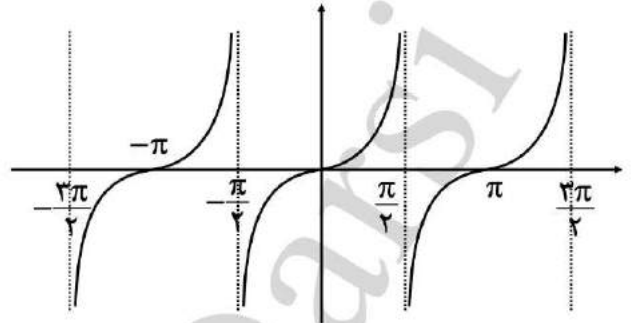
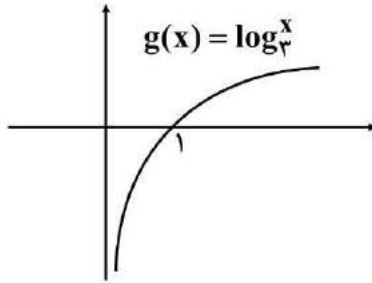
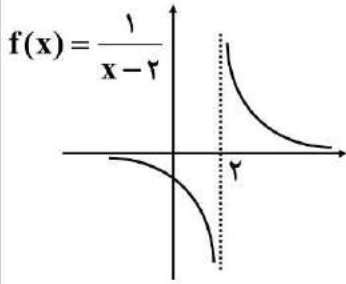




۱- نمودار توابع f و g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند، با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

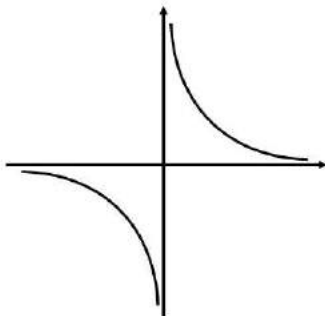
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

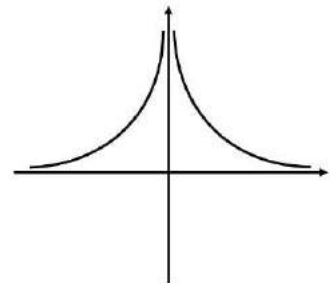
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

۲- با استفاده از نمودار توابع داده شده حدود زیر را بدست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

۳- حاصل‌حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = \frac{x-1}{\sin x} \text{ در ناصیه اول قرار می‌گیرد و } \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2}{(-2)^++2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[x]-2}{x-2} \text{ ابتدا جزء صمیح را به عدد تبدیل کن } \frac{1-2}{[2^-]-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



۴- توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.
الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1 \end{cases}$$

ب) تابع $f + g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2} + (x + 1) = \frac{1 + x^3 + x^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

پ) تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x^2} \times (x + 1) = \frac{x + 1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 1}{x^2} \right) = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

۵- حاصل حدهای زیر را بدست آورید و مشخص کنید در هر مرحله از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1 + 1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty \Rightarrow$ قضیه ۵

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x + 2}{(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{2 - (1)}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

۶- با استفاده از قضایای حد نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x^2} = +\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|5 - x|}{|2 + x|} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|5 - x|}{|2x + 4|}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)} |5 - x| = |5 - (-2)| = 7 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)} |2 + x| = 0^+ \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|5 - x|}{|2 + x|} = +\infty$$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} (1) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0^+$

$\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$



۷- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{\underbrace{(x-3)}_{0^-} (x+4)} = \frac{14}{0^-} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-(9^+)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

سوالات مربوط به مجانبات قائم

۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانبات قائم آن به چه صورتی است؟
برای یافتن مجانبات قائم می‌توانیم ریشه‌های مخرج را بدست آوریم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$



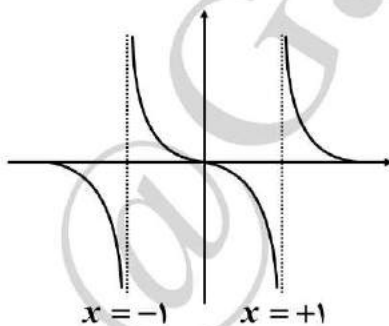
۲- مجانبات‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود بدست آورید.
ابتدا ریشه‌های مخرج را بدست می‌آوریم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 6} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ مجانبات قائم است.}$$

