

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

درس ۱ مباحثی در ترکیبیات

مثالهایی از جایگشت n شیء - جایگشت k شیء از n شیء - ترکیب k شیء از n شیء

۱- با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» ۱, ۲, ۳, ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

۲- ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

الف) همواره دانش آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می توان آنها را به صورت یک درمیان قرار داد؟

جایگشت های با تکرار

۳- با ارقام ۱، ۱، ۲ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟

۴- تعداد n شیء مفروض است و در بین آنها k شیء تکراری است. تعداد جایگشت های برابر است با

۵- قضیه جایگشت با تکرار: تعداد n شیء مفروض است و در بین آنها n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم و

.... n_k تا از نوع k ام یکسان هستند. در این صورت تعداد کل جایگشت های این اشیا برابر است با:

.....

۶- با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۲، ۴، ۴، ۵ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

۷- ۹ نفر به چند طریق می توانند در یک اتاق ۲ نفره، یک اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

شمارش به وسیله دسته گل ها

۸- از طریق رسم یک جدول مشخص کنید به چند طریق می توان دسته گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

مریم	رز	میخک
۱	***	
۲		***
۳	***	
۴	*	**
۵	*	**
۶	**	*
۷	**	*
۸		**
۹	*	**
۱۰	*	*

۹- سه ستاره و دو پاره خط عمودی را در کنار هم به صورت افقی قرار می دهیم. در شکل زیر مشخص کنید هر حالت از انتخاب ستاره ها و پاره خط کدام حالت از انتخاب دسته گلها را نشان می دهد.

***	سه شاخه میخک
** *	دو شاخه میخک ، یک شاخه رز
* * *	یک شاخه میخک ، یک شاخه رز و یک شاخه مریم

* **	
** *	

** *	
* **	
* **	

۱۰- تعداد قرار دادن سه ستاره و دو پاره خط عمودی در یک ردیف چند تا است؟

۱۱- ۱۰ نفر به یک اغذیه فروشی می روند و هر کدام سفارش یک ساندویچ می دهند ، اگر ۴ نوع ساندویچ و از هر ساندویچ به تعداد فراوان موجود باشد ، ساندویچ ها به چند طریق به فروش می رسند؟

۱۲- اگر در مسئله خرید ساندویچ به ما بگویند از هر ساندویچ یکی به فروش رسیده ، اکنون مسئله چند جواب دارد؟

۱۳- اگر در مسئله خرید ساندویچ به ما بگویند بعضی ها سفارش خرید یک ساندویچ می دهند ، اکنون مسئله چند جواب دارد؟

۱۴- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ چه رابطه ای با مسئله ساندویچ ها دارد؟

۱۵- تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۶- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۷- تعداد جواب های صحیح و مثبت نا معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۸- به چند طریق می توان از بین k نوع گل ، n شاخه انتخاب کرد به طوریکه تکرار مجاز باشد؟

۱۹- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ را به دست آورید.

۲۰- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ دارد؟

۲۱- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i \geq 1$ دارد؟

۲۲- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i \geq 1$ دارد؟

۲۳- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_4 = 4$ و $x_5 > 2$ دارد؟

۲۴- پس از ساده کردن عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^{10}$ چند جمله دارد؟

۲۵- اگر تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^n$ برابر ۵۶ باشد در اینصورت n کدام است؟

۲۶- تعداد جوابهای به مختصات صحیح روی خط به معادله $y = -x + 6$ واقع در ربع اول چند تا است؟

۲۷- $x_1 + x_2 + x_3 = 28$ در فاصله $(4, +\infty)$ چند جواب صحیح دارد؟

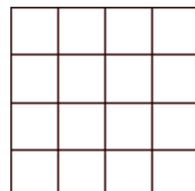
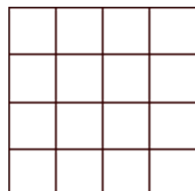
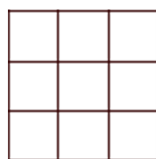
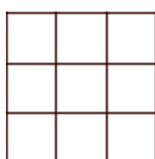
۲۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ چند جواب صحیح با شرط $1 \leq x_i \leq 7$ دارد؟

۲۹- تعداد جواب های صحیح و نا منفی دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \end{cases}$

مربع لاتین

۳۰- یک جدول مربعی $n \times n$ که از اعداد $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد نامیده می شود.

