

# (( فصل سوم : ترکیبیات ( شمارش ) ))



## درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

### یادآوری و تکمیل

۱ نمره	دی ۹۷	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم ( متمایز ) از $A$ و سه رقم ( متمایز ) از $B$ باشد؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	۶ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند؟ به طوری که : الف : به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب : همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج : یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.
۱ نمره	تیر ۹۸	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که : الف : همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان در کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری که : الف : کتاب ها یکی در میان قرار گیرند؟ ب : کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم باشند؟
۱ نمره	خرداد ۹۹	۴ دانش آموز پایه‌ی دهم و ۳ دانش آموز پایه‌ی یازدهم، به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار گیرند. به طوری که : الف : هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب : همواره دانش آموزان پایه‌ی دهم کنار هم باشند.

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۷	با ارقام ۴ و ۳ و ۷ و ۸ و ۶ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که :	الف : اعداد زوج کنار هم باشند. ب : اعداد فرد کنار هم باشند.	دی ۹۹ انصره
۸	به سؤالات زیر، پاسخ کوتاه بنویسید. می خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸ و ۶ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آنها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی ک در آنها حروف کنار هم باشند.		خرداد ۱۴۰۰ انصره
۹	کوتاه پاسخ دهید : علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که : الف : علی و حسین کنار هم باشند. ب : ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.		شهریور ۱۴۰۰ انصره

معادلات حسابی

۱	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟		دی ۹۷ انصره
۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.		خرداد ۹۸ انصره
۳	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 12$ $x_1 > 2$ , $x_5 \geq 4$		تیر ۹۸ انصره ۱/۵
۴	الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد ؟ ب) اگر از هر ۴ نوع گل حداقل یکی انتخاب شود ، به چند طریق می توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد ؟		خرداد ۹۸ خ انصره ۲
۵	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4$ و $x_1 > 2$ را محاسبه کنید.		شهریور ۹۸ انصره
۶	معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب های صحیح و نامنفی به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ دارد؟ چرا؟		دی ۹۸ انصره

۱۳۵ نمره	خرداد ۹۹	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.
۱۱۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد، به شرط آن که $x_5 \geq 4$ و $x_2 > 2$ باشند.
۱۳۵ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 > 3$ و $x_1 \geq 1$ باشند؟
۱۱۵ نمره	دی ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آنکه $x_5 = 2$ و $x_2 > 2$ باشند.
۲ نمره	خرداد ۱۴۰۰	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.
۱۱۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که $x_4 \geq 4$ و $x_1 > 2$ باشد.

### جایگشت های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۹۸	با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟
۱ نمره	تیر ۹۸	۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.
۱۱۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱ و ۱ و ۱ و ۲ می توان ساخت برابر ..... است.
۱ نمره	دی ۹۸	با حروف کلمه‌ی «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می توان نوشت؟

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	با ارقام عدد ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟	۵
۱ نمره	۹۹ خرداد خ	با ارقام عدد ۱۱۳۲۸۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت. (ساده کردن پاسخ نهایی الزامی نیست.)	۶
۰/۷۵ نمره	۹۹ شهریور	هشت نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۷
۱ نمره	۱۴۰۰ شهریور	می خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟	۸

مربع های لاتین

۱/۵ نمره	۹۷ دی	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.	۲
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، بنویسید که چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟	۳
۰/۲۵ نمره	۹۸ تیر	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی $n$ وجود ندارد.	۴
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید.	۵

۱ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	<p>۶ برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱																				
۴	۲	۱	۳																																			
۳	۱	۲	۴																																			
۱	۴	۳	۲																																			
۲	۳	۴	۱																																			
۱ نمره	شهریور ۹۸	<p>۷ قرار است چهار مدرس <math>T_1</math> و <math>T_2</math> و <math>T_3</math> و <math>T_4</math> در چهار جلسه‌ی متوالی در چهار کلاس <math>C_1</math> و <math>C_2</math> و <math>C_3</math> و <math>C_4</math> به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.</p>																																				
۱/۷۵ نمره	دی ۹۸	<p>۸ بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین روبرو متعامدند؟ چرا؟</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲																		
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۹ مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ یک مربع لاتین به دست آورید.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> </table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																			
۴	۳	۲	۱																																			
۳	۴	۱	۲																																			
۱	۲	۳	۴																																			
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۱۰ در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین را بررسی کنید.</p> <p>الف:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <p>ب:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۳	۲	۱																																				
۱	۳	۲																																				
۲	۱	۳																																				
۲	۱	۳																																				
۱	۳	۲																																				
۳	۲	۱																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۱۱ قرار است سه کارگر <math>W_1</math> و <math>W_2</math> و <math>W_3</math> در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریزی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه ریزی کنید.</p>																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	<p>۱۲ یک مربع لاتین <math>4 \times 4</math> چرخشی رسم کنید.</p>																																				

۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.</p> <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۵/۵ نمره	شهریور ۹۹	یک مربع لاتین چرخشی $4 \times 4$ بنویسید.																		
۲ نمره	دی ۹۹	<p>مربع لاتین <math>A</math> را نظر بگیرید.</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ <p>الف: با اعمال یک جایگشت روی درایه های مربع لاتین <math>A</math>، مربع لاتین <math>B</math> را تولید کنید.</p> <p>ب: متعامد بودن دو مربع لاتین <math>A</math> و <math>B</math> را بررسی کنید.</p>																		
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>مربع لاتین <math>A</math> را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع <math>A</math> را جابجا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را <math>B</math> نامگذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین <math>A</math> و <math>B</math> را بررسی کنید.</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$																		
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>الف: تمام مربع های لاتین <math>2 \times 2</math> را بنویسید.</p> <p>ب: آیا دو مربع لاتین <math>2 \times 2</math> متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.</p>																		

## درس ۲: روش هایی برای شمارش

### اصل شمول و عدم شمول

۲ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود).
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	چند عدد طبیعی مانند $n$ به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند و بر ۴ بخش پذیر نباشند).

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	۴ به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	۵ بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ( $1 \leq n \leq 400$ ) چند عدد وجود دارد که: الف) بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۶ چند عدد طبیعی مانند $n$ به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
۰/۲۵ نمره	دی ۹۸	۷ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۲ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی برابر ۶ است.
۱/۷۵ نمره	دی ۹۸	۸ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی را به دست آورید.
۱ نمره	خرداد ۹۹	۹ به چند طریق می توان ۴ خودکار را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)
۱ نمره	خرداد ۹۹	۱۰ در بین اعداد طبیعی مانند $n$ به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	۱۱ چند عدد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۷ بخش پذیر نباشند؟
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	۱۲ الف: چند تابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی می توان تعریف کرد؟ ب: چند تابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۶ عضوی وجود دارد؟
۱ نمره	شهریور ۹۹	۱۳ ۸ نفر را برای یک برنامه‌ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است. (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱ نمره	شهریور ۹۹	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ی ۳ عضوی به یک مجموعه ی ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)
۱ نمره	شهریور ۹۹	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.
۱/۵ نمره	دی ۹۹	مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید، چند عدد در $S$ وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ( $1 \leq n \leq 200$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند، ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند.

اصل لانه کبوتری

۱/۵ نمره	دی ۹۷	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزان چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟



۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	<p>۴ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.</p> 
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل <math>6 \times 8</math> قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آنها از هم، کمتر از <math>\sqrt{8}</math> باشد.</p>
۱ نمره	دی ۹۸	<p>۶ مجموعه‌ی اعداد <math>A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}</math> را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه‌ی ۴۳ عضوی از <math>A</math> دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۷ در یک اردوی دانش آموزی، حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لاقلاً ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟</p>
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	<p>۸ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای کشتی باشند تا مطمئن باشیم، لاقلاً ۲۰ نفر آنها روز تولدشان در هفته یکسان است؟</p>
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>۹ نشان دهید در یک خانواده‌ی ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.</p>
۱ نمره	دی ۹۹	<p>۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن همایش باید حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیر تکراری است.</p>
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>۱۱ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چندگلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم، گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟</p>
۰/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>۱۲ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه‌ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقلاً ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟</p>

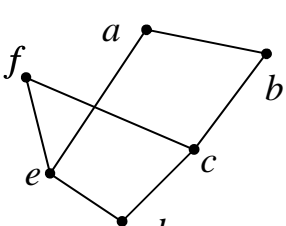
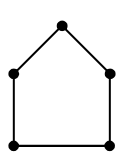
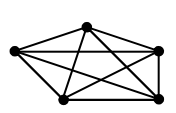
پاسخ سوالات موضوعی نهایی

