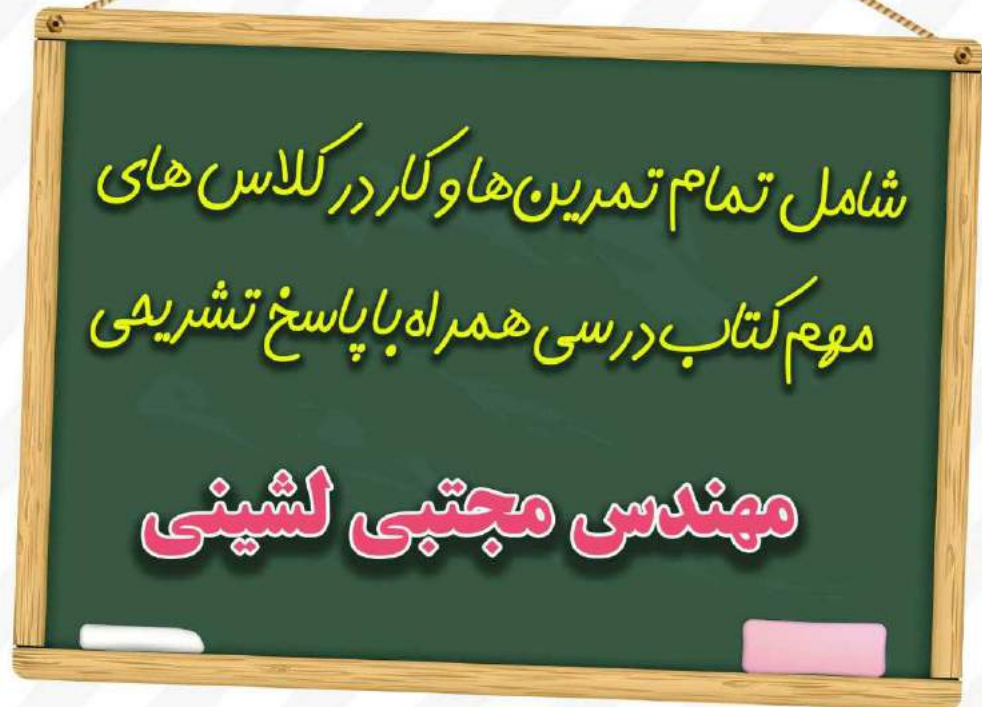




جزوه جمع بندی
ریاضی دوازدهم

ویژه شب امتحان

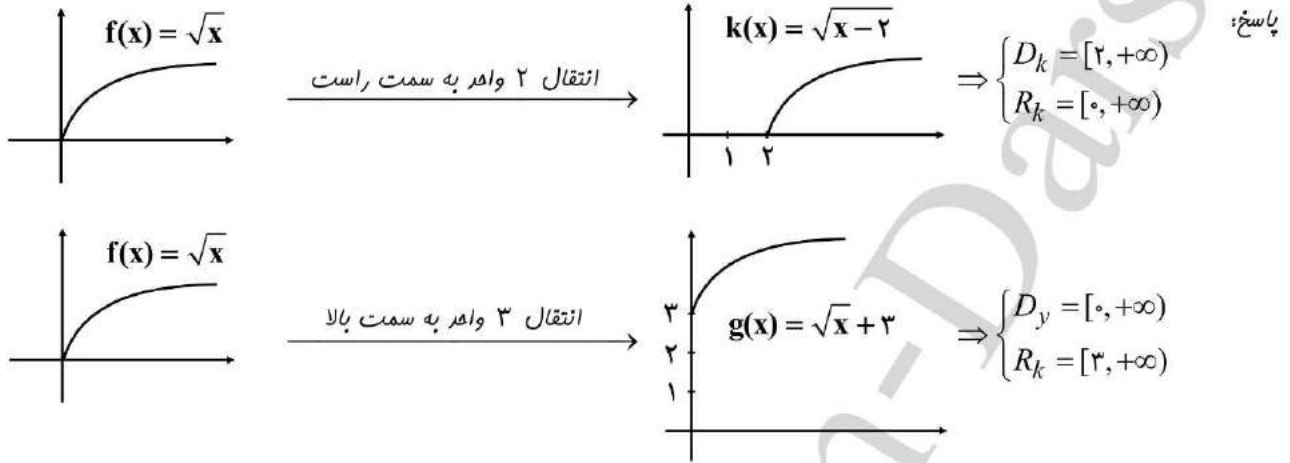


شامل تمام تمرین ها و کار در کلاس های
مهم کتاب درسی همراه با پاسخ تشریحی

مهندس مجتبی لشرینی

