

روش‌هایی برای شمارش



فایلی که ملاحظه می‌فرمائید، متن تمریناتی که در فیلم "آموزش درس دوم فصل سوم ریاضیات گسسته" (روش‌هایی برای شمارش) توضیح داده شده است. در این درس "اصل شمول و عدم شمول" بیان شده است و با کمک آن تعداد توابع پوشا که از یک مجموعه به یک مجموعه تعریف می‌شود برای شمارش توزیع m شی متمایز بین n نفر توضیح داده شده است. بخش دیگر از روش‌های شمارش، تعداد توابع یک به یک که به بیان توزیع m شی متمایز بین n نفر با فرض اینکه n بزرگ‌تر مساوی m است و به هر نفر حداکثر یک شی برسد است.

بخش دیگر این درس، بیان "اصل لانه کبوتری" و "تعمیم اصل لانه کبوتری" و تمرین‌های متعدد و کاربرد این اصل در حل آنهاست.

از آنجا که اهمیت فراگیری درس اول ضروری است، بنابراین ابتدا درس اول را که فیلم آن قرار داده شده است، ملاحظه فرمائید. که مربوط به "مباحثی از ترکیبیات" است نیز قرار در سایت و کانال قرار داده شده است. توصیه اکید می‌شود که به شیوه گفته شده در فیلم، این فایل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. یعنی ابتدا درس اول از روی کتاب درسی خوانده شود و مثال‌ها مرور شود و سپس تمرین به تمرین از روی فیلم به این صورت پیش بروید. یک تمرین را به خوبی درک کنید و یک بار صدا را قطع کنید و خودتان روی آن تمرین در حالی که دارد بخش می‌شود صحبت کنید. حال یک بار صورت سوال را بنویسید و خودتان حل کنید. اگر اشکالی داشتید با مرور مجدد حل از روی فیلم، مطمئن شوید که حل را دریافتید، مجدداً این روند یعنی صحبت روی فیلم و نوشتن راه حل را انجام دهید. این خیلی مهم است که پاسخ‌تان را تمیز و کامل بنویسید.

بسیاری از افراد به خیال اینکه بلد شده‌اند از یک بار نوشتن یک مساله از ابتدا تا انتها دریغ می‌کنند و در سر جلسه امتحان، اولین چالش اصلی خود را می‌بینند. در حالی که اگر یک بار در خانه، با حوصله مساله را حل کنند، مطمئناً از عهده سوالات امتحان به خوبی برمی‌آیند. به طور مثال، تمایز مسائل درس اول که به توزیع k شی یکسان بین n نفر است، ممکن است با مسائلی در درس دوم که تعداد توابع پوشا (یا توابع یک به یک) قابل تعریف بین دو مجموعه است اشتباه گرفته شود. اینکه سه گل متمایز داشته باشیم و بخواهیم تعداد دسته گل‌هایی شامل هشت گل از آنها برداریم با مبحث درس اول و اینکه سه گل متمایز را به چند طریق می‌توان در هشت گلدان قرار داد، تعداد توابع که مربوط به درس دوم است.

سایت‌ها:

riazi.blog.ir

hesaban.jimdo.com

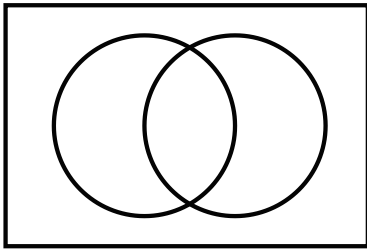
کانال‌های تلگرامی:

t.me/barpafilm

t.me/barpafilm

اصل شمول و عدم شمول (اصل شمول)

در کلاس سوم دبیرستان مدرسه دانش؛ حسین، علی، فرهاد در تیم فوتبال و سعید و علی و امین در تیم والیبال هستند و رامین و احمد در تیمی عضو نیستند.



الف) قرار است برای ورزشکاران اردویی برگزار شود، هر روز برای چند نفر باید ناهار، در نظر گرفته شود؟

ب) برای حضور ورزشکاران در مسابقات فوتبال و والیبال باید کارت مخصوص عضویت در هریک از تیم‌ها صادر شود، چند کارت باید صادر شود؟

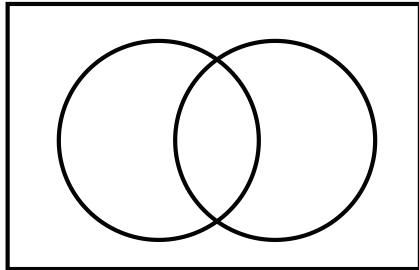
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$(A \cup B)' = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

دو مجموعه A ، B و مجموعه مرجع به صورت زیر تعریف شده است. با استفاده از نمودارون حاصل عبارات زیر را بدست آورید. همچنین با توجه به ویژگی اعضا حاصل هر قسمت، توصیفی برای عبارت مجموعه ای هر قسمت بنویسید.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad B = \{3, 6, 9, 12\} \quad S = (A \cup B) \cup \{1, 5, 7, 11\}$$



الف، $A \cup B$

ب، $A \cap B$

پ، $(A \cup B)'$

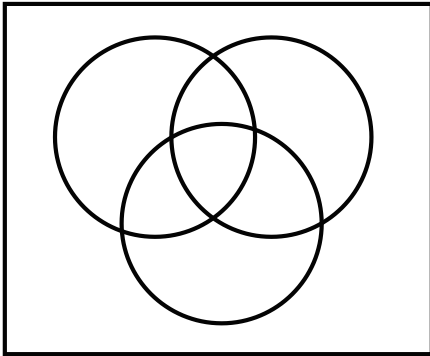
ت، $(A \cap B)'$

سه مجموعه A ، B و C به صورت زیر تعریف شده است. درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$A = \{a, b, d, e, f\} \quad B = \{e, c, f, g, h\} \quad C = \{a, c, j, m\}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

توضیح دهید چرا در رابطهٔ مربوط به اصل شمول سه مجموعه، اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه‌تایی اضافه می‌شود؟



(تعداد اعضای S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند)

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

چند عدد طبیعی کمتر از 3^0 بر هیچ یک از اعداد 2 ، 3 و 5 بخش پذیر نیست؟ (با استفاده از اصل شمول)

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد).



در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورده، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟



اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B شامل n عضو داشته باشد؛

الف) از مجموعه A به B چند تابع می‌توان داشت؟

ب) از مجموعه B به A چند تابع می‌توان داشت؟

اگر مجموعه A و B به صورت زیر باشد، چند مجموعه پوشا از A به B می توان تعریف کرد؟

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ و } B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

تعداد تابع‌هایی چون $f: A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به طوری که $R_f = B$ ، از رابطه

$$3^m - (3 \times 2^m - 3)$$

به دست می‌آید.