۳۱- دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 رسم کنید.



۳۲- چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳۳- شکل زیر یک مربع لاتین 6×6 است که به آن می گوئیم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می کنید؟

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۱

۳۴- شکل کلی مربع لاتین چرخشی $n \times n$ را در حالت کلی رسم کنید.



۳۵- در مربع لاتین شکل زیر تغییرات خواسته شده را اعمال نمائید.

۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴

$1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 1$
 $\Rightarrow$
 $3 \rightarrow 2$
 $4 \rightarrow 4$

نتیجه:

۳۶- برای مرتبه هر مربع یک جایگشت مشخص کنید و با اعمال جایگشت مورد نظر از هر مربع لاتین یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۱	۴	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۴	۱

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 $\Rightarrow$
 $3 \rightarrow$
 $4 \rightarrow$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 $\Rightarrow$
 $3 \rightarrow$

۱	۴	۵	۳	۲
۵	۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۵	۳
۴	۵	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴	۵

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 $3 \rightarrow$
 $\Rightarrow$
 $4 \rightarrow$
 $5 \rightarrow$

۳۷- تا کنون نشان دادیم سه نوع عملیات می توانیم روی مربع های لاتین انجام دهیم به طوری که مربع لاتین بودن آن حفظ شود. یعنی با انجام این عملیات روی هر مربع لاتین، مربع لاتین دیگری به دست می آید. این سه عملیات را نام ببرید.

مربع های لاتین متعامد

۳۸- در شکل زیر مربع ها را روی هم قرار دهید و مربعی جدید از اعداد دو رقمی بسازید. مشخص کنید مربع به وجود آمده چه ویژگی دارد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

۳۹- دو مربع لاتین هم مرتبه را متعامد را می نامیم هرگاه از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که رقم یکان به و رقم دهگان تعلق داشته باشد و در مربع به وجود آمده
۴۰- نشان دهید دو مربع زیر متعامدند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

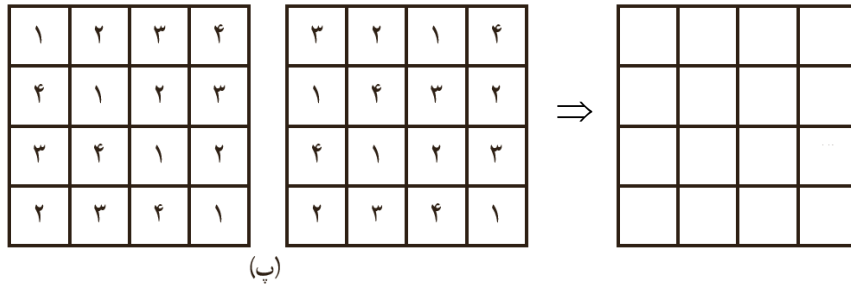
۴۱- در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

(الف)

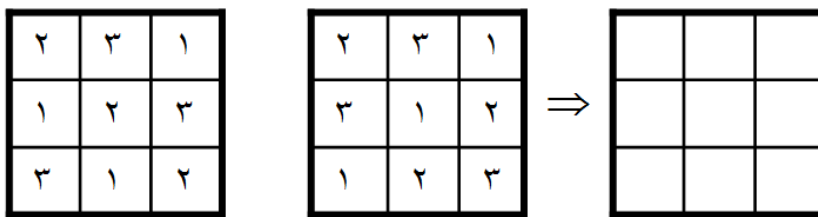
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

(ب)