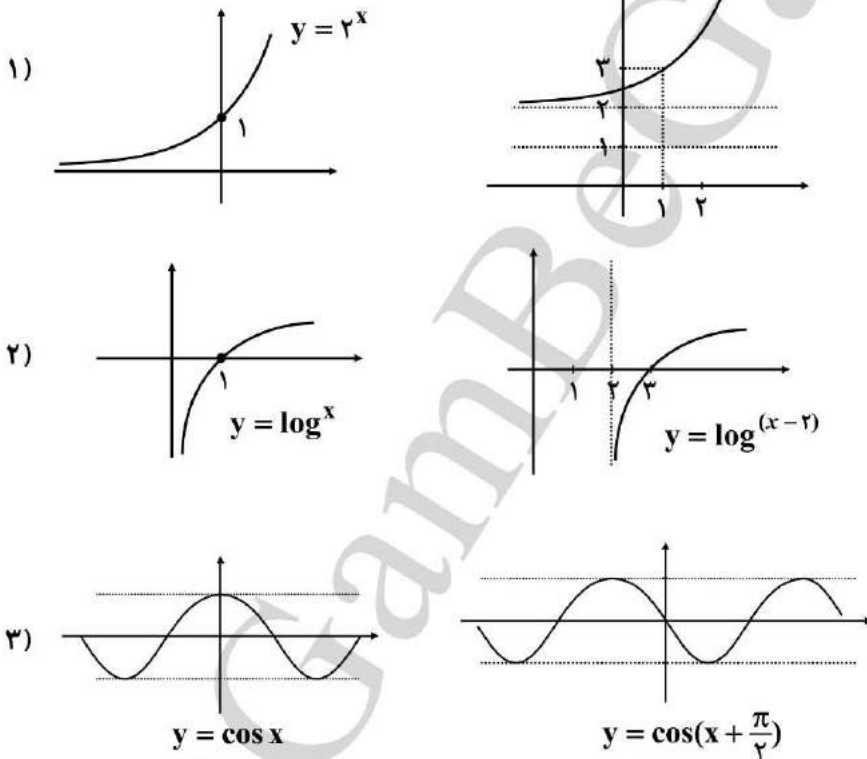


کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید. $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع $k(x) = f(x-2)$ و $g(x) = f(x)+3$ را به کمک انتقال رسم