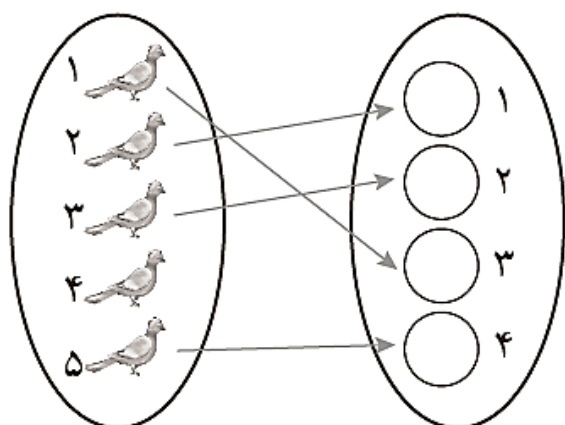
۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه A با ۶ به مجموعه B با ۴ عضورا تعیین کنید.

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

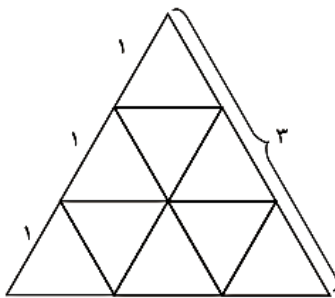
اصل لانه کبوتری (اصل)

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



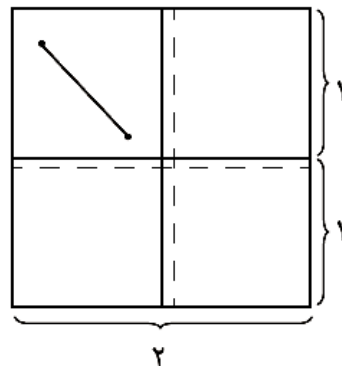
نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.



۱ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر	تعداد کبوترها $(kn+1)$	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	$1 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کبوتر	$2 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	$\dots + 1$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل کبوتر	$\dots + 1$	n

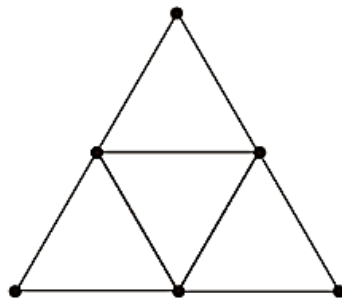
در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوه فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟ (فامیلی‌هایی مثل اشتیری و اشراقی مورد نظر است).

حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.



■
نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که
تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۵. چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۶. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۷. به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

۱۲ مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۳ مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

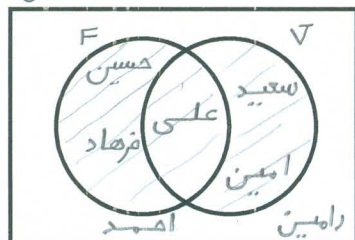
۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

اصل شمول و عدم شمول (اصل شمول)

در کلاس سوم دبیرستان مدرسه دانش؛ حسین، علی، فرهاد در تیم فوتبال و سعید و امین در تیم والیبال هستند و رامین و احمد در تیمی عضو نیستند.

کلاس



$$n(F) = 3$$

$$n(V) = 3$$

$$n(F \cap V) = 1$$

الف) قرار است برای ورزشکاران اردویی برگزار شود، هر روز

برای چند نفر باید ناهار، در نظر گرفته شود؟ ۵ نفر

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V)$$

$$3 + 3 - 1 = 5$$

ب) برای حضور ورزشکاران در مسابقات فوتبال و والیبال باید

کارت مخصوص عضویت در هر یک از تیم‌ها صادر شود، چند

کارت باید صادر شود؟ ۶ کارت باید صادر شود.

F	V
حسین	سعید
علی	علی
فرهاد	امین
۳	۳
۳ + ۳ = ۶	

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

اصل شمول و عدم شمول

(اصل شمول)



$$(A \cup B)' = \overline{A \cup B} = |S| - |A \cup B|$$

نیمه اصل شمول

$$(A \cup B)' = S - (A \cup B)$$

$$n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B)$$

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

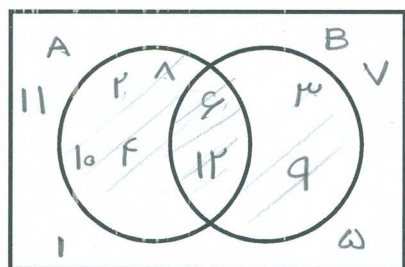
$$|S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

دو مجموعه A، B و مجموعه مرجع به صورت زیر تعریف شده است. با استفاده از نمودارون حاصل عبارات زیر را

بدست آورید. همچنین با توجه به ویژگی اعضا حاصل هر قسمت، توصیفی برای عبارت مجموعه ای هر قسمت

بنویسید. ^{اعداد مضرب ۱۲ کوچک یا مساوی ۱۲} ^{اعداد زوج کوچک تر یا مساوی ۱۲}

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad B = \{3, 6, 9, 12\} \quad S = (A \cup B) \cup \{1, 5, 7, 11\}$$



الف) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

اعداد کوچک تر یا مساوی ۱۲ که مضرب ۳ هستند یا بر ۲ بخش پذیرند

ب) $A \cap B = \{6, 12\}$

اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۲ که هم بر ۳ و هم بر ۲

بر ۳ بخش پذیرند

پ) $(A \cup B)' = S - (A \cup B)$
 اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۲ که نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیرند
 $= \{1, 5, 7, 11\}$
 بر هیچ کدام از اعداد ۲ یا ۳ بخش پذیر نیستند

ت) $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

اعدادی که مضرب ۶ نیستند و کوچک یا مساوی ۱۲ هستند

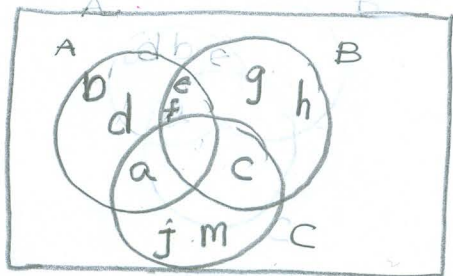
$$(A \cap B)' = S - (A \cap B) = \{1, 5, 7, 11, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$$

سه مجموعه A، B و C به صورت زیر تعریف شده است. درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$A = \{a, b, d, e, f\} \quad B = \{e, c, f, g, h\} \quad C = \{a, c, j, m\}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$5 + 5 + 4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 10$$



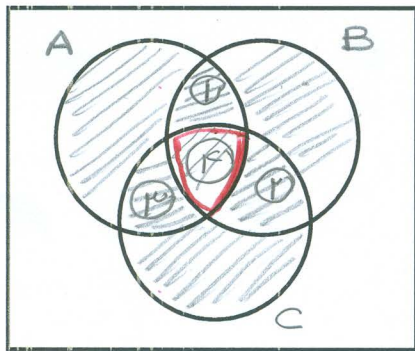
$$(A \cup B \cup C) = \{a, b, d, e, f, g, h, c, j, m\}$$

$$n(A \cup B \cup C) = |A \cup B \cup C| = 10$$

توضیح دهید چرا در رابطه مربوط به اصل شمول سه مجموعه، اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه‌تایی اضافه

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

می‌شود؟



هر یک از نامیه‌های هشت‌گانه ① و ② و

$$|A| + |B| + |C|$$

۲ بار مساب می‌شود بنابراین باید

یک بار از هر کدام کم شود نامیه ④

سه بار مساب می‌شود پس باید

بازمسترد کردن $|A \cap B|$ ، $|A \cap C|$ و $|B \cap C|$

هر یک از نامیه‌های ۱ و ۲ و ۳ یک بار مساب می‌شود اما نامیه ④ مساب نمی‌شود پس $|A \cap B \cap C|$ را اضافه می‌کنیم.

