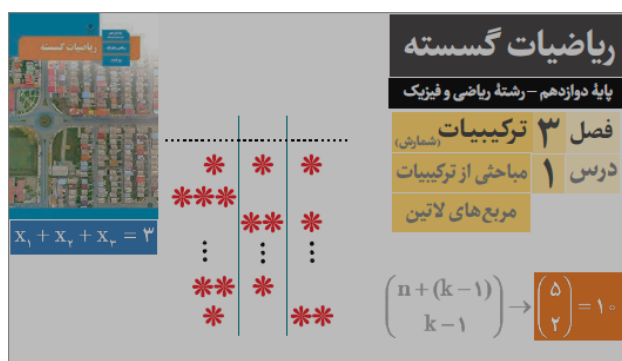


مباحثی از ترکیبیات



فایلی که ملاحظه می‌فرمائید، متن تمریناتی که در فیلم "آموزش درس اول فصل سوم ریاضیات گسسته" (مباحثی از ترکیبیات) توضیح داده شده است. در این درس "جایگشت" یادآوری شده است و تکمیل شده است. از اصلی‌ترین مباحث این درس "روش‌های" توزیع تعداد k شی یکسان بین n نفر (در حالت کلی و همچنین با شرایط مختلف از جمله حداقل یک شی به هر نفر) توضیح داده شده است.

بخش دیگر این درس، مربع‌های لاتین و اینکه در چه حالتی دو مربع لاتین متعامد هستند و کاربرد آن در حل مسائل در مثال‌ها و تمرین‌هایی است.

درس دوم که مربوط به "روش‌های برای شمارش" است نیز قرار در سایت و کانال قرار داده شده است. توصیه‌ای که می‌شود که به شیوه گفته شده در فیلم، این فایل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. یعنی ابتدا درس اول از روی کتاب درسی خوانده شود و مثال‌ها مرور شود و سپس تمرین به تمرین از روی فیلم به این صورت پیش بروید. یک تمرین را به خوبی درک کنید و یک بار صدا را قطع کنید و خودتان روی آن تمرین در حالی که دارد پخش می‌شود صحبت کنید. حال یک بار صورت سوال را بنویسید و خودتان حل کنید. اگر اشکالی داشتید با مرور مجدد حل از روی فیلم، مطمئن شوید که حل را دریافتید، مجدداً این روند یعنی صحبت روی فیلم و نوشتن راه حل را انجام دهید. این خیلی مهم است که پاسخ‌تان را تمیز و کامل بنویسید.

بسیاری از افراد به خیال اینکه بلد شده‌اند از یک بار نوشتن یک مساله از ابتدا تا انتها دریغ می‌کنند و در سر جلسه امتحان، اولین چالش اصلی خود را می‌بینند. در حالی که اگر یک بار در خانه، با حوصله مساله را حل کنند، مطمئناً از عهده سوالات امتحان به خوبی برمی‌آیند. به طور مثال، مربع‌های متعامد از مرتبه پنج و هفت، بسیار ساده است، اما وقتی یک بار آن را انجام دهید.

سایت‌ها:

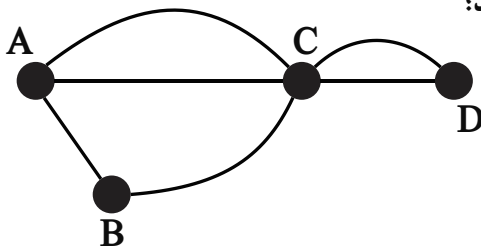
riazi.blog.ir

hesaban.jimdo.com

کانال‌های تلگرامی:

t.me/barpafale

t.me/barpafilm



شکل مقابل راه‌های ارتباطی بین چهار شهر؛ A، B، C و D را نشان می‌دهد؛

☐ به چند طریق از شهر A به شهر C می‌توانیم برویم؟

☐ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم؟

☐ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم و برگردیم؟

☐ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم و برگردیم؟ (به طوری که مسیر رفت و برگشت یکی نباشد – دو مسیر یکسان هستند اگر تمامی قسمت‌های شان با هم برابر باشد)

علی می‌خواهد به میهمانی برود. علی سه پیراهن به رنگ‌های سیاه، سفید و خاکستری و دو شلوار دارد که یکی جین و دیگری کتان است و سه کلاه دارد که یکی سفید، یکی سیاه و دیگری طرح‌دار است. علی چند تیپ می‌تواند داشته باشد؟ (هر تیپ با تیپ دیگر متمایز است اگر حداقل یکی از اجزا (پیراهن، شلوار یا کلاه، متفاوت باشد)



اگر داخل یک جعبه، ۹ شماره از ۱ تا ۹ باشد. سه کاغذ را با چشمان بسته باهم برمی داریم؛ احتمال های زیر را حساب کنید.

☐

هر سه عدد فرد باشد

☐

(فقط) دو عدد زوج باشد

☐

حداقل یکی از اعداد فرد باشد



یکی از کاغذهایی که خارج کرده ایم (در سوال قبل) می بینیم، عددی فرد است؛ احتمال های زیر را بدست آورید.

☐

هر سه عدد فرد باشد

☐

دو عدد زوج باشد

☐

یکی زوج و یکی فرد باشد



تعداد اعدادی با شماره‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ را در هریک از قسمت‌های زیر بدست آورید.
(هر قسمت را در حالت مجاز تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام حساب کنید.)