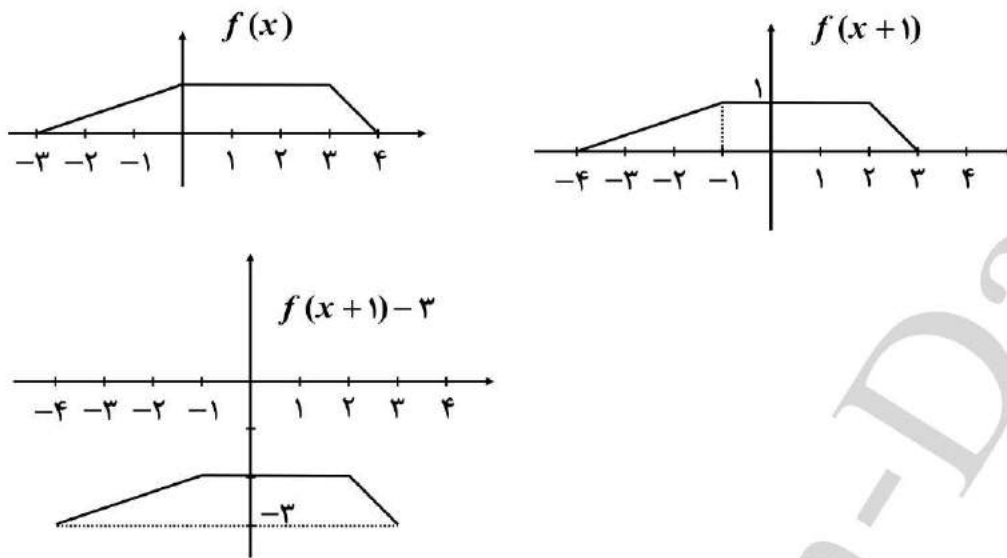
۲- به کمک نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = \log^x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = 2^{x-1} + 2$ و $y = \log^{(x-2)}$ و

$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.





f به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال عمودی و افقی، نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ را رسم کنید.



۴- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: حالت اول: $k > 0$ چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kc, kd]$$

حالت دوم: $k < 0$ چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kd, kc]$$

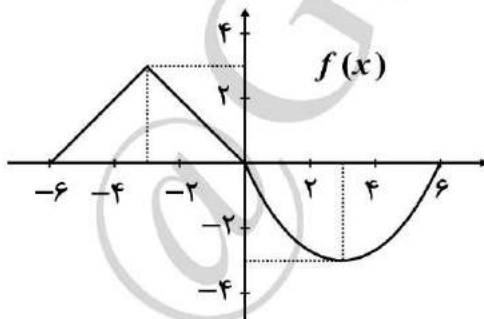
۵- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را تعیین کنید.

پاسخ: چون k فقط در x ضرب شده است پس تاثیری در برد ندارد.

$$I) k > 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right], R_f = [c, d]$$

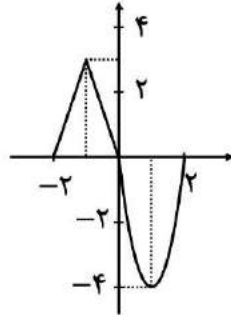
$$II) k < 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{b}{k}, \frac{a}{k}\right], R_f = [c, d]$$

۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشند، نمودار تابع $y = f(3x)$ و $y = f\left(\frac{-x}{2}\right)$ را رسم کنید.

