x - p} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+p)(x-1)} = \frac{p}{p}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-p)} \frac{px^p + px^p + p}{x^p + p} = \lim_{x \rightarrow (-p)} \frac{(x+p)(px^p - x + p)}{(x+p)(x^p - px + p)} = \frac{p}{p} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{p - \sqrt{x-1}}{x - \delta} &= \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{p - \sqrt{x-1}}{x - \delta} \times \frac{p + \sqrt{x-1}}{p + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{p - (x-1)}{(x - \delta)(p + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{-(x - \delta)}{(x - \delta)(p + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{-1}{p + \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[p]{x} - p}{x^p - \gamma x - \lambda} &= \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[p]{x} - p}{x^p - \gamma x - \lambda} \times \frac{\sqrt[p]{x^p} + p\sqrt[p]{x} + p}{\sqrt[p]{x^p} + p\sqrt[p]{x} + p} = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x - p}{(x - \lambda)(\sqrt[p]{x^p} + p\sqrt[p]{x} + p)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{1}{(x - \lambda)(\sqrt[p]{x^p} + p\sqrt[p]{x} + p)} = \frac{1}{\lambda \times (p + p + p)} = \frac{1}{3\lambda} \end{aligned}$$

۲- حاصل نهادهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \delta^+} \frac{px}{x - \delta} = \frac{p \times \delta}{\delta^+ - \delta} = \frac{+p}{\delta^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{x^p + x - \delta}{p - x} = \frac{p^p + p - \delta}{p - p^+} = \frac{+\gamma}{\delta^-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{px^p - q}{p - x} = \frac{p(p)^p - q}{p - p^-} = \frac{-1}{\delta^+} = -\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow p} \frac{|x| - 1}{|x - p|} = \frac{|p| - 1}{|p - p|} = \frac{+1}{\delta^+} = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^\nu - \nu x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-\nu)^\nu}} = \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{|x-\nu|} = \frac{\nu - \sqrt{\nu-1}}{|\nu-\nu|} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{\nu x^\nu - \nu x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{(\nu x - 1)^\nu} = \frac{\left[\frac{1}{\nu}\right] - \nu}{\left(\nu \times \frac{1}{\nu} - 1\right)^\nu} = \frac{-\nu}{0^+} = -\infty$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu + x - \nu}{x^\nu - \nu x^\nu + \nu x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+\nu)(x-1)}{(x-1)(x^\nu - \nu x + 1)} = \frac{+\nu}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{[x] - \nu}{x - \nu} = \frac{[\nu^-] - \nu}{\nu^- - \nu} = \frac{\nu - \nu}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \tan x = \tan\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right) = -\infty$$

۱۲- با توجه به نمودار توابع ، حدود خواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty , \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \nu$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\nu , \lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = +\infty$$

۱۳- با توجه به نمودار ، حدود خواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu \quad \text{و} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \quad \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\text{مجاذب قائم: } x = 1, x = -1 \quad \text{مجاذب افقی: } y = 1, y = \nu$$

۱۴- حدود زیر را مناسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{y}{x^\nu}\right) = a + \frac{y}{(-\infty)^\nu} = a + 0 = a$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\nu + \frac{1}{x^\nu}}{\frac{\nu}{x} - \delta} = \frac{\nu + \frac{1}{+\infty}}{\frac{\nu}{+\infty} - \delta} = \frac{\nu + 0}{0 - \delta} = \frac{\nu}{-\delta}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\nu x^\nu - \mu x + 1}{x^\nu + \delta x - \mu} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^\nu (\nu - \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x^\nu})}{x^\nu (1 + \frac{\delta}{x} - \frac{\mu}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\infty (\nu - \frac{\mu}{-\infty} + \frac{1}{+\infty})}{\infty (1 + \frac{\delta}{-\infty} - \frac{\mu}{+\infty})} = \frac{\nu - 0 + 0}{1 - 0 + 0}$$

$$= \frac{\nu}{1} = \nu$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\zeta x^\nu + \gamma x - \alpha}{\nu x^\nu - \kappa x^\nu + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^\nu (-\zeta + \frac{\gamma}{x^\nu} - \frac{\alpha}{x^\nu})}{x^\nu (\nu - \frac{\kappa}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\infty (-\zeta + \frac{\gamma}{+\infty} - \frac{\alpha}{-\infty})}{\infty (\nu - \frac{\kappa}{-\infty} + \frac{1}{+\infty})}$$

$$= \frac{-\zeta + 0 - 0}{\nu - 0 + 0} = \frac{-\zeta}{\nu} = -\mu$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\nu x^\delta - \zeta x^\nu - x}{x^\nu - \delta x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\infty (\nu - \frac{\zeta}{x^\nu} - \frac{1}{x^\nu})}{\infty (1 - \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu (\nu - \frac{\zeta}{x^\nu} - \frac{1}{x^\nu})}{(1 - \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{\nu} x^\nu + \gamma x^\nu - \zeta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu (-\frac{1}{\nu} + \frac{\gamma}{x} - \frac{\zeta}{x^\nu}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\nu} x^\nu = -\infty$$

۶- اگر  $\mu = \nu$  باشد  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + \nu x^\nu + 1}{\mu x^\nu - x^\nu + \delta}$  حاصل  $a + n$  را پیدا کنید.