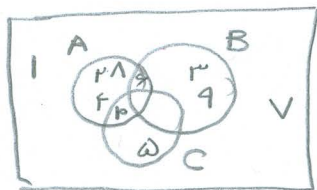
$$|A \cup B \cup C| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

(تعداد اعضای S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند)

$$(A \cup B \cup C)' = S - (A \cup B \cup C)$$

$$|A \cup B \cup C| = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

چند عدد طبیعی کمتر از ۳۰ بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر نیست؟ (با استفاده از اصل شمول)



$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

$$C = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30\} \quad A \cap C = \{10, 20, 30\} \quad B \cap C = \{15, 30\}$$

$$A \cap B \cap C = \{30\}$$

می‌خواهیم تعداد اعدادی را که بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵

بخش پذیر نیستند پیدا کنیم بنابراین اصل شمول

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

تعداد اعدادی که حداقل بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر

$$= 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$$

طبق نتیجه اصل شمول

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$30 - 22 = 8$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = (A \cup B \cup C)' = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| = \left[\frac{400}{3} \right] = 133 \quad |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100 \quad |C| = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = 33 \quad |A \cap C| = \left[\frac{400}{15} \right] = 26 \quad |B \cap C| = \left[\frac{400}{20} \right] = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{[3, 4, 5]} \right] = \left[\frac{400}{60} \right] = 6$$

$$|A \cup B \cup C| = 133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - 240 = 160$$

تعداد اعدادی که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیستند
(اعدادی که بر ۳ یا ۴ یا ۵ بخش پذیر نیستند)
بر هیچ کدام از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیستند.

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

$$|A| = \left[\frac{350}{4} \right] = 87 \quad |B| = \left[\frac{350}{5} \right] = 70 \quad |C| = \left[\frac{350}{6} \right] = 58$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{350}{20} \right] = 17 \quad |A \cap C| = \left[\frac{350}{[4, 6]} \right] = \left[\frac{350}{12} \right] = 29$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{350}{30} \right] = 11 \quad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{[4, 5, 6]} \right] = \left[\frac{350}{60} \right] = 5$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 87 + 70 + 58 - 17 - 29 - 11 + 5 \\ &= 163 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{A \cup B \cup C}| &= |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= 350 - 163 = 187 \end{aligned}$$

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداقل چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

روش مستقیم:

① رمز چهار رقمی شامل فقط یک ۷ و یک ۸ (الف)

$$672 \quad \binom{8}{2} \times 4!$$

ب

$$96 \quad \binom{8}{1} \times \frac{4!}{2!}$$

② رمز چهار رقمی شامل دو ۷ و یک ۸

$$96 \quad \binom{8}{1} \times \frac{4!}{2!}$$

③ رمز چهار رقمی شامل دو ۸ و فقط یک ۷

$$96 \quad \binom{8}{1} \times \frac{4!}{2!}$$

④ رمز چهار رقمی شامل دو ۸ و دو ۷

$$6 \quad \frac{4!}{2! \times 2!}$$

⑤ رمز چهار رقمی شامل ۷، ۳ و یک ۸

$$4 \quad \frac{4!}{3!}$$

⑥ رمز چهار رقمی شامل ۸ و یک ۷

$$4 \quad \frac{4!}{3!}$$

$$974$$

$$A = \{ \text{رمز چهار رقمی فاقد ۷} \} \quad |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$$

$$B = \{ \text{رمز چهار رقمی فاقد ۸} \} \quad |B| = 9^4$$

$$A \cap B = \{ \text{رمز چهار رقمی فاقد ۸ و ۷} \} \quad |A \cap B| = 8^4$$

$$A \cup B = \{ \text{رمزهای چهار رقمی که فاقد حداقل یکی از ارقام ۷ یا ۸ باشند} \}$$

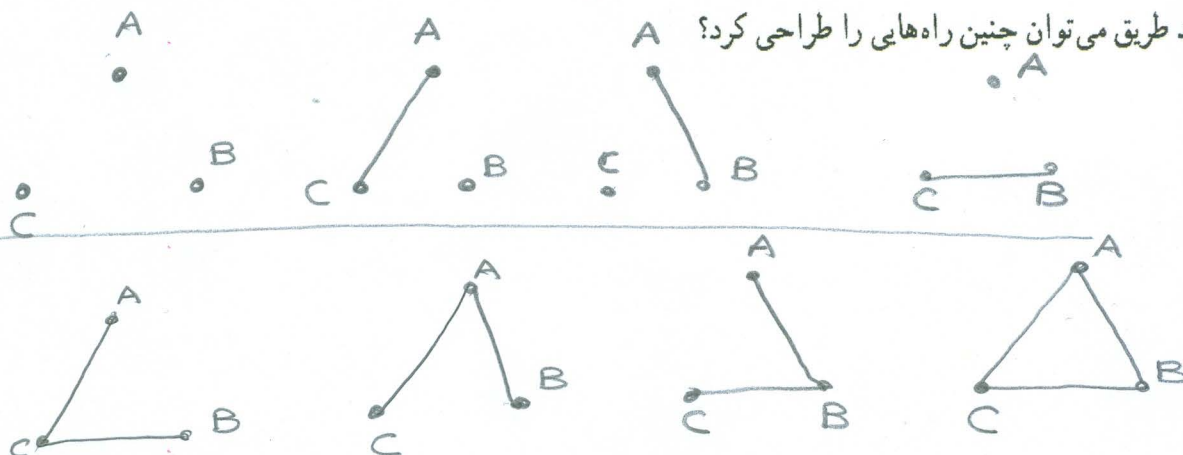
$$1978, 4567, 9876, 9743$$

$$|S| - |A \cup B| = \{ \text{رمزهای دارای رقم ۷ و ۸} \}$$

$$|A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$$

$$974 \times 5 = 4870 \quad \text{ثانیه}$$

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورده، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