☐

دو رقمی

☐

چهار رقمی زوج

☐

دو رقمی بخش پذیر بر ۵

☐

۳ رقمی که ۱ یکی از ارقام آن باشد

☐

۳ رقمی که ۱ یکی از ارقام نباشد

فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

■ محاسبه کنید با ارقام ۱، ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟

■ با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

■ شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند.
(از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

■ به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

■ به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ برابر است با

تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{\dots}{\dots} = \dots$

کار در کلاس

۱ معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با

$$\binom{n-1}{k-1}$$

۳ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد
به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

۴ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$)

۵ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد
به شرط آنکه $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

مربع های لاتین

سه مدرس به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۸-۱۰، ۱۰-۱۲ و ۲-۴ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس ها را در جدول مقابل به گونه ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات کلاس ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۲-۴
A			
B			
C			

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به دست آورید.

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- | | |
|--|---|
| (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. | (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است. |
| (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. | (b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس ها تدریس داشته است. |
| (پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است. | (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است. |
| (ت) هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است. | (d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه ها تدریس داشته است. |

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

۲ با استدلال کلامی بگویید که

چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

«مربع لاتین چرخشی»

۱	۲	۳	...	...	...	$n-1$	n
n	۱	۲	۳	...	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	n	۱

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

(الف)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

(ب)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(پ)

۱ چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟

۲ آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۴ آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$B' =$

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

نشان دهید:

اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمزی که ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:
الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $7! \times 4!$ باشد.

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان نوشت؟

۶ می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۷ ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$, $x_i > 0$, $2 \leq i \leq 5$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$, $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$ $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۳ مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید.

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید

و مربع حاصل را A_1 بنامید.

آیا A و A_1 متعامدند؟

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید.

سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع

حاصل را A_2 بنامید. آیا A و A_2 متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین،

همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین،

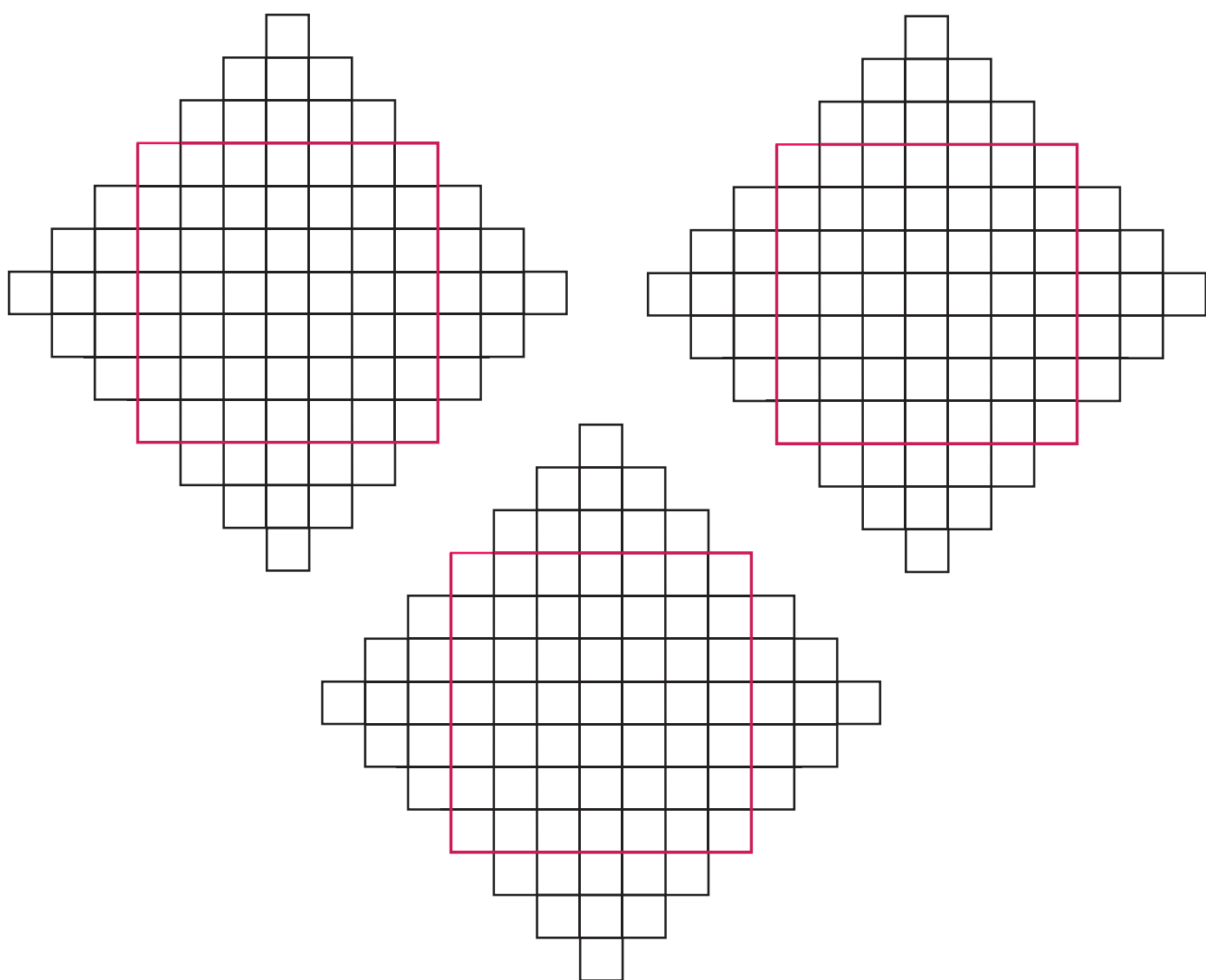
همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس $T_1, T_2, \dots$ و T_6 در شش جلسه متوالی در

شش کلاس $C_1, C_2, \dots$ و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند

که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.