\*\*\* نکته ۱: چون حاصل عدد می باشد پس درجه صورت و مخرج یکسان است:  $n = \nu$

نکته ۲: حاصل تقسیم ضریب بالاترین درجه صورت و ضریب بالاترین درجه مخرج که هم درجه هستند برابر  $\mu$  می باشد.

$$\frac{a}{\mu} = \mu \rightarrow a = \alpha: a + n = \alpha + \nu = \mu$$

۷- میانج های قائم و افقی هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\text{الف) } y = \frac{\mu x - \delta}{x - \kappa}$$

$$\text{ب) } y = \frac{\delta x}{x^\nu - \alpha}$$

$$\text{میانج قائم: } x - \kappa = 0 \rightarrow x = \kappa$$

$$\text{میانج قائم: } x^\nu - \alpha = 0 \rightarrow x = \mu, x = -\mu$$

$$\text{میانج افقی: } y = \mu$$

$$\text{میانج افقی: } y = 0$$

$$\text{پ) } y = \frac{\delta + \mu x^\nu}{\kappa - x^\nu}$$

$$\text{ت) } y = \mu x^\mu$$

$$\text{میانج قائم: } \kappa - x^\nu = 0 \rightarrow x = \nu, x = -\nu$$

ندارد: میانج قائم

$$\text{میانج افقی: } y = -\mu$$

ندارد: میانج افقی

۸- معادلات خطوط مماس قائم و افقی تابع  $y = \frac{\nu x - \delta}{|\nu x| - \mu}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x \geq 0 \rightarrow \nu x \geq 0 \rightarrow y = \frac{\nu x - \delta}{\nu x - \mu} \rightarrow \text{مماس افقی و } x = \frac{\mu}{\nu} \text{ : مماس قائم}$$

$$x < 0 \rightarrow \nu x < 0 \rightarrow y = \frac{\nu x - \delta}{-\nu x - \mu} \rightarrow \text{مماس افقی و } x = -\frac{\mu}{\nu} \text{ : مماس قائم}$$

۹- کدامیک از خطوط  $x = 1$  و  $x = -1$  مماس های قائم  $f(x) = \frac{x^{\nu} - \mu x + \nu}{x^{\nu} + x - \mu}$  می باشند؟

$$f(x) = \frac{x^{\nu} - \mu x + \nu}{x^{\nu} + x - \mu} = \frac{(x - \mu)(x - 1)}{(x + \mu)(x - 1)} \rightarrow x = -\mu \text{ : مماس قائم است}$$

۱۰- اگر  $x = 1$  و  $x = -1$  مماس های قائم  $y = \frac{x+1}{-x^{\nu} + ax + b}$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

$$-x^{\nu} + ax + b = 0$$

$$x = -1: -1 - \nu a + b = 0 \rightarrow -\nu a + b = 1$$

$$x = 1: -1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = 1 \rightarrow \begin{cases} -\nu a + b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} : a = -1, b = \nu$$

۱۱- اگر  $y = \frac{x^{\nu} + mx - \nu}{x^{\nu} + n}$  تنها دارای مماس قائم  $x = \nu$  باشد، مقادیر  $m$  و  $n$  را بیابید.

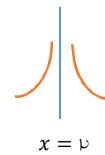
$$x = \nu \rightarrow x^{\nu} + n = 0 \rightarrow \nu^{\nu} + n = 0 \rightarrow n = -\nu^{\nu}$$

$$y = \frac{x^{\nu} + mx - \nu}{x^{\nu} + n} = \frac{x^{\nu} + mx - \nu}{x^{\nu} - \nu^{\nu}} = \frac{x^{\nu} + mx - \nu}{(x - \nu)(x + \nu)}$$

$$x = -\nu: (-\nu)^{\nu} - \nu m - \nu = 0 \rightarrow m = 1$$

۱۲- وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{\mu x}{x^{\nu} - \mu x + \nu}$  را در همسایگی  $x = \nu$  رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \nu} f(x) = \lim_{x \rightarrow \nu^{\pm}} \frac{\mu x}{x^{\nu} - \mu x + \nu} = \lim_{x \rightarrow \nu^{\pm}} \frac{\mu x}{(x - \nu)^{\nu}} = \frac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$$



۱۳- اگر  $f(x) = \frac{ax^{\nu} - \mu x + \nu}{\nu x^{\nu} + x - \mu}$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\nu}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  را پیدا کنید.

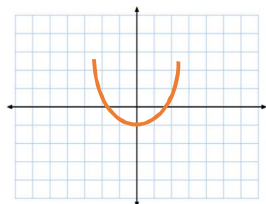
$$\frac{a}{\nu} = \frac{1}{\nu} \rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1x^{\nu} - \mu x + \nu}{\nu x^{\nu} + x - \mu} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - \nu)}{(x - 1)(\nu x + \mu)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \nu)}{(\nu x + \mu)} = \frac{-1}{\delta}$$



۱۴- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بدست آورید.

الف)  $f(x) = x^2 - 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$



ب)  $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