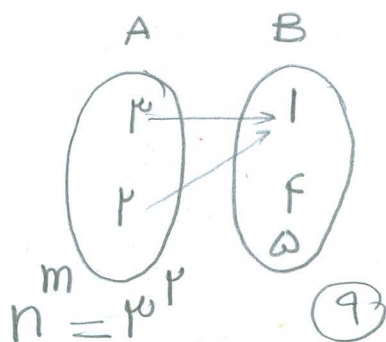
مداخل یک روستا تنها

$$2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 6 - 3 = 3$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 2^3 - 3 = 5$$

هیچ روستایی
تنها باشد

اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B شامل n عضو داشته باشد؛



$$\{(3, 1), (2, 1)\}$$

$$\{(3, 4), (2, 4)\}$$

$$\{(3, 5), (2, 5)\}$$

الف) از مجموعه A به B چند تابع می‌توان داشت؟

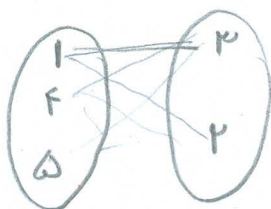
$$\{(3, 1), (2, 4)\} \quad \{(3, 4), (2, 1)\}$$

$$\{(3, 1), (2, 5)\} \quad \{(3, 4), (2, 5)\}$$

$$\{(3, 5), (2, 1)\} \quad \{(3, 5), (2, 4)\}$$

ب) از مجموعه B به A چند تابع می‌توان داشت؟

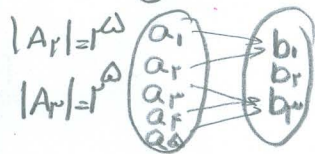
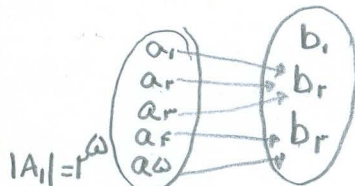
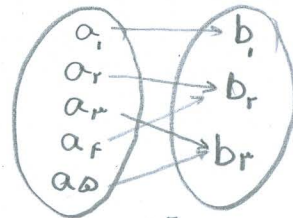
$$2^2 = 4$$



اگر مجموعه A و B به صورت زیر باشد، چند مجموعه پوشا از A به B می توان تعریف کرد؟

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ و } B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

کلیه توابع از A به B $3^5 = 243$



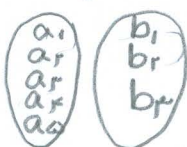
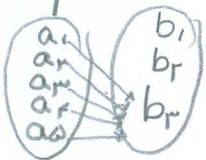
$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{توابعی که هیچ یک از } a_i \\ \text{به } b_1 \text{ نظیر نشود} \end{array} \right\} = \left\{ f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1, 1 \leq i \leq 5 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{توابعی که هیچ یک از } a_i \\ \text{به } b_2 \text{ نظیر نشود} \end{array} \right\} = \left\{ f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2, 1 \leq i \leq 5 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3, 1 \leq i \leq 5 \right\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$$

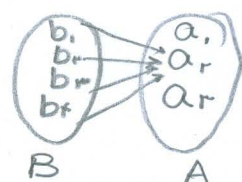
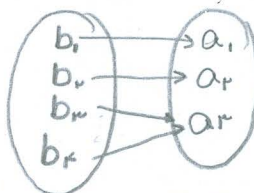
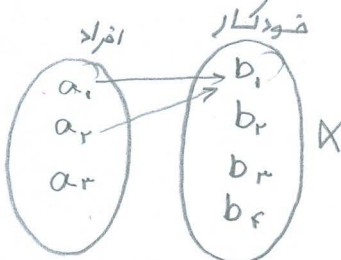
$$|A_1 \cap A_2| = 1 \quad 3^5 - (3^2 + 3^2 + 3^2 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$$



$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه

به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ تعداد توابع پوشا

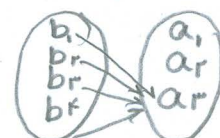


$$B_1 = \{f: B \rightarrow A \mid f(b_i) \neq a_1\}$$

$$B_2 = \{f: B \rightarrow A \mid f(b_i) \neq a_2\}$$

$$B_3 = \{f: B \rightarrow A \mid f(b_i) \neq a_3\}$$

$$B_1 \cap B_2 = \{f: B \rightarrow A, f(b_i) \neq a_1, f(b_i) \neq a_2\}$$



$$|B_1 \cap B_2| = 1$$

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

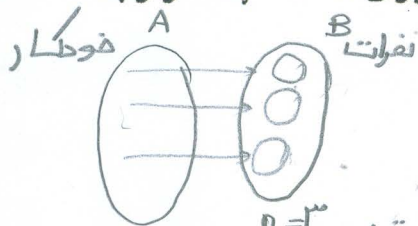
$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - 1 - 1 - 1 + 0 = 2^4 \times 3 - 3$$

$$|\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3| = |\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3| = 3^4 - (2^4 \times 3 - 3) =$$

توابع غیر پوشا
کلیه توابع
سه نفر
به نفر اول
هیچ یک از خودکارها

$$3^4 - (4 \times 3 - 3) = 36$$

تعداد تابع‌هایی چون $f: A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به طوری که $R_f = B$ ، از رابطه



$$3^m - (3 \times 2^m - 3)$$

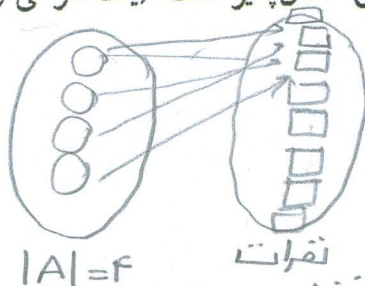
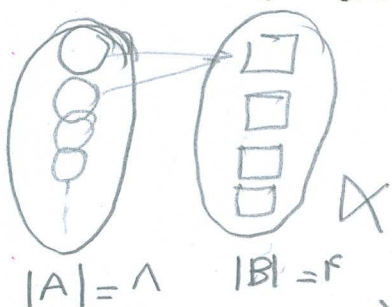
به دست می‌آید.

$$3^m - (3 \times 2^m - 3) = \text{توابع پوشا}$$

توابع غیرپوشا
به هر عضو B، حداقل یک عضو از A نظیر شده

است
(حداقل هر نفر یک خودکار)

۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود).