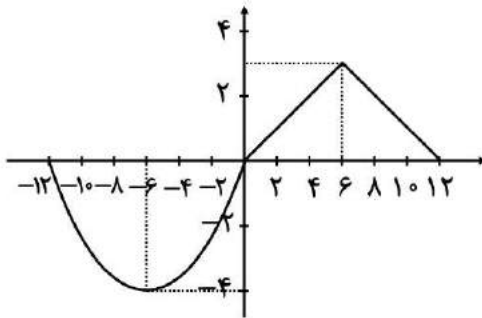




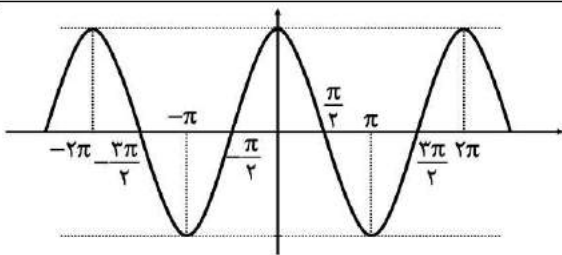
$$y = f(3x)$$



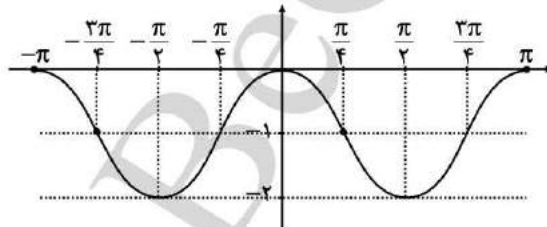
$$y = f\left(\frac{-x}{2}\right)$$



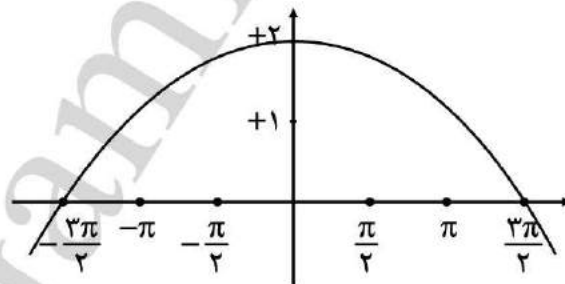
۷- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید:



$$1) y = \cos 2x - 1$$



$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

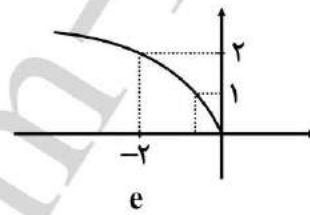
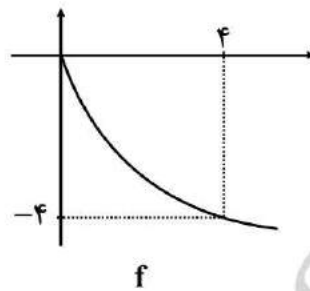
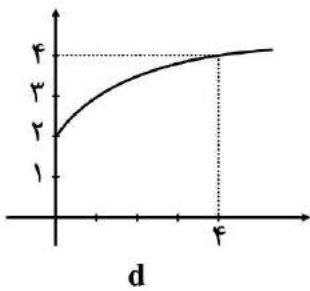
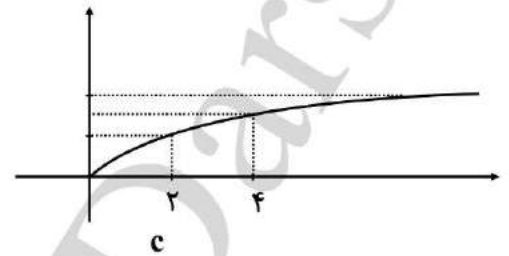
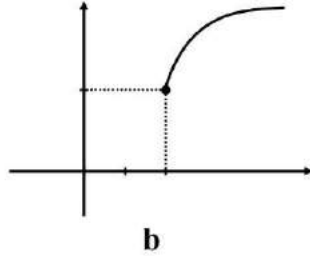
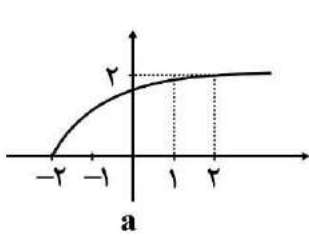




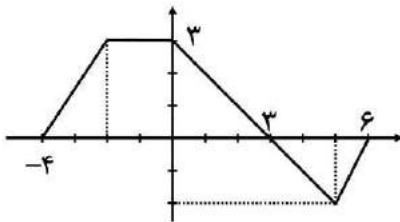
۸- هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{2+x}$ a ب) $y = 2 + \sqrt{x}$ d پ) $y = -2\sqrt{x}$ f

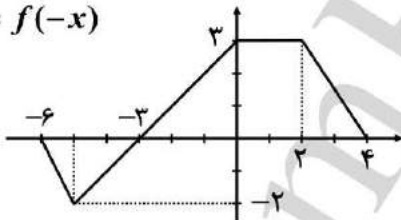
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ c ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$ b ج) $y = \sqrt{-2x}$ e