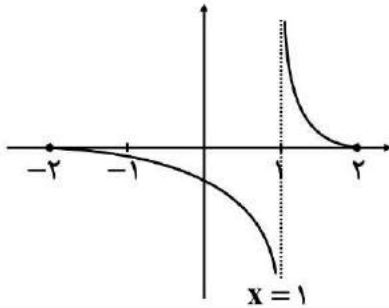
$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 6} = \frac{12}{0} = \infty \Rightarrow x = -2 \text{ مجانبات قائم است.}$$

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانبات قائم باشد.





۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه $\{-1, 2\}$ ، $[-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{2x-1}{3-x} \Rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0} = \infty$$

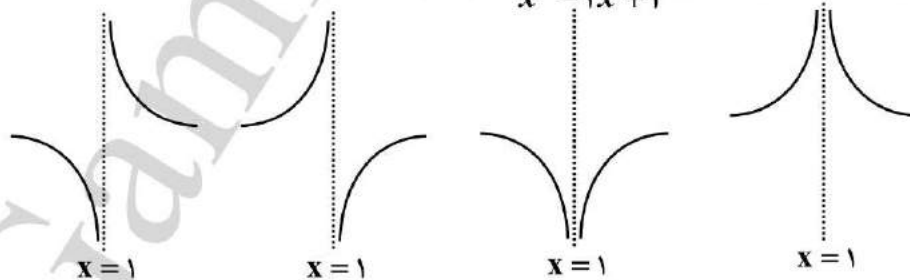
$$\text{ب) } f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} \Rightarrow x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'(x+1)}{x'(x-1)} = -1 \Rightarrow x=0 \text{ مجانب قائم نیست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x=1 \text{ مجانب قائم است.}$$

۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟

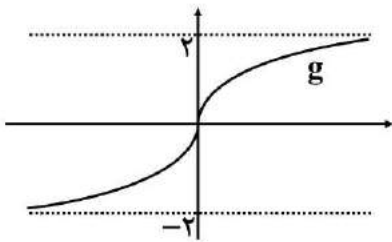


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

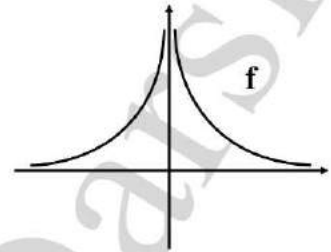


سوالات مربوط به حد در بی نهایت

۱- با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

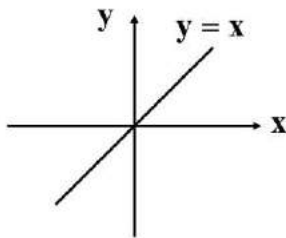
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

۲- مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.یعنی با کاهش مقدار x از هر عدد دلخواهی، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتر می شود.

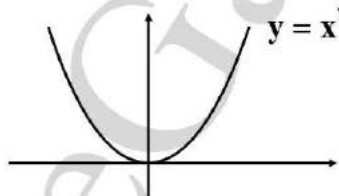
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

یعنی با کاهش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی، کوچکتر می شود.

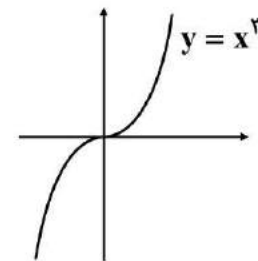
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

۳- با توجه به نمودار توابع $y = x$ ، $y = x^2$ ، $y = x^3$ حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

۴- با استفاده از قضیه ۷ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^2} \right) = 3 + 0 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4)} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

۵- الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



ب) در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حدهای قسمت قبل به چه صورتی نوشته می‌شود؟

$$m > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{a_m}$$

$$n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$$

۶- مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: هر چه مقادیر x بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$: هر چه مقادیر x کوچک و کوچکتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۷- برای تابع f که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید.