پس یک نفرات می‌تواند هر ۴ جایزه را ببرد
پاسخ: یافتن کلیه توابعی است از مجموعه اعضای جایزه‌ها به مجموعه ۸ عضو افراد (افراد می‌توانند جایزه‌ای نگیرند)

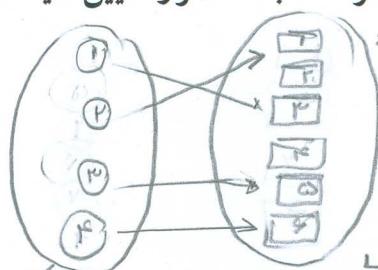
$$8^4: \text{کلیه توابع}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$|A|=4 \quad |B|=8$$

تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه A با ۶ به مجموعه B با ۴ عضو را تعیین کنید. نمی‌توان تابعی یک به یک از

A با ۶ عضو به B با ۴ عضو
تعریف کرد اما اگر $|A|$
برابر ۴ و $|B|=6$ تعداد
توابع یک به یک
 $f: A \rightarrow B$ $(6)_4$



برای یک به یک بودن باید به هر عضو
B فقط یک عضو از A نظیر شود

$$(6)_4 = \frac{6!}{4! \times 2!} \times 4!$$

۴ تا از ۶ عضو A، انتخاب

$$(6)_4 = \frac{6!}{2!}$$

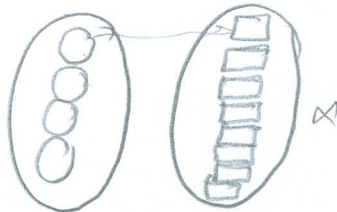
می‌کنیم و بعد ۴ جایگشت برای آن در نظر می‌گیریم

$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_8 = 4$$

خودکارها یکسان نباید باشند



توانج یک به یک

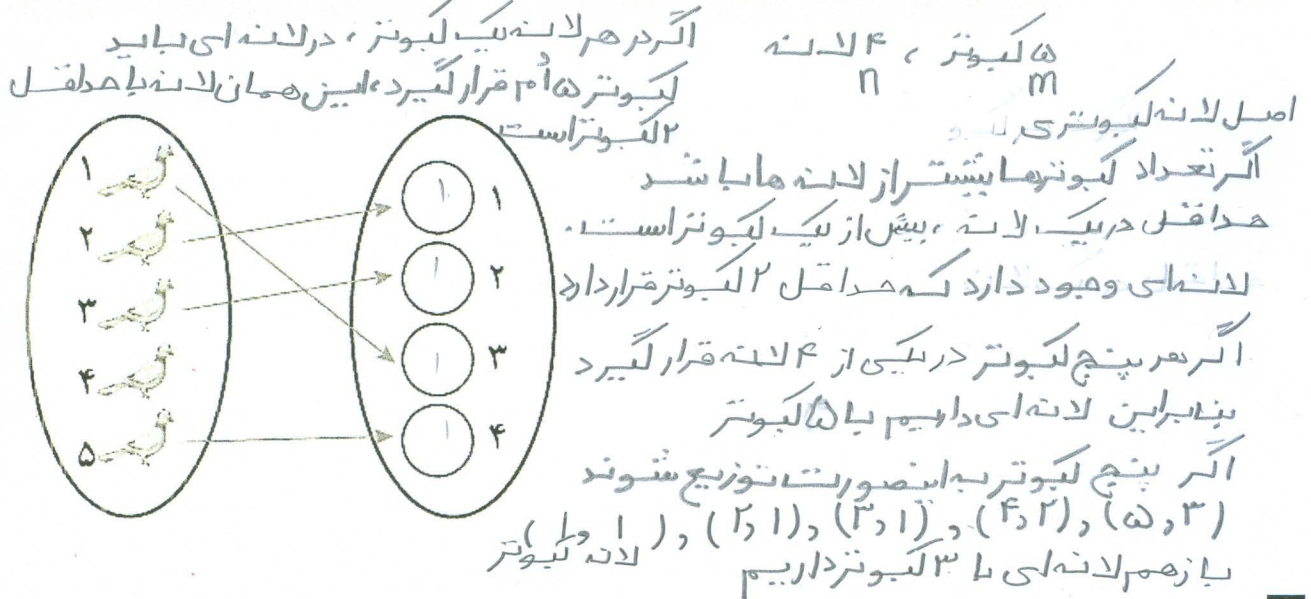
$$\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!}$$

۴ نفر از ۸ نفر را انتخاب می کنیم و بعد ۴! میانیست

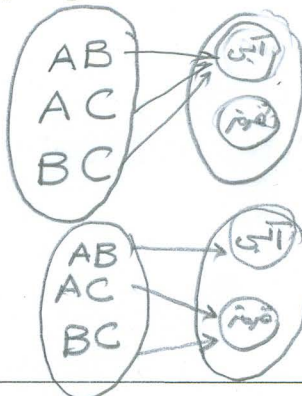
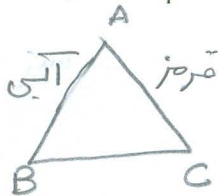
$$(\hat{4}) \times 4! = \frac{8!}{4! \times 4!} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

اصل لانه کبوتری (اصل)

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو



ضلع این مثلث هم رنگ خواهند شد. اگر $m=3$ تعداد ضلع ها را کبوتر و $n=2$ تعداد رنگ ها را لانه در نظر بگیریم $m > n$ بنابراین حداقل یک رنگ برای دو ضلع وجود دارد.

ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.

باقی مانده هر عدد دلخواه بر ۴ برابر است با یکی از اعداد $B = \{0, 1, 2, 3\}$

$4K$

$4K+1$

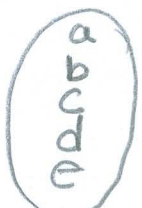
$4K+2$

$4K+3$

یا هر عدد را می توان به یکی از فرم های زیر نوشت:

هر پنج عدد دلخواه را در مجموعه A (تعداد کبوترها: ۵)

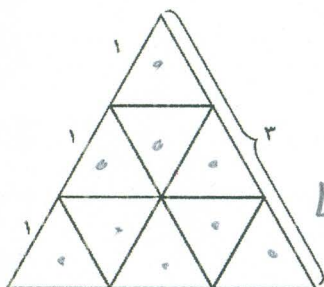
در نظر می گیریم و باقی مانده بر ۴، مجموعه B



بنابراین $m > n$ پس باقی مانده دو عدد

بر ۴ با هم برابر است یعنی این

دو عدد با هم به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند



۱۱ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان

دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط

وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

$m = 10$ ، تعداد نقاط را کبوترها و $n = 4$ ، تعداد مثلث ها

اگر همه ۱۰ نقطه در تک تک مثلث ها قرار گیرند،

نقطه دهم داخل یکی از مثلث ها قرار خواهد گرفت

که نقطه ای داخل اش هست و چون فاصله دو نقطه

داخل مثلثی به ضلع ۱ کمتر از ۱ است پس حداقل ۲ نقطه

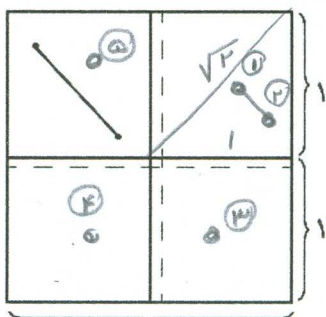
با فاصله ای کمتر از ۱ داریم.



$d < 1$

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری

به آن پاسخ دهید.