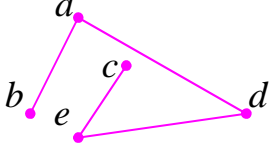
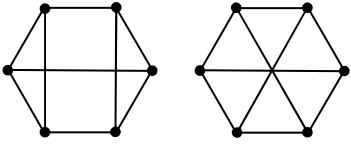
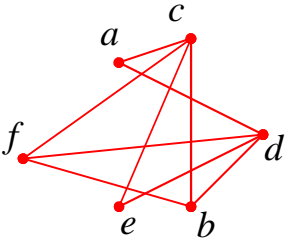
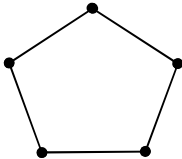
فصل دوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

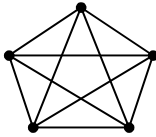
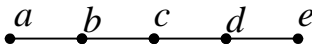
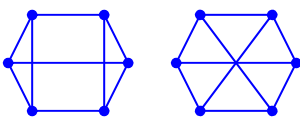
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس $a$ $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از $f$ به $a$ مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با $A$ و مجموع درجات رئوس زوج را با $B$ نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی $D$ زوج است. از طرفی عدد $B$ نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید.) در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون $A$ مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

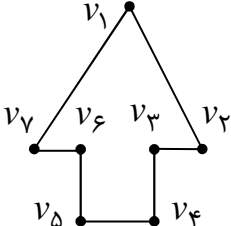
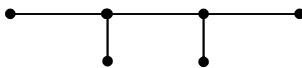
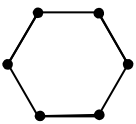
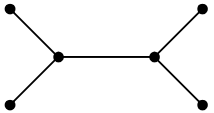
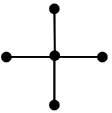
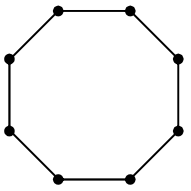
$N_G(b) = \{a, b, c\}$ : ب	الف: $p = 6$ و $q = 7$	۷
ج:		
$\overline{G} \text{ تعداد یالهای } G + \text{تعداد یال های } \overline{G} = \frac{p(p-1)}{2}$		
$\overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = \frac{6(6-1)}{2} \rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = 15$		
$\rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G = 8$		
لذا مجموع درجه های رئوس $\overline{G}$ برابر ۱۶ است.		
$\frac{n(n-1)}{2}$		۸
الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$		۹
ج: درجهی رأس $c$ در گراف مکمل ۳ خواهد بود.		ب: $abca$ یا $bcd b$
		نادرست
		$n$ رأسی
		الف:
		$N_G[b] = \{a, b, c\}$ : ب
		ج: $b, a, e, f, c, d$
		الف:
ب:		
		نادرست
ت: $x = c$	ب: $q = 6$	الف: $\delta(G) = 1$
$N_G[b] = \{b, a, c, d\}$ : پ		۱۵

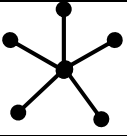
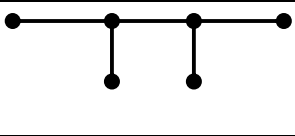
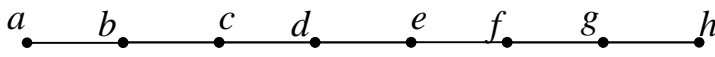
۱۶	الف : گرافی از مرتبه‌ی $n$ که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد $k$ ، $(0 \leq k \leq n)$ باشد. ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.
۱۷	الف : $a, c, d, b, e, a$ ب :
	
۱۸	الف : دو برابر ب : $k$
۱۹	الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ ب : دور به طول ۴ $(abeda)$ یا $(adeba)$ پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$
۲۰	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$
۲۱	الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$ ب : رسم یک گراف کافی است.
	
۲۲	به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.
۲۳	الف : مرتبه ب : مسیر پ : $\frac{n(n-1)}{2}$ ت : دور
۲۴	الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ ب : $bafeb$ پ : ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$
	
۲۵	الف :
	
	ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.