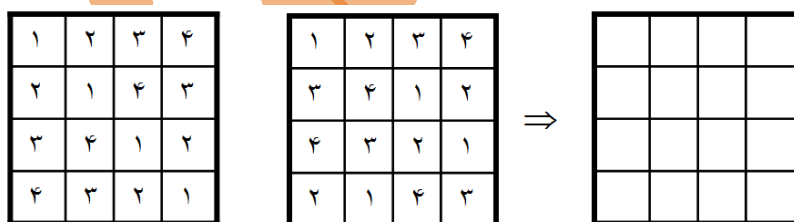


۴۲- آیا دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد؟

۴۳- آیا دو مربع لاتین 3×3 زیر متعامدند؟

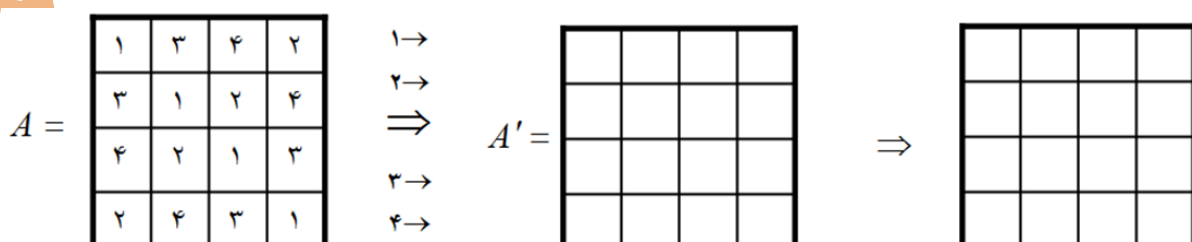


۴۴- آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟



۴۵- نکته : برای هر $n \neq 1, 2, 6$ دو مربع از مرتبه n وجود دارد و برای هر $n = 1, 2, 6$ دو مربع از مرتبه n وجود ندارد.

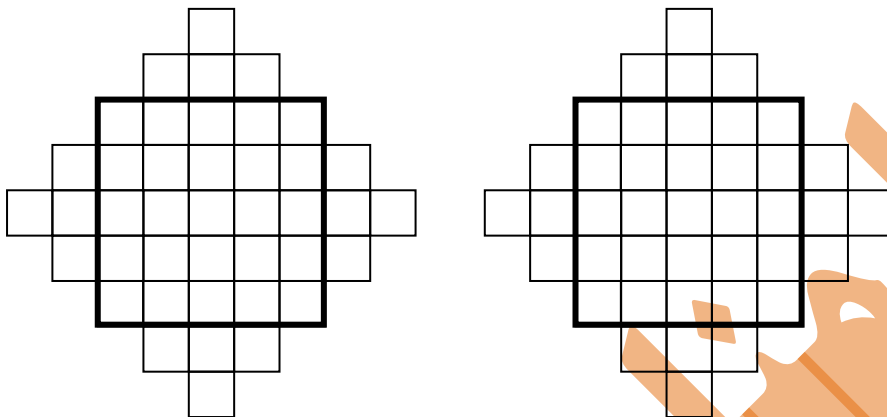
۴۶- یک مربع لاتین از مرتبه ۴ بنویسید و آن را A بنامید. با یک جایگشت دلخواه از آن دیگری مربع لاتین به دست آورید و آن را A' بنامید. متعامد بودن و را بررسی کنید.



طریقه به دست آوردن مربع های متعامد از مرتبه فرد

۴۷- در شکل زیر در مربع اول اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ و ۵ را روی قطر اصلی (از بالا به پائین) قرار دهید. همین اعداد را در خطوط موازی با قطر اصلی تکرار کنید. اعداد بیرون از مربع اصلی را در هر سطر یا ستون به دورترین خانه خالی (در همان سطر یا همان ستون) منتقل کنید.

عمل بالا را روی قطر فرعی مربع دوم (از پائین به بالا تکرار کنید. آیا دو مربع به دست آمده متعامد اند؟



۴۸- چگونه می توان طوری برنامه ریزی کرد که ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ ریزی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

۴۹- اگر سه برادر تقریباً قد و قامت برابر دارند در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟

ن صفحه ۷۲ کتاب	پاسخ گویی در منزل	پاسخ گویی در کلاس
----------------	-------------------	-------------------

۵۰- می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

۵۱- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۵۲- ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۵۳- برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

۵۴- با ارقام ۵, ۶, ۷, ۵ و ۷ چه تعداد کد شش رقمی می توان نوشت؟

۵۵- می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف a, a, b, c, c, d, d, d از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۵۶- ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

۵۷- به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۵۸- مطلوب است تعداد جواب های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط های داده شده:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$$

$$x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$$

$$x_1 > 2, x_5 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$$

$$x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

$$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

۵۹- به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۶۰- به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۶۱- آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

۶۲- مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید.