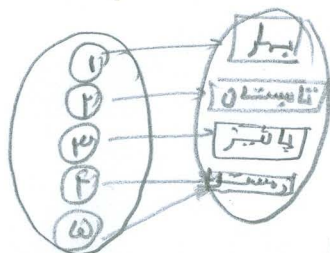
اگر ۵ نقطه دلخواه داخل مربع

رو به رو اختیار کنیم حداقل دو

نقطه با فاصله کمتر از $\sqrt{2}$

داریم.

۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

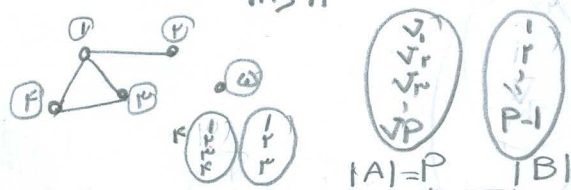


اگر تعداد افراد خانواده را
تعداد کیبوترها $m = 5$
و تعداد فصل تولد افراد
را $n = 4$ معادل لانه ها
در اصل لانه کیبوتری در نظر

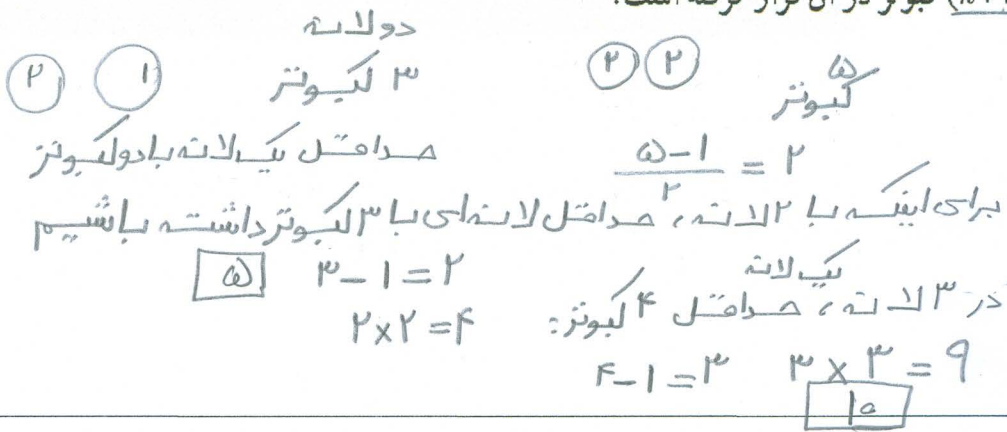
بگیریم چون $m > n$ بنابراین دست کم، فصل تولد دو نفر یکی است.
 $5 > 4$

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

به صورت کلی دو حالت را در نظر می گیریم -
۱ گراف فقط رأس تنها - اگر گراف G از مرتبه P فقط رأس تنها باشد حداقل
درجه او حداکثر درجه $P-1$ است. بنابراین اگر رئوس را کیبوترها $m = P$ و تعداد
اعداد مربوط به درجه را $n = P-1$ در نظر بگیریم داریم $P > P-1$ بنابراین
 $m > n$ حداقل دو رأس با درجه یکسان داریم.



۲ اگر گراف دارای رأس تنها باشد
رأس تنها را کنار می گذاریم و به حالتی که در ۱ داشتیم می رسیم یعنی تعدادی
رأس که m به تعدادی از اعداد بعنوان درجه n نظیر می شود که $m > n$ و طبق اصل
لانه کیبوتری حداقل دو رأس با درجه یکسان داریم.
تعمیم اصل لانه کیبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کیبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه ای وجود دارد که
حداقل $(k+1)$ کیبوتر در آن قرار گرفته است.



تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کیبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ($k+1$) کیبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کیبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کیبوتر
n	$3 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کیبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$Kn + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $K+1$ کیبوتر

در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

$$n = ۱۲ \text{ ماه داریم}$$

$$K : ۶ = ۷ - 1$$

$$Kn + 1 = ۶ \times ۱۲ + 1 = ۷۳$$

$$\left[\frac{۷۳}{۱۲} \right] = ۶ \text{ حداکثر تعداد ماه تولد}$$

در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم

حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

n : ماه و روزهای هفته

$$۱۲ \times ۷ = ۸۴ \text{ : } n$$

$$K : ۹ = ۱۰ - 1$$

$$nK + 1 = ۹ \times ۸۴ + 1 = ۷۵۷$$

۲) ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم

گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$K + 1 = 5$$

$$K = 4$$

$$13 \times 4 = 52$$

$$Kn + 1 = 54$$

$$4n + 1 = 54$$

$$4n = 53$$

$$n = \left[\frac{53}{4} \right] = 13$$

۳) حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم

حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوه فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟

(فامیلی‌هایی مثل اشتري و اشراقی مورد نظر است).

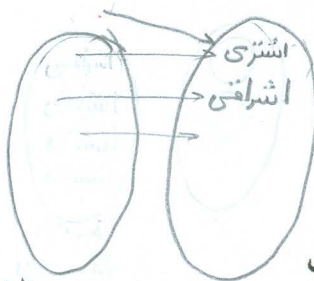
کل حالات متفاوت
دو حرف اول متفاوت

$$n = 32 \times 31 = 992$$

$$K + 1 = 3 \rightarrow K = 2$$

$$Kn + 1 = 2 \times 992 + 1 = 1985$$

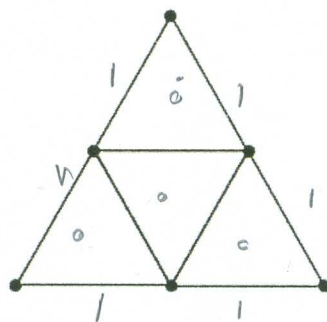
$$2 \times 992 = 1984$$



$$2 \times 992 +$$

حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب

کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.



تعداد نقطه که معادل تعداد

لبوترها می‌توان در نظر گرفت

$$Kn + 1$$

$$K + 1 = 2 \rightarrow K = 1$$

$$n = 4$$

۴ × ۱ + ۱ = ۵ : حداقل تعداد نقاط برای اینکه حداقل
۲ نقطه فاصله‌شان کمتر از ۱ باشد

نشان دهید در هر کلاس با n دانش آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش آموز یافت می‌شوند که

تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است. اگر n دانش آموز را n رأس یک گراف و

رابطه دوستی بین آنها، یال‌های گراف بنابرین درمات رؤس معادل

تعداد دوستان افراد است. اگر دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

[۱] افراد همه دارای دوست هستند. [۲] اگر افرادی باشند فاقد دوست

درمات از آن $n-1$ ، $n-1 > n$ میان افرادی که دوستی دارند

بنابرین حداقل دو نفر با تعداد دوستان برابر هستند

باز از آن $n-1$ تعداد افراد باقی مانده و

پس به حالت [۱] تبدیل شد $n > n-1$

حداقل دو نفر با تعداد دوستان

برابر وجود دارد.