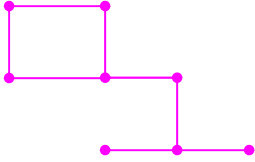
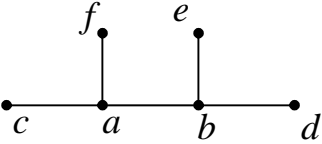
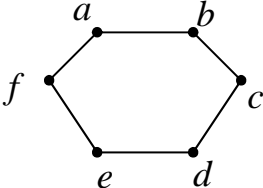
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : $cab c$ و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 	
۲۸	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$ <p>و این یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.</p>	
۲۹	الف : $abcd$ و $bcde$	
۳۰	 <p>الف : رئوس    ب : طوقه    پ : مجاور    ت : زوج</p>	
۳۱	الف : ۳	
۳۲	ب : ۴	
۳۳	الف : گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با مساوی و برابر با عدد $k$ باشد.	
۳۴	ب : ۳	
۳۵	پ : بله	
۳۳	الف) $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (ب) رأس $f$ ، ۵ (پ) $abecda$ (ت) خیر	
۳۴	الف : $abgc$ ب : $bc d gb$ پ : ۵	
۳۵	ت : خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است و هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد.    ث : $N_G(f) = \{\}$	
۳۵	$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \rightarrow p = 6$ 	

درس ۲: مدل سازی با گراف

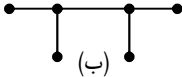
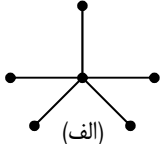
احاطه گری

۱	الف : $\{b, e, h, k\}$	ب : $\{a, c, e, g, i, k\}$
۲	الف : ۳ رأس	ب : $p - ۱$
۳	الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب : $\gamma(G) = 3$ ج : $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$	
۴	الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند $a_1$ را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	
۵	الف : ب :	 
۶	۲	
۷	الف: درست	ب : درست
۸	الف : ب : ج :	  

$\Delta(G) = 4$ $\text{حداکثر تعداد یالها} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\text{حداقل تعداد یالها} = n - 1 = 5 - 1 = 4$	۹
<p>الف: <math>\{f, d\}</math>      ب: <math>\{e, f, g, h\}</math></p>	۱۰
<p>۱۱ الف) زیر مجموعه‌ی <math>D</math> از مجموع رئوس گراف <math>G</math> را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در <math>D</math> باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در <math>D</math> مجاور باشد.          ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف <math>G</math> را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .</p>	۱۱
<p>الف) <math>\{c, f, h, j\}</math>      ب) <math>\{a, b, f, h\}</math>      پ) <math>\{c, f, h\}</math></p>	۱۲
<p>۱۳ الف) <math>\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2</math>          از طرفی مجموعه‌ی <math>\{a, g\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین <math>\gamma(G) = 2</math> است و مجموعه‌ی <math>\{a, g\}</math> همان ۲- مجموعه است .          ب) <math>\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3</math>          از طرفی مجموعه‌ی <math>\{b, f, j, h\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین <math>\gamma(G) = 4</math> است و مجموعه‌ی <math>\{b, f, j, h\}</math> همان ۴- مجموعه است .</p>	۱۳
<p>الف)  (الف)</p> <p>ب)  (ب)</p>	۱۴
<p>الف: </p> <p>ب: <math>\{a, d, g\}</math>      ج: <math>\{a, d, e, h\}</math></p>	۱۵
<p>۱۶ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت <math>\{a, h, f, b\}</math> اکنون به حذف رأس <math>a</math> از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.</p>	۱۶
<p>۱۷ الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند <math>\{c, f, h, g\}</math>          ب: احاطه گر مینیمال مانند <math>\{c, f, g\}</math></p>	۱۷