۱۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته

با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند
به طوری که شرایط زیر برقرار باشد :

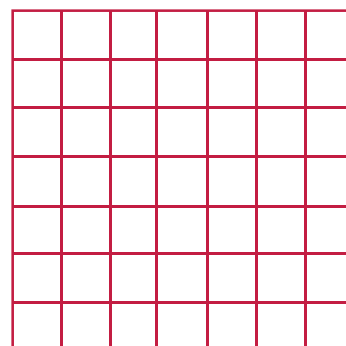
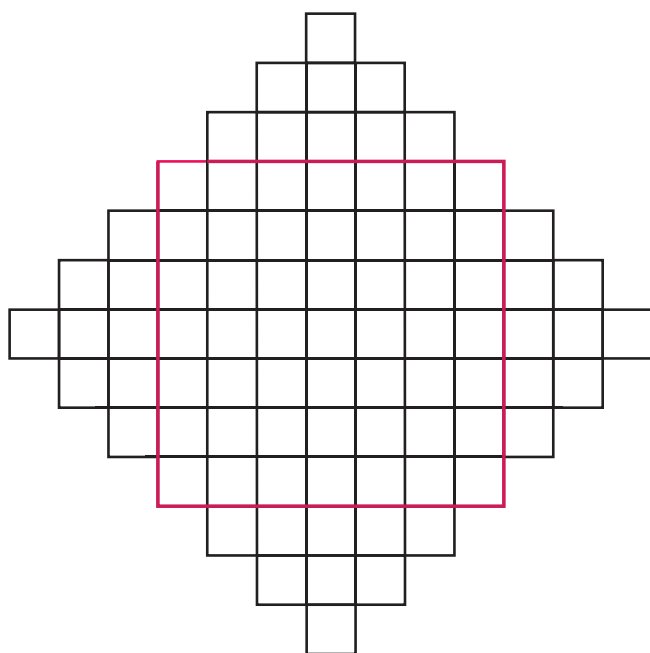
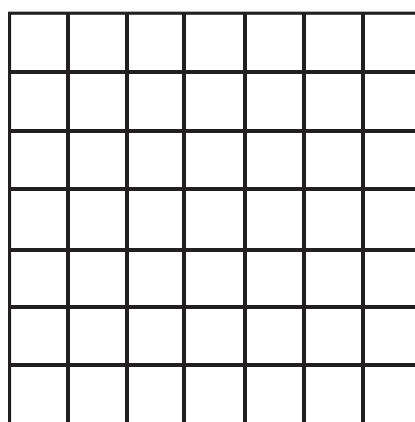
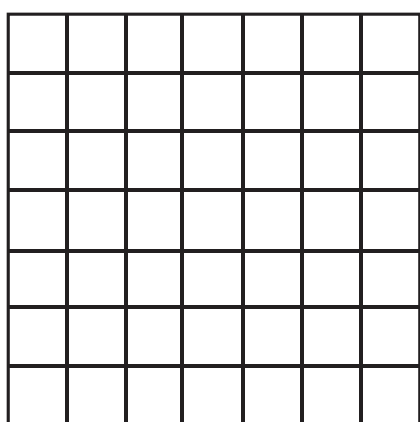
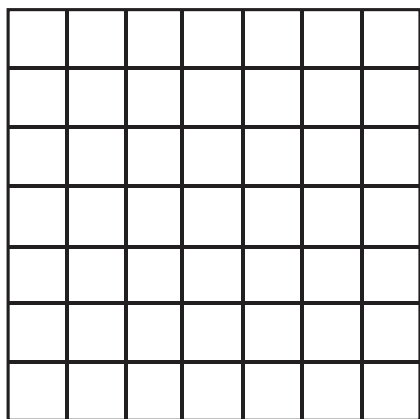
الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

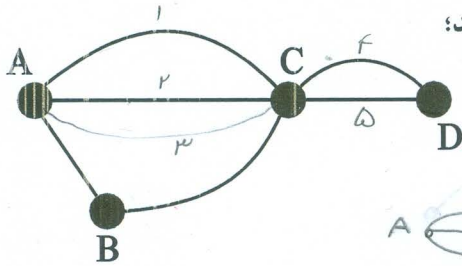
پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

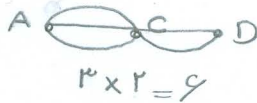
— برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.



شکل مقابل راه‌های ارتباطی بین چهار شهر؛ A، B، C و D را نشان می‌دهد؛



□ به چند طریق از شهر A به شهر C می‌توانیم برویم؟ به سه طریق



□ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم؟

به ۶ طریق



□ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم و برگردیم؟

$$6 \times 6 = 36$$

مثال $(1-4, 4-1)$
 $(1-4, 4-2)$

□ به چند طریق از شهر A به شهر D می‌توانیم برویم و برگردیم؟ (به طوری که مسیر رفت و برگشت یکی نباشد) - دو مسیر

یکسان هستند اگر تمامی قسمت‌های شان با هم برابر باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-4, 4-1) \times (2-5, 5-2) \\ (1-5, 5-1) \times (2-4, 4-2) \\ (2-4, 4-2) \times (3-4, 4-3) \\ (3-4, 4-3) \times (3-5, 5-3) \end{array} \right.$$