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۲} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\} \quad B = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۳} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\} \quad A \cap B = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۳} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\}$$

$$|A| = \left[\frac{90}{2} \right] = 45 \quad |B| = \left[\frac{90}{3} \right] = 30 \quad |A \cap B| = \left[\frac{90}{6} \right] = 15$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۲ یا ۳} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

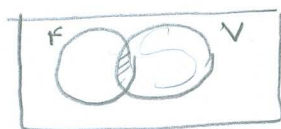
$$|A \cup B| = 45 + 30 - 15 = 75 - 15 = 60$$

$$|A \cup B| = 90 - 60 = 30$$

اعدادی که بر هیچ یک از دو عدد ۲ یا ۳ بخش پذیر نیستند

اعداد ۱ تا ۳
بخش پذیرند

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟



$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۴} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\} \quad |A| = \left[\frac{200}{4} \right] = 50$$

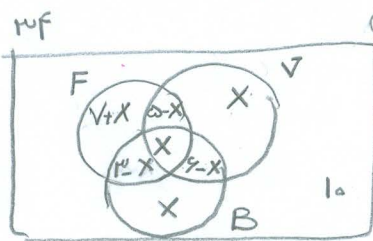
$$B = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۷} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\} \quad |B| = \left[\frac{200}{7} \right] = 28$$

$$A \cap B = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که بر ۴ و ۷} \\ \text{بخش پذیرند} \end{array} \right\} \quad |A \cap B| = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$$

$$|A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

ولی بر ۷ بخش پذیر نیستند

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:



$$0 + 5 - X + X + 6 - X = 11$$

$$0 + 5 - X + X + 3 - X = 10$$

$$0 = X + 3$$

$$0 + X + 3 - X + 6 - X = 9$$

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
 $7 + X + 5 - X + X + 3 - X + 6 - X + X + X = 34 - 10$
 $X = 34 - 21 = 3$

$$|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |F \cap B| - |B \cap V| + |F \cap V \cap B|$$

$$34 - 10 = 24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 3 - 6 + |F \cap V \cap B|$$

$$24 = 35 - 14 + |F \cap V \cap B| \rightarrow |F \cap V \cap B| = 3 \quad \text{الف)}$$

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10 \quad \text{ب)}$$

$$|V| - |V \cap B| = 11 - 6 = 5 \quad \text{پ)}$$

$$\text{فقط فوتبال} + \text{فقط والیبال} + \text{فقط بسکتبال} = 10 + 3 + 3 = 16$$

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(7)(2)(3) \quad \square \quad \square$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{رمزهای فاقد ۲} \\ \text{پنج رقمی} \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = 8^5 \quad B = \left\{ \begin{array}{l} \text{رمز فاقد ۲} \\ ۳ \end{array} \right\} \rightarrow |B| = 8^5$$

$$\text{فاقد ۷} \quad |C| = 8^5 \quad \text{کلید رمزها} \quad |S| = 9^5 \quad \text{فاقد هیچ یک}$$

$$A \cap B = \left\{ \begin{array}{l} \text{رمز فاقد ۲ و ۳} \\ ۳ \end{array} \right\} \quad |A \cap B| = 7^5 \quad A \cap B \cap C = \left\{ \begin{array}{l} \text{رمزهای پنج رقمی} \\ \text{فاقد ۲ و ۳ و ۷} \end{array} \right\}$$

$$A \cap C = \left\{ \begin{array}{l} \text{فاقد ۲ و ۷} \\ ۳ \end{array} \right\} \quad |A \cap C| = 7^5 \quad |A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$B \cap C = \left\{ \begin{array}{l} \text{فاقد ۲ و ۷} \\ ۳ \end{array} \right\} \quad |B \cap C| = 7^5$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\text{مداخل یکی از ۲ و ۳ و ۷} \quad = 8^5 + 8^5 + 8^5 - 7^5 - 7^5 - 7^5 + 6^5$$

$$\text{رمزهای دارای ۲ و ۳ و ۷} = \text{مداخل یکی از اعداد ۲ و ۳ و ۷} - \text{کل رمزها در رمز باشد}$$

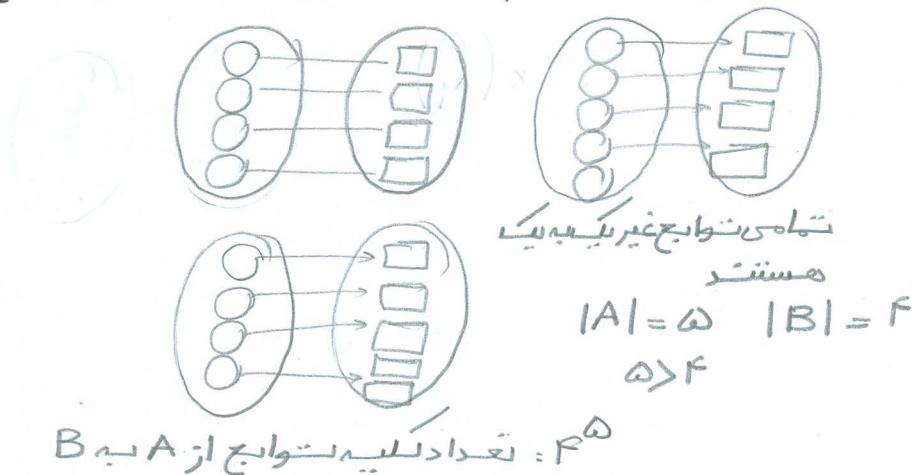
$$|S| - |A \cup B \cup C| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$$

$$9^5 - (3 \times 8^5 - 3 \times 7^5 + 6^5) = 3390$$

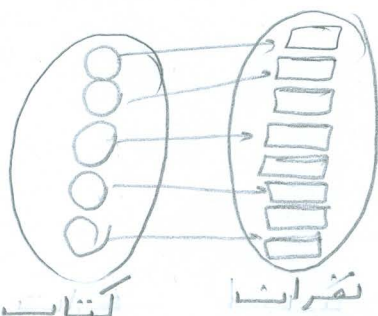
در صورتی که هر رمز ۶ ثانیه زمان نیاز داشته باشد

$$3390 \times 6 = 20340 \quad \text{زمان مورد نیاز}$$

۵ چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟



۶ به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟



هر کتاب به یک نفر کتاب
هر نفر حداکثر یک کتاب میگیرد

$$\binom{8}{5} \times 5! = \frac{8!}{3! \times 5!} \times 5!$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$$

۷ به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را

داوری کند؟ تابع پوشا

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_1) \neq b_1\} \quad A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_2) \neq b_2\} \quad A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_3) \neq b_3\}$$

$$|A_1| = 2^6 \quad |A_2| = 2^6 \quad |A_3| = 2^6 \quad |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap B \cap C| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 2^6 + 2^6 + 2^6 - 1 - 1 - 1 + 0$$

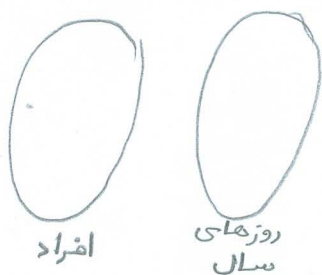
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^6 - (3 \times 2^6 - 3) = 540$$

حداقل یک داور بدون فیلم

همه داورها فیلم دارند

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.