<p>الف : برای مثال اگر <math>n = 10</math> ، رسم <math>C_3</math> یا <math>P_3</math> کافی است. در این گراف ها <math>\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4</math></p> <p>ب : در گرافی مشابه گراف زیر <math>\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2</math> است ولی <math>\gamma(G) = 3</math> می باشد.</p> 	<p>۱۸</p>
<p>الف : مینیمم ب : مینیمال</p>	<p>۱۹</p>
<p>الف : گراف روبرو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا <math>\{a, b\}</math> است.</p>  <p>ب : گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از <math>\{e, b\}</math> و <math>\{f, c\}</math> و <math>\{a, d\}</math></p> 	<p>۲۰</p>
<p>برای گراف مورد سؤال داریم:</p> $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ <p>از طرفی مجموعه‌ی <math>\{g, h, d\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف، لذا: <math>\gamma(G) \leq 3</math> بنابراین <math>\gamma(G) = 3</math></p>	<p>۲۱</p>
<p><math>\Delta = 3</math> و <math>n = 8</math> و <math>\left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)</math></p> <p>مجموعه‌های <math>\{a, g\}</math> یا <math>\{b, h\}</math> یا <math>\{c, e\}</math> یا <math>\{d, f\}</math> مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی هستند.</p> <p>بنابراین <math>\delta(G) = 2</math></p>	<p>۲۲</p>
<p>یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.</p>	<p>۲۳</p>



<p>با توجه به اینکه <math>\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2</math>، لذا داریم <math>\delta(G) \geq 2</math></p> <p>پس حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی <math>\{e, c\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه گر است. پس <math>\lambda(G) = 2</math></p>	۲۴
<p>الف: <math>\{1, 6, 4\}</math> یا <math>\{1, 5, 7\}</math></p> <p>ب: <math>2 = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor</math> بنابراین <math>\gamma(G) \geq 2</math> از سوی دیگر <math>\{2, 5\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا <math>\gamma(G) \leq 2</math> از این دو نتیجه می توان نوشت که <math>\gamma(G) = 2</math></p>	۲۵
<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، مجموعه‌ی احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مجموعه‌ی احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم عضوهای بیشتری داشته باشد.</p>	۲۶
<p><math>D = \{a, c, i, d\}</math> توجه داشته باشید که این مجموعه تنها جواب این مسئله نمی باشد.</p>	۲۷
<p>طبق قضیه داریم: <math>2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{10}{4+1} \right\rfloor</math> از طرفی مجموعه‌ی <math>D = \{e, j\}</math> یک مجموعه‌ی احاطه گراست. لذا <math>\gamma(G) \leq 2</math> بنابراین <math>\gamma(G) = 2</math></p>	۲۸
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> </div>	۲۹
<p>طبق قضیه‌ی داریم <math>2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor</math>. از طرفی مجموعه‌ی <math>D = \{b, e\}</math> یک مجموعه احاطه گر است. لذا <math>\gamma(G) \leq 2</math> . بنابراین <math>\gamma(G) = 2</math></p>	۳۰
<p><math>D = \{a, e, c, h\}</math></p>	۳۱

### تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴
الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۵
الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۶
الف: $3! \times 3!$ ب: $2! \times 4!$	۷
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 7!$	۸
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 5!$	۹

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $\xrightarrow{x_i \geq 1, \quad i=1,2,3,4} x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$ $\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>= 210</math></p>	۲

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\frac{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4}{\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12}$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126</math></p>	۳
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>(ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. <math>8 - 4 = 4</math> شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با: <math>\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35</math></p>	۴
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: <math>\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252</math></p>	۵
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + (y_3 + 4) + x_4 + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: <math>\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math></p>	۶
$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, \quad x_2 \geq 2, \quad x_5 \geq 4$ $x_2 = y_2 + 2 \quad \text{و} \quad x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ <p>جواب صحیح و نامنفی <math>\binom{5+5+1}{5-1} = \binom{9}{4}</math></p>	۷

<p> <math>x_1, x_3, x_4 \geq 1</math> و <math>x_2 \geq 3</math> و <math>x_5 \geq 4</math>  <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17</math>  <math>\rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 4) = 17</math>  <math>\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7</math>                      تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math>.                      روش دوم:                 </p> <p> <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17</math>  <math>x_2 &gt; 2 \rightarrow x_2 - 2 &gt; 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2</math>  <math>x_5 &gt; 3 \rightarrow x_5 - 3 &gt; 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3</math>  <math>\rightarrow x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 3) = 17</math>  <math>\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 12</math>                      تعداد جواب های طبیعی <math>\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math>.                 </p>	۸
<p> <math>y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1</math>  <math>y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4</math>  <math>x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 1) + x_2 + (y_3 + 4) + \dots + x_5 = 14</math>  <math>\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + \dots + x_5 = 9</math>                      تعداد جوابهای صحیح و نامنفی <math>= \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715</math> </p>	۹
<p> <math>y_2 = x_2 - 3</math> , <math>y_2 \geq 0</math> و <math>x_5 = 2</math>  <math>x_1 + (y_2 + 3) + x_3 + x_4 + 2 + x_5 = 17 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12</math>                      تعداد جواب های صحیح و نامنفی <math>\binom{16}{4} =</math> </p>	۱۰