الف) سطر دوم و سوم مربع A جابه جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A_1 و A متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A_2 و A متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

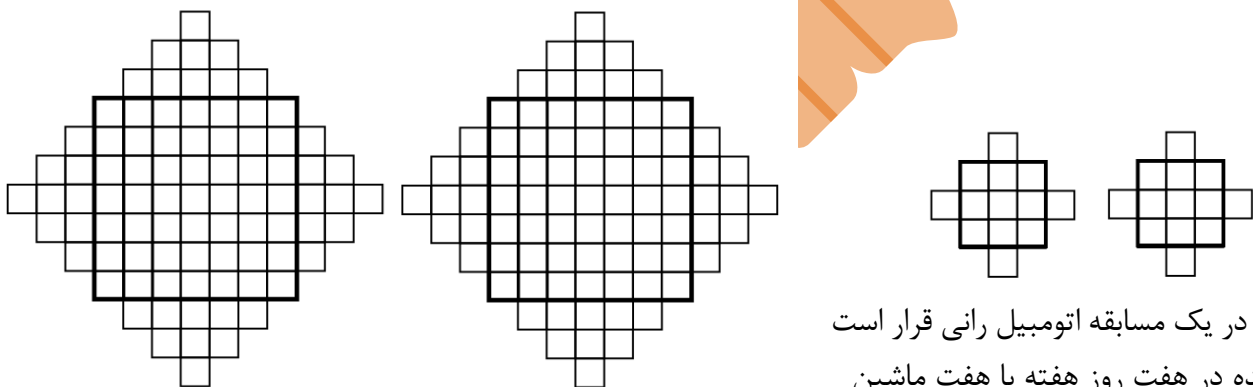
۱- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

۲-

۳- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

۶۳- قرار است شش مدرس T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 و T_6 در شش جلسه متوالی در شش کلاس C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 و C_6 به گونه تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند . برای این منظور برنامه ریزی نمایید.

۶۴- دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.



۶۵- در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین

مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

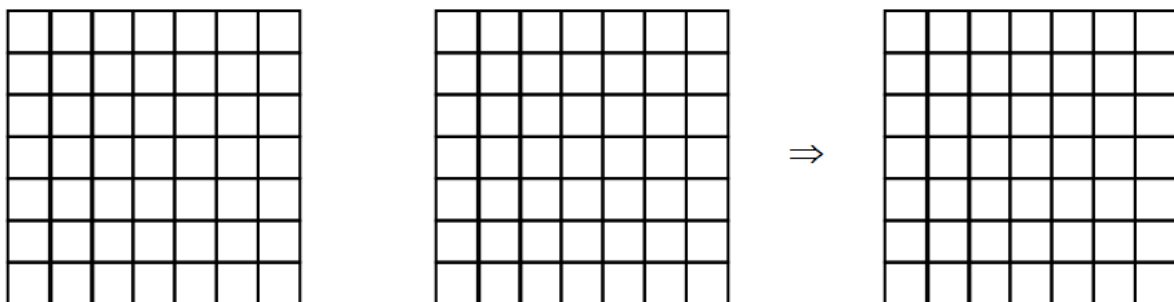
الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.



تمرین های اضافی

- ۶۶- با حروف کلمه "دارا" چند کلمه می توان نوشت .
- ۶۷- چند عدد ۷ رقمی با رقم های ۵, ۴, ۳, ۲, ۸, ۸, ۸ می توان نوشت ؟
- ۶۸- با اعداد ۵, ۵, ۵, ۴, ۳, ۳, ۳, ۳ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت ؟
- ۶۹- با ارقام ۳, ۳, ۳, ۳, ۰, ۰, ۰, ۰ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت ؟
- ۷۰- تعداد اعداد پنج رقمی شامل دو رقم ۴ و سه رقم ۵ را مشخص کنید.
- ۷۱- تعداد اعداد پنج رقمی شامل دو رقم ۴ و دو رقم ۵ و یک رقم ۶ را مشخص کنید.
- ۷۲- با استفاده از جایگشت با تکرار بسط سه جمله ای $(x+y+z)^3$ را بنویسید.
- ۷۳- ضریب جمله ی $x^{17}y^{13}$ در بسط $(x+y)^{30}$ را مشخص کنید.
- ۷۴- در بسط دو جمله ای $(x+y)^6$ مجموع ضرایب جملات درجه زوج X را به دست آورید.
- ۷۵- تعداد شماره تلفن های هفت رقمی که تنها از ارقام ۷, ۵, ۴, ۲ تشکیل شده اند را مشخص کنید.
- ۷۶- با حروف کلمه "دارا" چند کلمه می توان نوشت .
- ۷۷- تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۹۹۹ که مجموع ارقام آنها برابر ۱۴ می باشد را به دست آورید.
- ۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۷ و ۵ می توان نوشت به طوریکه از هر کدام از ارقام ۷ و ۵ حداقل یکی موجود باشد؟
- ۷۹- معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ چند جواب صحیح و غیر منفی با شرط $3 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$ را به دست آورید.
- ۸۰- معادله ی $(x_1 + x_2)^2 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب طبیعی دارد؟
- ۸۱- معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_3}$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟
- ۸۲- تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \end{cases}$$
 را به دست آورید.
- ۸۳- تعداد جوابهای صحیح و بزرگتر از ۳- معادله ی $\sum_{i=1}^4 x_i = -5$ را به دست آورید.
- ۸۴- معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 28$ در فاصله ی $(4, +\infty)$ چند جواب صحیح دارد؟
- ۸۵- به چند طریق می توان ۸ خودکار و ۷ مداد را بین ۵ دانش آموز چنان قسمت کرد که هر دانش آموز لااقل یک خودکار دریافت کند؟
- ۸۶- تعداد نقاط با مختصات صحیح که درون دایره به معادله ی $x^2 + y^2 = 16$ قرار دارند کدام است؟