مسیر رفت و برگشت یکسان

$36 - 6 = 30$

$(1-4, 4-2) \checkmark$

مسیر رفت و برگشت متفاوت

علی می‌خواهد به میهمانی برود. علی سه پیراهن به رنگ‌های سیاه، سفید و خاکستری و دو شلوار دارد که یکی جین و دیگری کتان است و سه کلاه دارد که یکی سفید، یکی سیاه و دیگری طرح‌دار است. علی چند تیپ می‌تواند داشته باشد؟ (هر تیپ با تیپ دیگر متمایز است اگر حداقل یکی از اجزا (پیراهن، شلوار یا کلاه، متفاوت باشد)

P	S	K
①	①	①
پیراهن	شلوار	کلاه
②	②	②
③		③
۳	۲	۳
×	×	= 18

تیپ متفاوت $\{(P_1, S_1, K_1), (P_1, S_1, K_2), \dots, (P_n, S_n, K_n)\}$

۱۸

اگر داخل یک جعبه ۹، شماره از ۱ تا ۹ باشد. سه کاغذ را با چشمان بسته باهم برمی داریم؛ احتمال های زیر را حساب کنید.

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{10}{144} = \frac{5}{72}$$

هر سه عدد فرد باشد

$$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{6 \times 5}{144} = \frac{15}{72}$$

(فقط) دو عدد زوج باشد

حداقل یکی از اعداد فرد باشد

مقابل یک فرد : هر سه زوج باشد - همه حالات

$$1 - P(A') = P(A) \quad \frac{\binom{9}{3} - \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{9}{3}} - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{4}{144} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

احتمال مطلوب = احتمال نامطلوب

یکی از کاغذهایی که خارج کرده ایم (در سوال قبل) می بینیم، عددی فرد است؛ احتمال های زیر را بدست آورید.

هر سه عدد فرد باشد

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

دو عدد زوج باشد

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4 \times 4}{15} = \frac{8}{15}$$

یکی زوج و یکی فرد باشد

راه حل احتمال مکمل :

$$\begin{aligned} \text{احتمال هر دو فرد} + \text{احتمال هر دو زوج} &= 1 - \text{احتمال یکی زوج یکی فرد} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{15} + \frac{3}{15} \right) \\ &= 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

تعداد اعدادی با شماره‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ را در هر یک از قسمت‌های زیر بدست آورید.

(هر قسمت را در حالت مجاز تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام حساب کنید.)

بدون تکرار

تکرار مجاز

$$\textcircled{3} \times \textcircled{1} = 3 \quad \text{منقط} \\ \text{صفر رقم} \quad 3 + 6 = 9 \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{1} = 3 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد} \quad \boxed{12}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{2} = 6 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان نباشد}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{3} = 9 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان نباشد}$$

۰، ۱، ۲، ۳

$$\textcircled{3} \times \textcircled{2} \times \textcircled{1} \times \textcircled{1} = 6 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \boxed{15}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{4} \times \textcircled{4} \times \textcircled{1} = 48 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{چهار رقمی زوج}$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{2} \times \textcircled{1} \times \textcircled{1} = 4 \quad \text{۲ رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{4} \times \textcircled{4} \times \textcircled{1} = 48 \quad \text{۲ رقم} \\ \text{یکان} \quad \boxed{46}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{1} = 3 \quad \text{رقم یکان} \quad \boxed{3}$$

$$\textcircled{3} \times \textcircled{1} = 3 \quad \text{رقم یکان} \quad \text{باشد}$$

$$\textcircled{0} \times \textcircled{0} = 0 \quad \text{رقم یکان} \quad \text{باشد}$$

۰، ۲، ۳

$$\textcircled{3} \times \textcircled{4} \times \textcircled{4} \quad \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} \\ \text{تعداد اعداد سه رقمی دارای ۱ = ۱۸} \quad \text{تعداد اعداد سه رقمی} \\ \text{۴۸} \quad \text{۱۸} \quad \text{۳۰} \quad \text{۳ رقمی که ۱ یکی از ارقام آن باشد}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{3} \times \textcircled{2} = 6$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{1} \times \textcircled{2} = 4 \quad \boxed{14}$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{2} \times \textcircled{1} = 4$$

{ ۰، ۲، ۳ }

$$\textcircled{2} \times \textcircled{1} \times \textcircled{1} = 2 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{3} \times \textcircled{1} = 6 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{3} \times \textcircled{2} = 12 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

۲، ۳
۳، ۲

$$\textcircled{1} \times \textcircled{1} \times \textcircled{2} = 2 \quad \text{صفر رقم} \\ \text{یکان} \quad \text{باشد}$$

۱۸

فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

$$7!$$

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

$$\text{○ ○ } \boxed{\text{چ پ ژ}} \text{ ○ ○ } \quad 5! \times 3!$$

$$\text{○ } \boxed{\text{چ پ ژ}} \text{ ○ ○ ○ ○}$$

$$\text{○ } \boxed{\text{چ ژ پ}} \text{ ○ ○ ○ ○}$$

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

$$\boxed{5342} \text{ پ ژ } \quad \text{○ } \boxed{} \text{ ○ ○ ○ ○} \quad 4! \times 4!$$

$$\boxed{5324} \text{ پ ژ } \quad \text{○ } \boxed{} \text{ ○ ○ ○ ○}$$

$$\boxed{5324} \text{ پ گ ژ } \quad \text{○ } \boxed{} \text{ ○ ○ ○ ○}$$

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

$$\boxed{2345} \quad \boxed{\text{پ گ ژ}}$$

$$\text{○ ○ ○ ○} \quad \text{○ ○ ○ ○ ○} \quad 3! \times 4! \times 2!$$

$$\boxed{2345} \quad \boxed{\text{پ گ ژ}}$$

$$\boxed{\text{○ ○}}$$

محاسبه کنید با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟

$$\textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} = 4!$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} 2$$

$$1211$$

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{9!}{2! \times 2! \times 2! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 2! \times 2! \times 4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل،

از بین سه نوع گل مریم، رز و میخک، انتخاب کند.