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \quad : \quad x_1 \geq 1, x_4 > 3, x_6 = 1$ $y_1 = x_1 - 1 : y_1 \geq 0$ $y_4 = x_4 - 4 : y_4 \geq 0$ $y_6 = 1$ $y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 + 1 = 12 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$ جواب $\binom{10}{4} = 210$	۱۱
$y_1 = x_1 - 3 ; y_1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 3$ $y_4 = x_4 - 4 ; y_4 \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + (y_4 + 4) + x_5 = 15$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$ جواب $\binom{12}{4} = 495$	۱۲

جایگشت های با تکرار

$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$	۱
روش اول $\binom{9}{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$ روش دوم $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 1260$	۲
۴	۳
$\binom{8}{4,2} = \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 1 \times 2} = 14$	۴
$\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 42$	۵

$\binom{10}{4,1,3,2} = \frac{10!}{4! \times 1! \times 3! \times 2!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۶
$\binom{8}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 280$ روش دوم: $\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = 280$ روش اول:	۷
$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}$ یا $\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$	۸

مربع های لاتین

<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> $\Rightarrow$ <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱																					
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															
۲	۱	۳																																															
۳	۲	۱																																															
۱	۳	۲																																															
۱۲	۳۱	۲۳																																															
۳۳	۲۲	۱۱																																															
۲۱	۱۳	۳۲																																															
۱۵	۲																																																
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> $\Rightarrow$ <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr> </table>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														
درست	۴																																																
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۵																														
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin: 0 20px;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; 1 \rightarrow 3 \\ &amp; 2 \rightarrow 2 \\ \Rightarrow &amp; 3 \rightarrow 4 \\ &amp; 4 \rightarrow 1 \end{aligned}</math> </div> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۶
۴	۲	۱	۳																														
۳	۱	۲	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۲	۳	۴	۱																														
۱	۲	۳	۴																														
۴	۳	۲	۱																														
۳	۱	۴	۲																														
۲	۴	۱	۳																														
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">۱</td> <td style="padding: 0 10px;">۲</td> <td style="padding: 0 10px;">۳</td> <td style="padding: 0 10px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>C_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_4</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>C_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_3</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>C_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_2</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>C_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_1</math></td> </tr> </table>		۱	۲	۳	۴	$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	۷							
	۱	۲	۳	۴																													
$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$																													
$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$																													
$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$																													
$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$																													
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۲</td> </tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	این دو مربع متعامدند، زیر در جدول تلفیقی شده از این دو مربع، عدد تکراری وجود ندارد.	۸																						
۱۱	۲۲	۳۳																															
۳۲	۱۳	۲۱																															
۲۳	۳۱	۱۲																															
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	با استفاده از جایگشت مناسب مربع لاتین جدید خواهیم داشت. ( مثلاً با جایگشت $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$ مربع جدید به صورت مقابل در خواهد آمد	۹															
۳	۲	۱	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۴	۱	۲	۳																														
۲	۳	۴	۱																														

۱۰ ابتدا در هر مورد، مربع های داده شده را تلفیق می کنیم. ( برهم نهی)

الف :

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامدند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود ندارد.

ب :

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامد نیستند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود دارد.

۱۱ برای برنامه ریزی این مسئله کافی است، دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع  $A$  مربوط به ماشین ها و مربع  $B$  مشخص کنندهی ایاف است.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 $\Rightarrow$ 

	$W_1$	$W_2$	$W_3$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 $\Rightarrow$ 

	$W_1$	$W_2$	$W_3$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع تلفیقی، عدد سمت چپ هر درایه نشان دهندهی ماشین و عدد سمت راست آن نشان دهندهی نوع ایاف است.