اگر تعداد افراد را $m = 368$ بگیریم

و روزهای سال را $n = 365$ بگیریم

(یا ۳۶۶) چون $m > n$ بنابراین

طبق اصل (اصل لانه لکوتری) حداقل

دو نفر، در یک روز متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه

تولدشان یکسان است.

$$K+1=7 \rightarrow K=6$$

تعداد لانه‌ها در این مساله:

$$K \cdot n + 1 = 505$$

$$12 \times 7 = 84$$

$$6n + 1 = 505$$

ماه

$$6n = 505 - 1$$

در هر ماهی که در نظر گرفته شود، ۷ روز

هفته می‌تواند در نظر گرفته شود.

$$n = \frac{504}{6} = 84$$

$$= \left\{ \text{جمعه, اسفند, ...}, (\text{مکشیر, غروریت}), (\text{تسنه, غروریت}) \right\} \text{ لانه‌ها}$$

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز

تولدشان یکسان است؟

$$K+1=20 \rightarrow K=19$$

$$n = 365$$

$$19 \times 365 + 1 = 6936$$

حداقل افراد برای اطمینان از اینکه حداقل ۲۰ نفر، روز تولدشان یکی است

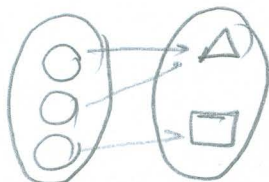
۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.



باقی‌مانده هر عدد بر ۲ یکی از اعداد ۰ یا ۱ است.

اگر زوج باشد باقی‌مانده صفر

اگر فرد باشد باقی‌مانده ۱



هر سه عددی که در نظر بگیریم (لکوترها) هر دو یکی از دسته اعداد (لانه‌ها)

زوج یا فرد هستند $m > n$ بنابراین یا دو فرد یا دو زوج حداقل یکی از

لانه‌ها (دسته اعداد زوج و فرد) دو عضو دارد و مجموع دو عدد زوج یا دو عدد فرد

عدد زوج است.

۱۲ مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اگر مجموعه A را به دو مجموعه A_1 و A_2 افراز کنیم

$$A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 42\} \quad A_2 = \{43, 44, \dots, 84\}$$

هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A شامل حداقل یکی از اعضای هر یک از دو مجموعه است. چون $42 < 43$ تعداد اعضای هر مجموعه A_1 و A_2 ، ۴۳ عضو است و این عضو با عضو دیگر مجموعه ۸۵ را ایجاد می کنند.

۱۳ مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

مجموعه A را به صورت زیر مجموعه های زیر افراز شده در نظر می گیریم:

$$A_1 = \{5, 85\} \quad A_5 = \{21, 69\} \quad A_9 = \{37, 53\}$$

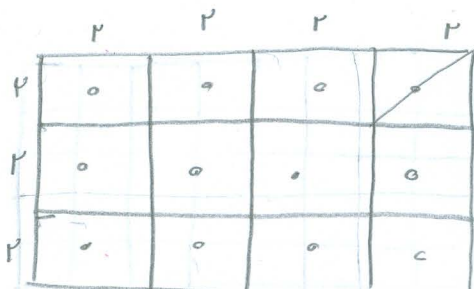
$$A_2 = \{9, 81\} \quad A_6 = \{25, 65\} \quad A_{10} = \{41, 49\}$$

$$A_3 = \{13, 77\} \quad A_7 = \{29, 61\} \quad A_{11} = \{45\}$$

$$A_4 = \{17, 73\} \quad A_8 = \{33, 57\} \quad A_{12} = \{1\}$$

اگر این زیرمجموعه ها A_1 تا A_{12} را با ۱۳ عدد از مجموعه A ، الگوتر در نظر بگیریم با در نظر گرفتن اینکه $13 > 12$ (لیموترها بیشتر از لینه ها، بنابراین حداقل دو عدد از یک زیرمجموعه یعنی مجموع دو عدد از این زیرمجموعه ۱۳ عضوی ۹۰ خواهد بود).

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.



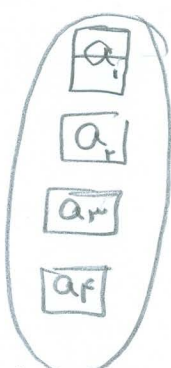
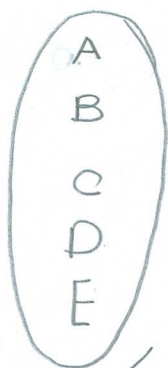
$$a = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

اگر مستطیل را به صورت مقابل تقسیم بندی کنیم، ۱۲ فاصله را ۱۲ لینه و ۱۳ نقطه را، ۱۳ الگوتر بنابراین حداقل دو نقطه

درون یک مربع جایی می گیرند و فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد.

پنج نقطه با مختصات هابی صحیح را پنج لیو تر و حالت هایی که می توان از نظر زوج یا فرد بودن طول و عرض آنها در نظر گرفت، لانه مختصات یک نقطه به یکی



از چهار صورت است:

$$\begin{matrix} a_1 & [زوج] & a_1 & [زوج] \\ a_2 & [زوج] & a_2 & [زوج] \\ a_3 & [فرد] & a_3 & [فرد] \\ a_4 & [فرد] & a_4 & [فرد] \end{matrix}$$

بنابر این این ۵ و $m=5$ و $n=4$ ، حداقل دو نقطه داریم که دارای شکل یکسانی از فرم های چهارگانه (a_1, a_2, a_3, a_4) هستند.

اگر هر کدام از حالت ها را در نظر بگیریم، آن دو نقطه دارای مختصات وسط صحیح خواهند بود. چون اگر دو نقطه مورد نظر متعلق به a_1 باشند $\begin{bmatrix} 2q \\ 2q' \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2K \\ 2K' \end{bmatrix}$ مختصات وسط این دو نقطه عددی صحیح به همین ترتیب هر یک از فرم ها را می توان نشان داد که اگر دو نقطه به آن فرم باشند مختصات وسط شان عدد صحیح. مثلاً اگر دو نقطه مورد نظر به فرم a_3

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2q' \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2K+1 \\ 2K' \end{bmatrix} \text{ [فرد] [زوج]}$$

$$\text{طول نقطه وسط} = \frac{(2K+1) + (2q+1)}{2} = \frac{2P+2}{2} = P+1$$

عدد صحیح

$$\text{عرض نقطه وسط} = \frac{2K' + 2q'}{2} = K' + q'$$

عدد صحیح

$$\text{مختصات وسط دو نقطه مورد نظر} = \begin{bmatrix} P+1 \\ K'+q' \end{bmatrix}$$

مورد نظر
(متعلق به یک حالت)
لانه