(از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

میخک	مریم	رز
*	*	*
* * *		
	* * *	
		* * *
* *	*	
*	* *	
	*	* *
	* *	*
* *		*
*		* *

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline \end{array}$$

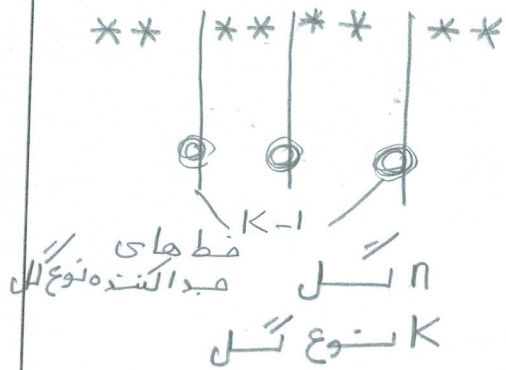
$$***$$

$$***$$

$$\frac{5!}{3! 2!} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! 2!}$$

$$\frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

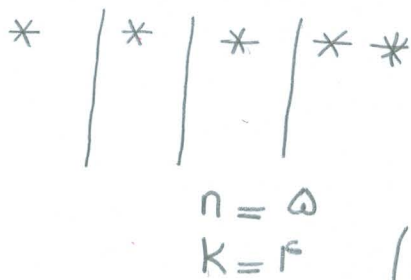
به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟



$$\frac{11!}{8! 3!} = \binom{11}{3}$$

$$\binom{n+(K-1)}{K-1} = \binom{8+(4-1)}{4-1} = \binom{11}{3}$$

به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟



بنا بر این ما باید
 ۵ گل از ۴ نوع گل
 انتخاب کنیم

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! 3!}$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ برابر است با

تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{\dots}{\dots} = \dots$

$n=7$
 $k=3$
 $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!}$
 $= \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2!7!} = 36$

کار در کلاس

معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.

$$(1 + x_1) + (1 + x_2) + (1 + x_3) = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad n=4$$

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$(0, 1, 3) \quad \boxed{6}$
 $(0, 2, 2) \quad \boxed{3}$
 $(0, 4, 0) \quad \boxed{3}$
 $(1, 1, 2) \quad \boxed{3}$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با

$$\binom{n-1}{k-1}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) = n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - k$$

$$\binom{n-k+k-1}{k-1} \rightarrow \binom{n-1}{k-1}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

۳ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد

به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_2 > 3$ باشد؟
 $(x_1 + 1) + x_2 + (x_3 + 4) + \dots + x_5 = 14$

x_1 : حداقل ۲

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 8$$

x_2 : حداقل ۴

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$$(2, 0, 4, 0, 8) = 14$$

$$(4, 1, 4, 0, 5) = 14$$

$$n = 8$$

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4}$$

$$K = 5$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$0, 0, 0, 0, 8$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$(2, 1, 0, 0, 5)$

فرض ۲

۴

۴ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$x_i \geq 1$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 1$$

$$x_4 \geq 1$$

$$x_5 \geq 1$$

حداقل
الک از هر
نوع یک

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) + (x_5 + 1) = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$n = 6, K = 5, \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

$$(0, 2, 1, 3, 0) + (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(1, 3, 2, 4, 1) = 11$$

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 + x_4 + 1 + x_5 + 1 = 12$$

۵ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد

$$x_1 \geq 1 \rightarrow x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 - 1 = y_1$$

$$x_2 \geq 1 \rightarrow x_2 - 1 \geq 0, x_1 = y_1 + 1$$

به شرط آنکه $x_5 > 2$ و $x_6 = 4$ باشد؟

پس وضعیت کل سوم، ترکیب متفاوتی ایجاد نمی کند

$$x_3 = 4$$

$x_5 \geq 3$ حداقل تعداد کل نوع پنجم، ۳ عدد

$$x_4 \geq 1 \rightarrow x_4 - 1 \geq 0$$

$$x_5 \geq 3 \rightarrow x_5 - 3 \geq 0$$

$$x_6 \geq 1, (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + x_3 + (x_4 + 1) + (x_5 + 3) + (x_6 + 1) = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 - 11 = 1$$

$$(1, 1, 0, 0, 0)$$

$$n = 1$$

$$K = 5$$

$$\binom{n+K-1}{K-1} = \binom{1+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

$$(2, 2, 3, 1, 3, 1) = 12$$

مربع های لاتین

سه مدرس به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۸-۱۰، ۱۰-۱۲ و ۱۲-۴ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس ها را در جدول مقابل به گونه ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات کلاس ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۴
A	احمدی	عباسی	کریمی
B	کریمی	احمدی	عباسی
C	عباسی	کریمی	احمدی

کریمی عباسی احمدی

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به دست آورید.

جلسات کلاس ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۴
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. (پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است. (ت) هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است.
- (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است. (b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس ها تدریس داشته است. (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است. (d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه ها تدریس داشته است.