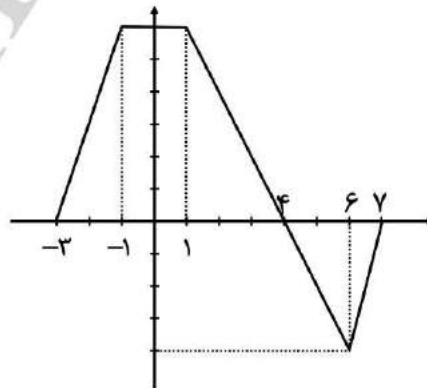
۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



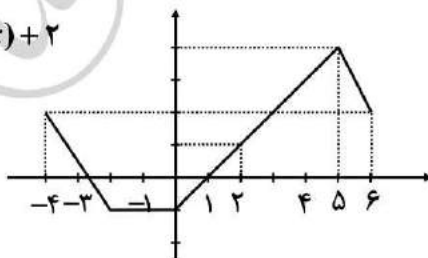
الف) $y = f(-x)$



ب) $y = 2f(x-1)$

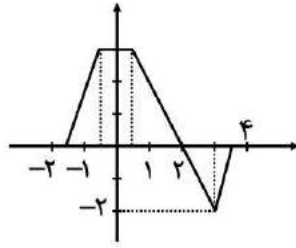


پ) $y = -f(x) + 2$

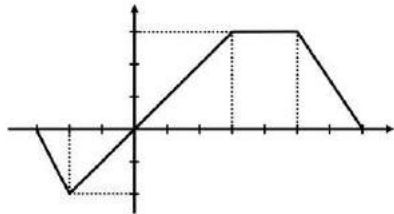




ت) $y = f(2x - 1)$



ث) $y = f(3 - x)$

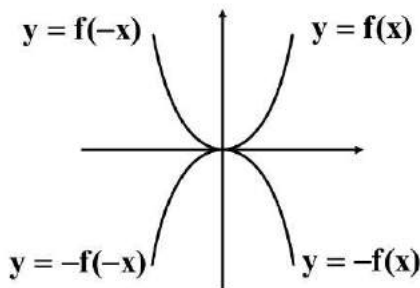


۱۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را به کمک آن رسم کنید.

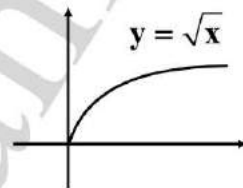
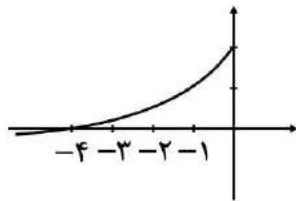
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



۱۱- نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



پاسخ: می‌دانیم نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:

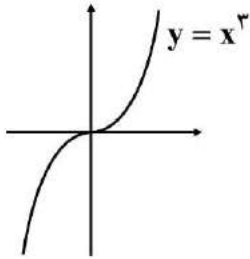
حال برای رسیدن به نمودار تابع داده شده باید نمودار تابع $g = \sqrt{x}$ را نسبت به محورهای x و y قرینه و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$$-f(-x) + 2 = -\sqrt{-x} + 2 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{-x}$$

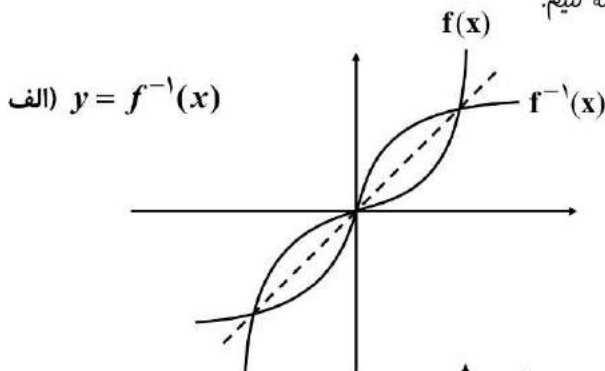


سوالات مربوط به تابع درجه سوم

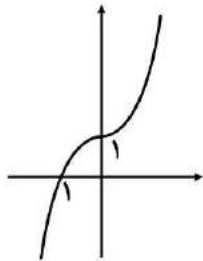
۱- به کمک نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودارهای زیر را رسم کنید:



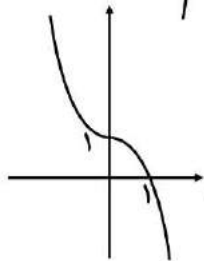
پاسخ: برای رسم تابع وارون، کافی است نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



ب) $y = (x+1)^3$



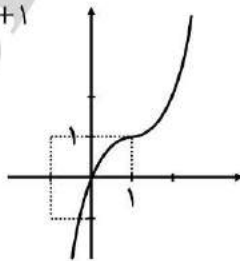
پ) $y = -x^3 + 1$



ت) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

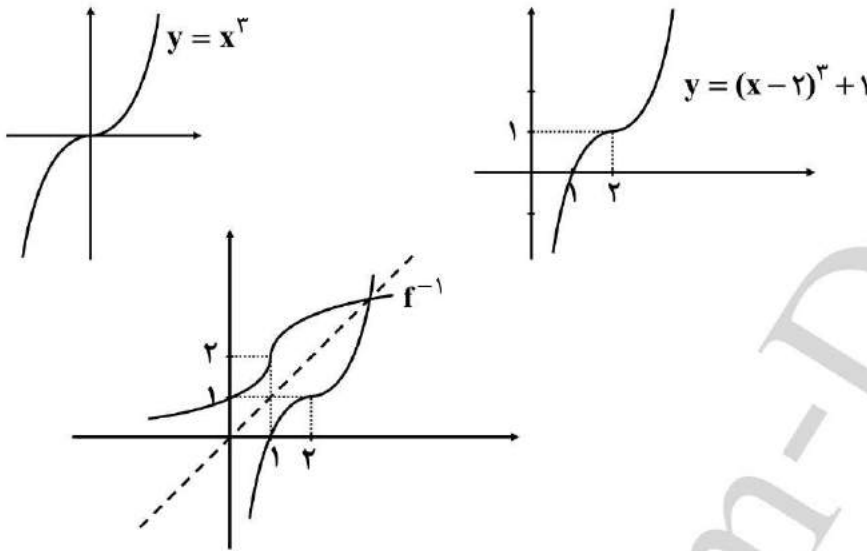
پاسخ: برای رسم این تابع می‌توانیم ابتدا عدد ۱ را اضافه و کم کنیم تا بتوانیم اتحاد مکعب تشکیل دهیم.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$$





۲- الف) نمودار تابع $y = (x-2)^3 + 1$ را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنید.
 ب) نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم و سپس ضابطه‌ی آنرا بیابید.



$$y = (x-2)^3 + 1 \rightarrow x = (y-2)^3 + 1 \rightarrow (y-2)^3 = x-1$$

$$\Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

سوالات مربوط به توابع صعودی و نزولی

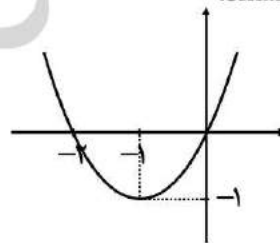
۱- نمودار توابع $y = x^2 + 2x$ و $y = 2^{-x}$ و $y = |x+2|$ را رسم کنید و مشخص کنید این توابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند.

الف) $y = x^2 + 2x$ عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم \rightarrow

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

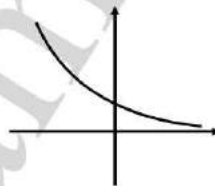
$(-\infty, -1] \rightarrow$ اکیداً نزولی

$[-1, +\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی



ب) $y = 2^{-x}$

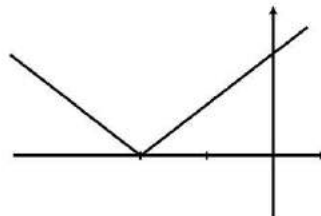
$(-\infty, +\infty) \rightarrow$ اکیداً نزولی



پ) $y = |x+2|$

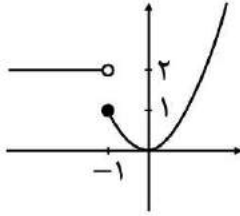
$(-\infty, -2] \rightarrow$ اکیداً نزولی

$[-2, +\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی





۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



نزولی $\rightarrow (-\infty, 0]$
صعودی $\rightarrow [0, +\infty)$

۳- فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشد. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.