<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۲		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<p style="text-align: center;">در مربع تلفیقی مقابل ، اعداد دو رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع داده شده متعامد هستند.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱۳									
۱۱	۲۲	۳۳																	
۳۲	۱۳	۲۱																	
۲۳	۳۱	۱۲																	
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۴		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: left;"> <p>۱ → ۳ ۲ → ۱ ۳ → ۲    ((الف))</p> </div> <div style="text-align: center;"> <math>B = </math> <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <p>((ب))</p> <table border="1"> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr> <tr><td>۱۳</td><td>۳۲</td><td>۲۱</td></tr> </table> </div> </div> <p style="text-align: center;">متعامد نیستند، زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۲۱	۱۳	۳۲	۳۲	۲۱	۱۳	۱۳	۳۲	۲۱	۱۵
۱	۳	۲																	
۲	۱	۳																	
۳	۲	۱																	
۲۱	۱۳	۳۲																	
۳۲	۲۱	۱۳																	
۱۳	۳۲	۲۱																	
$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \ominus B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix}$	۱۶																		

الف :	۱۷
$\begin{array}{ c c } \hline ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$	
<p>ب : فقط دو مربع لاتین <math>2 \times 2</math> متعامد وجود دارد که متعامد نیستند. زیرا در مربعی تلفیقی آنها عدد تکراری وجود دارد.</p>	
$\begin{array}{ c c } \hline ۱۲ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$	

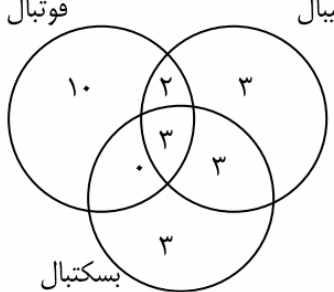
### درس ۲: روش هایی برای شمارش

#### اصل شمول و عدم شمول

۱	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند <math>A</math> به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند <math>B</math></p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S  =  B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}  =  \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $=  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$
۲	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{90}{2} \right] + \left[ \frac{90}{3} \right] - \left[ \frac{90}{6} \right]$ $= 45 + 30 - 15 = 60$

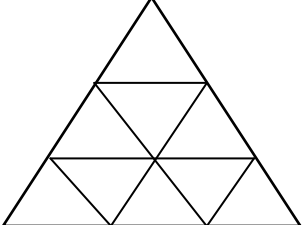
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{200}{4} \right] + \left[ \frac{200}{3} \right] - \left[ \frac{200}{12} \right]$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند <math>A</math> به یک مجموعه ی سه عضوی مانند <math>B</math> است. طوری که برد این توابع همه اعضای <math>B</math> باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از <math>A</math> نسبت داده شود).</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> <p><math> A  = 4</math> و <math> B  = 3</math></p> $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۴
<p>مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را <math>A</math> و مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را <math>B</math> می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[ \frac{400}{4} \right] = 100 \text{ و } n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57 \text{ و } n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B - A)$ $= 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۵
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{350}{4} \right] + \left[ \frac{350}{6} \right] - \left[ \frac{350}{12} \right]$ $= 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۶
درست	۷

<p> <math>1 \leq j \leq 3</math> , <math>A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}</math>  <math>A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}</math> و <math>B = \{b_1, b_2, b_3\}</math>  <math> S  = 3^4</math> و <math> A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4</math> و <math> A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1^4</math>  و <math> A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0^4 = 0</math>.  <math> A_1 \cup A_2 \cup A_3  =  A_1  +  A_2  +  A_3  -  A_1 \cap A_2  -  A_1 \cap A_3  -  A_2 \cap A_3  +  A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45</math>  <math> \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - 45 = 36</math>  روش دوم :  <math> A  = 4</math> و <math> B  = 3</math>  <math>3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36</math> </p>	۸
<p> تعداد حالت های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی مجموعه ای ۸ عضوی </p> $({}_8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$	۹
<p> <math>A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \rightarrow  A  = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16</math>  <math>B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \rightarrow  B  = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10</math>  <math>A \cap B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3</math>  <math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 16 + 10 - 3 = 23</math> </p>	۱۰
<p> <math> S  = 200</math> و <math> A  = \left[ \frac{200}{2} \right] = 100</math> و <math> B  = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28</math> و <math> A \cap B  = \left[ \frac{200}{14} \right] = 14</math>  <math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 100 + 28 - 14 = 114</math>  <math> \overline{A \cap B}  = \overline{A \cup B} =  S  -  A \cup B  = 200 - 114 = 86</math> </p>	۱۱