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۲	۳	۴	۵	۱
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲

۲ با استدلال کلامی بگویید که

چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

a	b	c	d
d	a	b	c
c	d	a	b
b	c	d	a

سطر اول و دوم

d	a	b	c
a	b	c	d
c	d	a	b
b	c	d	a

چون با عوض شدن جای دو سطر با هم، شرط عدم تکرار اعداد در ستون‌ها و سطرها همچنان برقرار است (در هر سطر و در هر ستون همچنان هر عدد یک بار آمده)

«مربع لاتین چرخشی»

۱	۲	۳	...	...	...	$n-1$	n
n	۱	۲	۳	...	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
$n-2$	$n-1$	n	۱	۲	...	...	$n-3$
$n-3$	$n-2$	$n-1$	n	...	...	...	$n-4$
۲	۳	۴	...	...	...	۱	۲
۳	۴	۵	...	...	...	n	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

A

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

B

(الف)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

B, A متعامد است

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

A

(ب)

۱۳	<u>۲۱</u>	<u>۳۲</u>
<u>۳۲</u>	۱۳	<u>۲۱</u>
۲۱	۳۲	۱۳

B و A غیر متعامد است
متعامد نیستند

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

B

(پ)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

A

۱۳	<u>۲۲</u>	۳۱	<u>۴۴</u>
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۳۴	۴۱	۱۲	۲۳
<u>۲۲</u>	۳۳	<u>۴۴</u>	۱۱

B و A متعامد نیستند

۱) چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟ یک مربع لاتین

۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۳	۴	۵

۱

A و B دو به دو غیر متعامدند

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

۱	۳
۲	۱

۲) آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

۱۱	۲۲
۲۲	۱۱

خیر، مربع لاتین 2×2 مربع لاتین A و B غیر متعامدند

۲۱	۱۲
۱۲	۲۱

A

B

۳) بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بله

۴) آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟ بله

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

اگر A و B متعامد باشند
A و B متعامد است

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$$B' =$$

۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴
۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳

مربع لاتین

$$A =$$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$$B =$$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

B و B' متعامد نیستند
 A و B' متعامدند

a	b	c
c	a	b
b	c	a

A

$a \rightarrow b$
 $b \rightarrow c$
 $c \rightarrow a$

b	c	a
a	b	c
c	a	b

B

ab	bc	ca
ca	ab	bc
bc	ca	ab

$3 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 1$
 $4 \rightarrow 4$
 $1 \rightarrow 3$

همانطور که $A \perp A$
متعامد نیست اگر
محصول جابجایی از A

باشد $A \perp B$ هم متعامد نیست. نشان دهید:

اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است

a	b	c
c	a	b
b	c	a

A

a	c	b
c	b	a
b	a	c

B

aa	bc	cb
cc	ab	ba
bb	ca	ac

B و A متعامدند

جای a را b بگذاریم
جای c را a بگذاریم
جای b را c بگذاریم

$$A' =$$

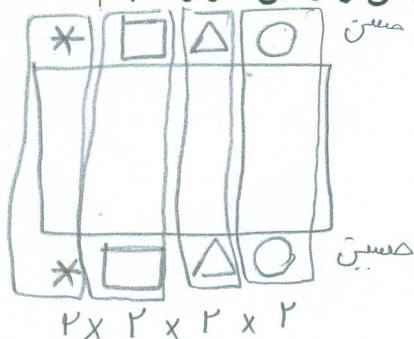
b	c	a
a	b	c
c	a	b

a	c	b
c	b	a
b	a	c

ba	cc	ab
ac	bb	ca
cb	aa	bc

B و A' متعامدند

۱۱ می خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



$$4! \times 2^4$$

۱۲ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت

چند رمزی که ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5!$$

۱۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را

می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم.

به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:



الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ $4!$



ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛ $4! \times 5!$

$$4! \times 5!$$



پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛ $4! \times 5!$

$$4! \times 5!$$



ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

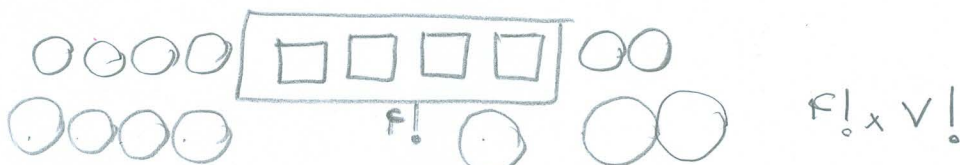


$$7! \times 3!$$



۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $7! \times 4!$ باشد.

به این طریق می توان ۴ دانش آموز دوازدهمی و ۶ دانش آموز یازدهمی در یک صف قرار گیرند به طوری که دانش آموزان دوازدهمی کنار هم باشند



۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2} = 60$$

۶ می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 3! \times 2!}$$

۷ ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = \binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!}$$

$$\binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

۸ به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$

$$n = 11 \quad k = 5 \quad \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$$

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 + x_4 + 1 + x_5 + 1 = 11$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 - 5 = 6$

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم:

$$x_1 + x_2 + 2 + x_3 + x_4 + x_5 + 4 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

$$\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_4 + 5 + x_5 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 6$$

$$n = 6 \quad k = 4 \quad \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 \geq 5 \rightarrow x_4 - 5 \geq 0$$

$$y_4 = x_4 - 5$$

$$x_4 = y_4 + 5$$

$$x_1 + x_2 + y_4 + 5 + x_5 = 11$$

۹ مطلوب است تعداد جواب های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط های داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$

$$x_i > 0, 1 \leq i \leq 5$$

$$x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$\binom{10}{4}$$

$$x_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) + (x_5 + 1) = 10$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \rightarrow y_2 = x_2 - 1 \rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 - 1 \geq 0 \rightarrow y_3 = x_3 - 1 \rightarrow x_3 = y_3 + 1$$

$$x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6$$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$

$$x_1 > 2, x_6 \geq 4$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 4 + x_6 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$$

$$\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ (1, 2, 0, 0, 2, 5) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & & & & 4 \\ (4, 2, 0, 0, 6, 0) \end{matrix}$$

$$ب) x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11 \quad x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$$