۸۷- هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه متمایز قرار بگیرند به طوریکه هیچ لانه ای خالی نماند؟

۸۸- پس از ساده کردن عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^{10}$ چند جمله دارد؟

۸۹- اگر همه درآیه های قطر اصلی یک مربع لاتین 3×3 باشد، مجموع درآیه های روی قطر فرعی این مربع برابر چند است؟

۹۰- چند مربع لاتین 3×3 وجود دارد؟

۹۱- در مربع لاتین مرتبه چهار A جایگشت $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2$ و $4 \rightarrow 4$ را اعمال می کنیم تا مربع B به دست آید. آیا و متعامد هستند؟

۹۲- در مربع لاتین شکل زیر حاصل $a+b+d+e$ را به دست آورید.

۱	۲	۳
a	b	c
d	e	f

۹۳- اگر درآیه های نظیر به نظیر دو مربع لاتین متعامد 3×3 را در مربع زیر قرار داده باشیم، حاصل $a+b$ را به دست آورید.

۱۳	a	۳۱
۲۱	b	۱۲
۳۲	c	۲۳

۹۴- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، حاصل $ax+by$ را به دست آورید.

x	y	z
۱	۲	۳
۳	t	w

a	b	c
۱	۲	۳
۲	d	e

۹۵- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، حاصل $a+b+c+d$ را به دست آورید.

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

a		۴	۱
	b		۳
۱		c	
۳	۲		d

۹۶- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، مقدار x را به دست آورید.

		۲	
۴			
		x	

۲			
		۲	d

۹۷- به چند طریق می توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه هفت را انتخاب کرد به طوری که مجموع اعداد این دو خانه برابر ۱۰ باشد؟

۹۸- با اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ از مربع لاتین سمت چپ به مربع سمت راست رسیده ایم. هر دو

۱		۲	

			۳
۴			

مربع لاتین را تکمیل کنید.

۹۹- در یک مسابقه اسب دوانی ۵ اسب سوار در پنج روز از هفته و با ۵ اسب مختلف در ۵ مسیر مختلف مسابقه می دهند به طوری که شرایط زیر را داشته باشد:

۱۰۰- الف) هر اسب سوار هر روز با یک اسب در یک مسیر مسابقه دهد.

۱۰۱- ب) هر اسب سوار یا هر اسب دقیقاً یک روز اسب سواری کند.

۱۰۲- پ) هر اسب هر روز دقیقاً در یک مسیر اسب سواری کند.

۱۰۳- ت) هر اسب در هر مسیر دقیقاً یکبار حضور داشته باشد.

برای این منظور یک برنامه ریزی کلی انجام دهید.