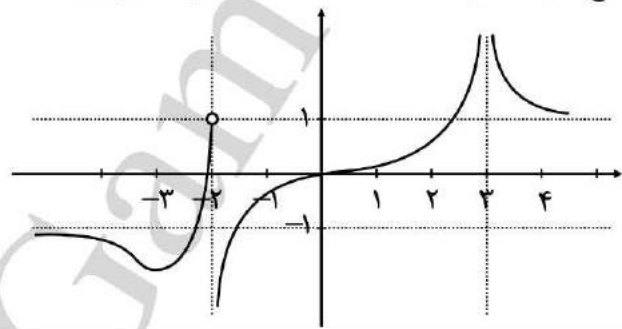
۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$

۲) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

۳) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

۴) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

۵) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$



۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2}x = \pm\infty$

۲) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 + x + 1}{6x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2}{6x^2} = -\frac{1}{2}$

۳) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

۵) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 2t^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} = 1$

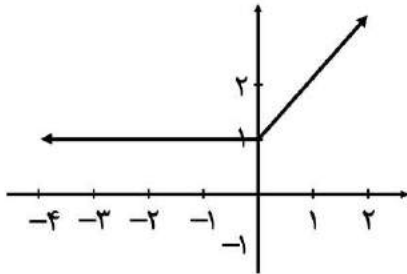
۶) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x) = \mp\infty$

۷) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = -\infty$

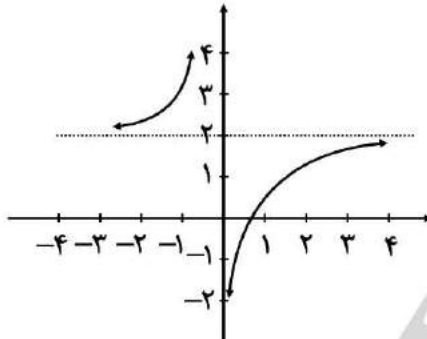
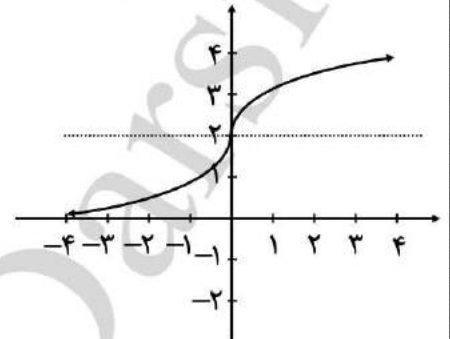


سوالات مربوط به مجانب افقی

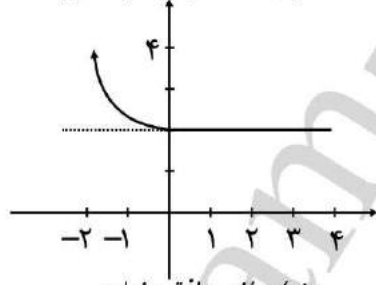
۱- کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی است؟ آن را مشخص کنید.



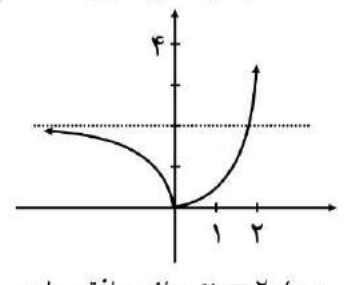
پ) مجانب افقی ندارد

ب) $y = 2$ مجانب افقی

الف) مجانب افقی ندارد



ث) مجانب افقی ندارد

ت) $y = 2$ مجانب افقی دارد

۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب) $g(x) = x^2 \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = \pm\infty$. مجانب افقی ندارد.

پ) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \pm\infty$. مجانب افقی ندارد.

۳- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=3 \\ \text{مجانب افقی } y=2 \end{cases}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=2 \rightarrow x=-2 \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=1, x=-1 \\ \text{مجانب افقی } y=-2 \end{cases}$

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد} \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

۴- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

الف) $f(-1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