المطلوب

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 + x_4 + 1 + x_5 + 1 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$n = 6$$

$$k = 5$$

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (1, 1, 0, 1, 0) = 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1, 1, 1, 1, 1) = 11 \end{matrix}$$

$$ج) x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 7$$

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 + 1 + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 6$$

$$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 + 2 + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5$$

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (0, 1, 1, 0) \\ (0, 2, 1, 0) \end{matrix}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad x_2 = 1 \\ (1, 2, 1) \quad (1, 1, 2, 1)$$

$$د) x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 3$$

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 + 1 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \quad \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2}$$

$$x_2 = 2$$

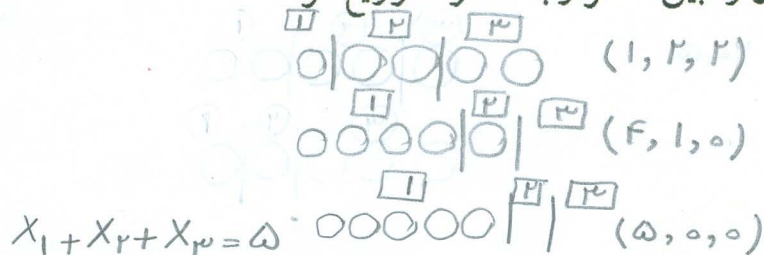
$$x_1 + 2 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \quad \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + 3 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (0, 1, 0, 0) = 3 \\ (1, 2, 0, 0) = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0, 0, 0) \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ 1, 0, 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0+3-1) \\ 3-1 \end{matrix} = \binom{2}{2} = 1$$

۱۰ به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟



$$\frac{V!}{5! \times 2!} = \frac{V \times 4 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 5$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3 \quad n=5 \quad k=3 \quad \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۱ به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم

هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$X_1 + 1 + X_2 + 1 + X_3 + 1 + X_4 + 1 = 8$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4$$

$$n=4 \quad k=4 \quad \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

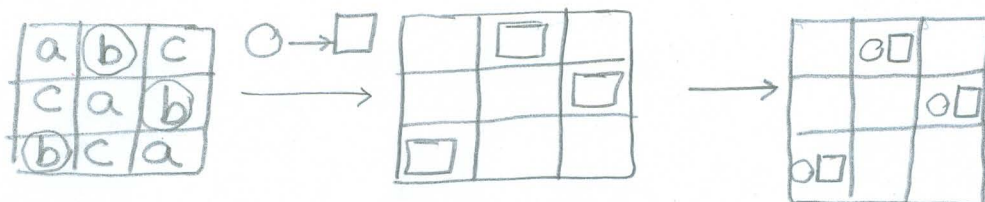
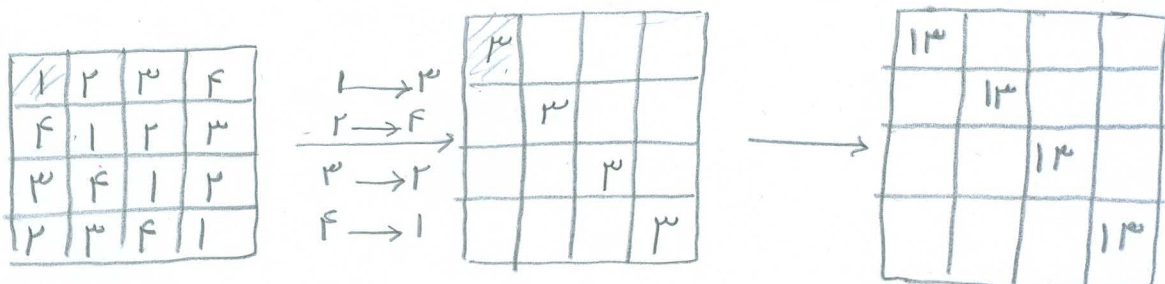
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 4$$

$(1, 0, 1, 1)$
 $(4, 0, 0, 0) = 4$

$$(2, 1, 3, 2) = 8 \quad (5, 1, 1, 1) = 8$$

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه

می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟ خیر، اعداد یکسان در مربع تلفیق نشده می باشد