<p>الف : <math>3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 45 = 36</math>      ب : <math>(6)_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360</math></p>	<p>۱۲</p>
<p>حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی است که برابر با <math>8^2</math> است.</p>	<p>۱۳</p>
<p><math>P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120</math></p>	<p>۱۴</p>
<p><math> F \cup V  =  S  -  F \cup V  = 25 - (15 + 14 - 9) = 5</math></p>	<p>۱۵</p>
<p><math>A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in Z\} \rightarrow n(A) = \left[ \frac{400}{5} \right] = 80</math></p> <p><math>B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in Z\} \rightarrow n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57</math></p> <p><math>A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in Z\} \rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{35} \right] = 11</math></p> <p><math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 80 + 57 - 11 = 126</math></p> <p><math> \overline{A \cup B}  =  S  -  A \cup B  = 400 - 126 = 274</math></p>	<p>۱۶</p>
<p>فوتبال      والیبال</p>  <p>بسکتبال</p> <p>فقط در یک رشته = <math>10 + 3 + 3 = 16</math></p>	<p>۱۷</p>
<p>الف) <math>3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36</math>      ب) <math>P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680</math></p>	<p>۱۸</p>

$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 4k\} \rightarrow  A  = \left[ \frac{200}{4} \right] = 50$ $B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 7k\} \rightarrow  B  = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 28k\} \rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{200}{28} \right] = 7$ $ A \cap B'  =  A  -  A \cap B  = 50 - 7 = 43$	۱۹
---	----

**اصل لانه کبوتری**

$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{array}{r} 6 \quad   \quad 4 \\ 4 \quad   \quad 1 \\ \hline 2 \\ 1+1=2 \end{array}</math> </div> <div> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. (<math>n = 365</math>)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با <math>kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936</math></p> </div> </div>	۱
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <math display="block">7 \times 12 = 84</math> <p>تعداد لانه ها :</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز</p> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{array}{r} 505 \quad   \quad 84 \\ 504 \quad   \quad 6 \\ \hline 1 \end{array}</math> </div> <div> <p><math>6+1=7</math></p> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقل ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> </div> </div>	۲
<p>در این مسئله <math>k + 1 = 7</math> یعنی <math>k = 6</math> است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی <math>n = 12</math> است. طبق اصل لانه کبوتری ، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر <math>kn + 1 = (6 \times 12) + 1 = 73</math> باشد.</p>	۳
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع ( با ضلع هایی به طول ۱ واحد ) تقسیم می کنیم.</p> <p>حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله ی بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است .</p> </div> </div>	۴

تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر	تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه	۵
طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند $A$ و $B$ در یک لانه جای می گیرند. پس :		
$\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$		
تعداد کبوترها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:		۶
$\begin{matrix} \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} \\ ۱,۸۴ & ۲,۸۳ & ۳,۸۲ & \dots & ۴۲,۴۳ \end{matrix}$		
چنانچه قرار باشد، کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعشان ۸۵ است.		
در این مسئله $k + 1 = 7$ پس $k = 6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = (6)(12) + 1 = 73$ باشد.		۷
$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ و $n = 7$ تعداد لانه ها		۸
$nk + 1 = (7)(19) + 1 = 133 + 1 = 134$ تعداد کبوترها		
بنابراین حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن باشند.		
هر فصل تولد را لانه فرض می کنیم که برابر ۴ است. همچنین هر فرد خانواده را معادل کبوتر قرار می دهیم که برابر ۵ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر ( دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می گیرند. به عبارتی دیگر در یک فصل به دنیا آمده اند.		۹
$k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$ ، $۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲$ تعداد لانه ها		۱۰
$۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$ تعداد کبوترها		
$k + 1 = 5 \rightarrow k = 4$		۱۱
$kn + 1 = 54 \rightarrow 4n = 53$		
$n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$		

$$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19 \rightarrow kn + 1 = 19(17) + 1 = 134$$

۱۲

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

@amerimath