۱۰۴- چند مربع لاتین 3×3 متفاوت وجود دارد؟

۱۰۵- یک مربع لاتین 3×3 با چند مربع لاتین متعامد است؟

۱۰۶- یک مربع لاتین از مرتبه ۴ یا بیشتر رسم کنید و نشان دهید با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از آن مربع لاتین غیر متعامد با آن به وجود می آید؟

۱۰۷- در شکل زیر می دانیم مربع سمت چپ چرخشی است. مربع سمت راست را شبه چرخشی می نامیم. نشان دهید دو مربع متعامد هستند.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

درس ۲ روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۱۰۸- الف- برای دو مجموعه متناهی A و B توضیح دهید چرا رابطه $|A \cup B| = |A| + |B|$ در حالت کلی صحیح نمی باشد.

ب- جای خالی را تکمیل کنید.

برای دو مجموعه متناهی A و B در حالت کلی داریم
 رابطه بالا به برای دو مجموعه معروف است.
 ۱۰۹- ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا در کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت نام کرده اند. اگر ۱۵ نفر در کارگاه ریسندگی و ۱۹ نفر در کارگاه بافندگی شرکت داشته باشند، چند نفر فقط ریسندگی را انتخاب نموده اند؟

۱۱۰- تعداد اعداد سه رقمی که مضرب ۲ یا ۳ می باشند را به دست آورید.

۱۱۱- تعداد اعداد سه رقمی که نه مضرب ۳ باشند و نه مضرب ۴ باشند را به دست آورید.

۱۱۲- اگر S مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq S$ در اینصورت $|\bar{A}| = \dots\dots\dots$
 ۱۱۳- در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.

۱۱۴- اصل شمول برای سه مجموعه را بنویسید.

۱۱۵- اگر S مجموعه مرجع باشد، حاصل $|A \cup B \cup C|$ را به دست آورید.

۱۱۶- چند عدد طبیعی کوچکتر مساوی ۴۰۰ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

۱۱۷- چند عدد طبیعی n ، $1 \leq n \leq ۳۵$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

۱۱۸- اگر یک قفل رمز دار شامل چهار رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد).

۱۱۹- در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می توان چنین راه هایی را طراحی کرد؟
۱۲۰- تابع پوشا را تعریف کنید.

۱۲۱- تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی چند تا است؟

۱۲۲- تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی چند تا است؟

۱۲۳- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2\}$ را به دست آورید.

۱۲۴- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ را به دست آورید.

۱۲۵- به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

۱۲۶- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ را به دست آورید.

۱۲۷- ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

۱۲۸- تعداد توابع از $\{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ که a را به ۱ می برد چند تا است؟

۱۲۹- تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را مشخص کنید.

۱۳۰- به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟

۱۳۱- حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است؟

اصل لانه کبوتری

۱۳۲- اصل لانه کبوتری: اگر..... کبوتر و لانه داشته باشیم و در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل کبوتر در آن قرار گرفته است.

۱۳۳- نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

۱۳۴- ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.

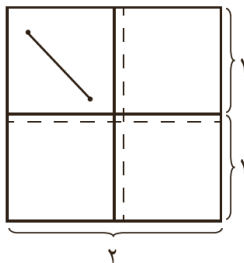
۱۳۵- آمار نشان می دهد تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۱ نفر جمعیت دارد حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تار موهایشان با هم برابر است.

۱۳۶- مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را از درون مثلث انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه کمتر از $\frac{1}{4}$ می باشد.

۱۳۷- مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۳ مفروض است. ۱۰ نقطه را از درون مثلث انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه کمتر از ۱ می باشد.

۱۳۸- نشان دهید هر زیر مجموعه ی شش عضوی از مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ حداقل دارای دو عضو است که مجموع آنها برابر ۱۰ می باشد.

۱۳۹- برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



۱۴۰- نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۱۴۱- نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $p \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

۱۴۲- جملات زیر را تکمیل کنید.

- اگر $n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $2n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $3n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $kn+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.

۱۴۳- در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

۱۴۴- در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۱۴۵- ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۱۴۶-

۱۴۷- حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟

۱۴۸- حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است.

۱۴۹- نشان دهید در هر کلاس (غیر خصوصی) حداقل ۲ دانش آموز یافت می شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

۱۵۰- در یک کلاس ۳۳ نفر دانش آموز وجود دارد. نشان دهید نام فامیل حداقل دو نفر از آنها با یک حرف یکسان شروع می شود.

۱۵۱- با استفاده از اصل لانه کبوتر ثابت کنید از میان سه عدد طبیعی می توان دو عدد پیدا کرد که مجموع آنها زوج باشد.