۱۳ مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

آیا A و A_1 متعامدند؟

بله

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع

حاصل را A_2 بنامید. آیا A و A_2 متعامدند؟

خیر

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین،

همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟ خیر

A_2 با تعویض سطرهای A به دست آمده اما A متعامد نیست

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین،

همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟ خیر

A_1 با تعویض سطرهای A به دست آمده و با A متعامد است

۱۴ قرار است شش مدرس $T_1, T_2, \dots, T_6$ و T_6 در شش جلسه متوالی در

شش کلاس $C_1, C_2, \dots, C_6$ به گونه‌ای تدریس کنند

که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

کلاس جلسه ۸-۱۰ ۱۰-۱۲ ۱۲-۲ ۲-۴ ۴-۶ ۶-۸

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

C_1

C_2

C_3

C_4

C_5

C_6

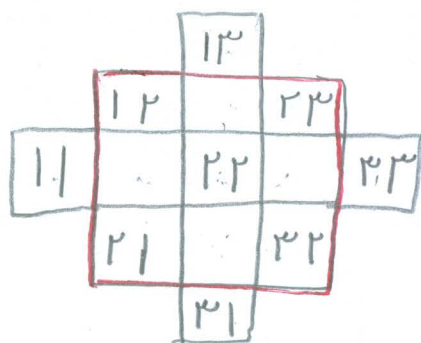
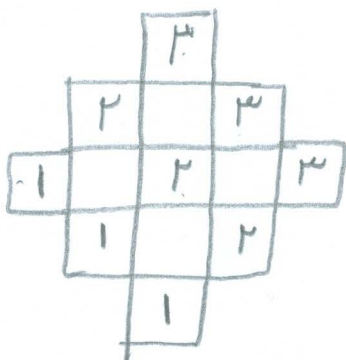
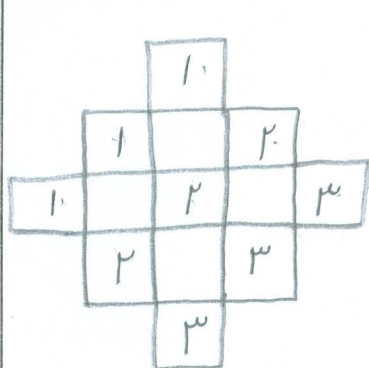
مثلاً مطابق جدول برنامه

معلم A_4 در جلسه دوم

(۱۰-۱۲) در کلاس C_2 ، کلاس

خارج.

15



1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	1	μ
μ	2	1
1	μ	2

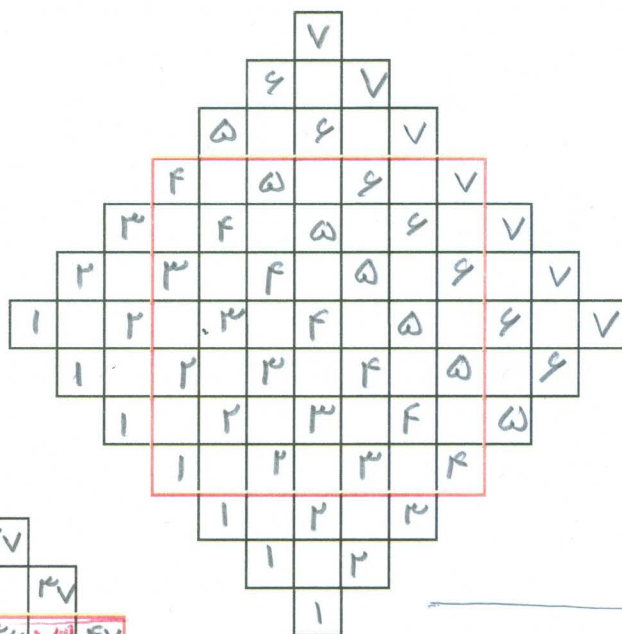
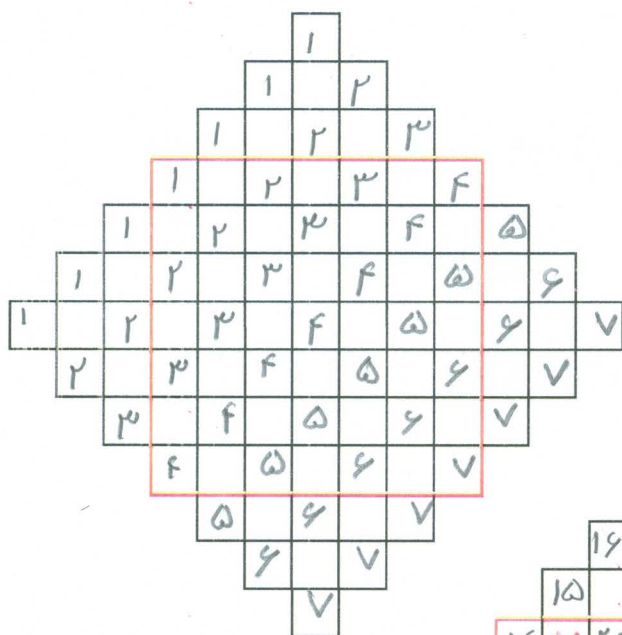
۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

A

9
متعامدند

B

مربع تافیه



1	Q	Y	G	W	V	F
Q	Y	G	W	V	F	1
Y	G	W	V	F	1	Q
G	W	V	F	1	Q	Y
W	V	F	1	Q	Y	G
V	F	1	Q	Y	G	W
F	1	Q	Y	G	W	V

F	I	Ω	P	g	μ	V
V	F	I	Ω	g	μ	P
μ	V	F	I	Ω	g	P
g	μ	V	F	I	Ω	P
P	g	μ	V	F	I	Ω
Ω	P	g	μ	V	F	I
I	Ω	P	g	μ	V	F

A

B

A و B متعلقہ ہیں

۱۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته

با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند

تلفیقی

به طوری که شرایط زیر برقرار باشد: 7×7 مربع متعامد

را باید درست

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛ آوریم

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

— برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید. مسیر و ماشین با شماره

۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
۵۷	۲۴	۹۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۲۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۹۱	۵۵	۵۲	۲۶	۹۳	۱۷	۷۴

راننده a, f, e, d, c, b, a

روز هفته

a b c d e f g

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

شنبه
یکشنبه
دوشنبه
سه شنبه
چهارشنبه
پنجشنبه
جمعه

a b c d e f g

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

A

B

روز هفته، راننده، مسیر روز هفته، راننده، ماشین

روز جمعه، ۹ با ماشین ۷، در مسیر ۴