پاسخ: از برهان فلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a > b$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ می‌باشد و از طرفی چون تابع اکیداً صعودی است پس این نتیجه خلاف فرض است.

۴- اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را بدست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است داریم:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

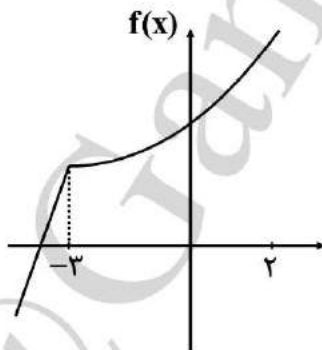
۵- فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید که $a \geq b$.

پاسخ: از برهان فلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $b > a$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ شود که این نتیجه خلاف فرض است.

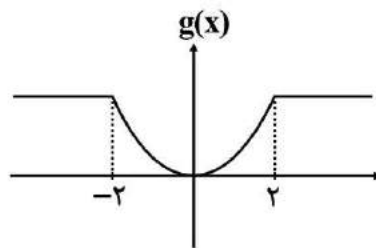
۶- اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود x را بدست آورید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow[\text{تابع نزولی است و داریم}]{\text{چون مبنای بین صفر تا یک است}} 6 \geq 3x-2 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3}$$

۷- نمودارهای توابع f و g در زیر رسم شده‌اند مشخص کنید تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی و تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



$\begin{cases} x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow \text{صعودی} \end{cases}$

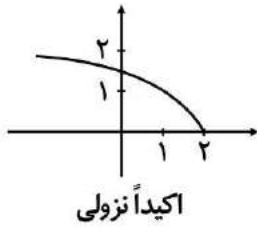


$\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \rightarrow \text{نزولی} \\ x \in [-2, 0] \rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$

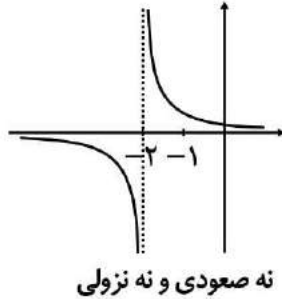


۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در دامنه خود، اکیداً یکنوا هستند؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$



ب) $g(x) = \frac{1}{x+2}$



ج) $h(x) = \log_3 x$



سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + x - 1$ بر $2x + 1$ را بدست آورید:
پاسخ: برای بدست آوردن باقی مانده کافی است ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{باقی مانده } R(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-13}{8}$$

۲- اگر چند جمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.
پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است، پس باقی مانده برابر صفر می باشد.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$R(x) = a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.
پاسخ: اگر مقسوم را برابر $f(x)$ در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow (2)^3 + k(2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow 4k = -4 \rightarrow k = -1$$

۴- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ پاسخ: چون مقسوم بر } x - 2 \text{ و } x + 1 \text{ بخش پذیر است، پس:}$$

$$f(2) = (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$4a + 2b = -9 \xrightarrow{a=b} 4b + 2b = -9 \rightarrow 6b = -9 \rightarrow b = -\frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵- چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحادها باز کنید.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$



۶- عبارت $x^5 + 1$ را بر حسب $(x+1)$ تجزیه کنید:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۷- هر یک از چندجمله‌های زیر را بر حسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید:

الف) $x^6 - 1$ بر حسب $x-1$

$$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب) $x^6 - 1$ بر حسب $x+1$

$$(x^6 - 1) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

پ) $x^5 + 32$ بر حسب $x+2$

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$