۱۵۲- تاسی را هفت بار پرتاب می کنیم . با استفاده از اصل لانه کبوتر ثابت کنید حداقل دو بار نتیجه یکسان حاصل می شود.

۱۵۳- از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۸۰ می خواهیم ۴۱ عدد را انتخاب کنیم. با استفاده از اصل لانه کبوتر نشان دهید حداقل مجموع دو تا از این اعداد برابر ۸۱ است.

۱۵۴- از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ می خواهیم ۱۶ عدد را انتخاب کنیم. با استفاده از اصل لانه کبوتر نشان دهید دستکم تفاضل دو تای از آنها برابر ۱ است.

ن کتاب صفحه ۸۴	پاسخ گویی در منزل	پاسخ گویی در کلاس
۱۵۵- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟		

۱۵۶- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

- ۱۵۷- در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند . اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:
- الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟
- ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟
- پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟
- ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

۱۵۸- اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۱۵۹- چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۱۶۰- به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۱۶۱- به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۱۶۲- ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.

۱۶۳- ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۶۴- حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۱۶۵- ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.
۱۶۶- مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۶۷- مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک دنباله حسابی مرتب شده اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۶۸- ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

۱۶۹- ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد.

تمرین های اضافی

- ۱۷۰- تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۱۳ عضوی به یک مجموعه ۱۵ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۱- تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۱۵ عضوی به یک مجموعه ۱۳ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۲- تعداد توابع یک به یک روی یک مجموعه n عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۳- تعداد توابع غیر یک به یک روی یک مجموعه ۴ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۴- تعداد توابع یک به یک و پوشا روی یک مجموعه ۴ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۵- تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۶- تعداد توابع $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ که ۱ را نمی پوشاند را مشخص کنید.
- ۱۷۷- تعداد توابع $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ که نه ۱ را می پوشاند و نه ۲ را مشخص کنید.
- ۱۷۸- تعداد توابع غیر پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۹- ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز داریم، نشان دهید اگر هر یک از آن ها را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده یکسان می باشند.
- ۱۸۰- برای آن که در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماه های سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد؟
- ۱۸۱- شخصی برای تولد خود ۵۸ میهمان دعوت کرده است، حداقل چند نفر روز تولدشان در یک روز از هفته است؟
- ۱۸۲- کلاسی دارای ۳۰ دانش آموز است. حداقل چند نفر روز تولدشان در یک روز از هفته است؟
- ۱۸۳- دبیرستانی ۴۰۰ دانش آموز دارد. حداقل چند نفر هفته تولد یکسانی دارند؟
- ۱۸۴- ۵۰ ورزش کار در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهر های اهواز، قم، زشت و همدان در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. نشان دهید حداقل ۵ ورزش کار هم رشته و هم شهری هستند.

- ۱۸۵- ۹ نقطه را درون دایره ای به شعاع ۱ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از ۱ می باشند.
- ۱۸۶- چند نقطه را درون دایره ای به شعاع ۴ انتخاب می کنیم تا حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از $4\sqrt{3}$ می باشند.
- ۱۸۷- هفت نقطه را درون مستطیلی با طول و عرض ۶ و ۴ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ می باشند.
- ۱۸۸- هفت نقطه را درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از ۱ می باشند.
- ۱۸۹- در یک آزمون ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند. نشان دهید حداقل ۲ نفر خروف اول نام و نام خانوادگی یکسانی دارند.
- ۱۹۰- در یک کلاس ۳۰ نفری حداقل چند نفر در یک ماه به دنیا آمده اند؟
- ۱۹۱- کلاس باید چند دانش آموز داشته باشد تا حداقل ۵ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند.
- ۱۹۲- از کیسه ای شامل ۷ مهره سفید ، ۶ مهره قرمز و ۸ مهره سیاه ، حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مهره هم رنگ داریم؟
- ۱۹۳- کمترین تعداد برای آن که حداقل سه نفر ماه تولد و روز هفته یکسانی داشته باشند را مشخص کنید.
- ۱۹۴- در یک مغازه دو نوع بلوز پشمی و گرگی در سه رنگ و چهار اندازه وجود دارد. حداقل چند بلوز بخریم تا مطمئن شویم سه بلوز یکسان خریده ایم؟