

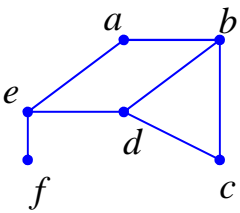
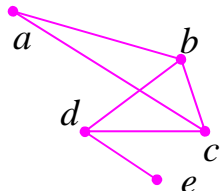
((فصل دوّم : گراف و مدل سازی))

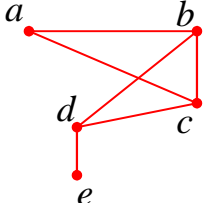
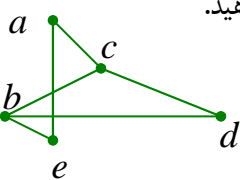
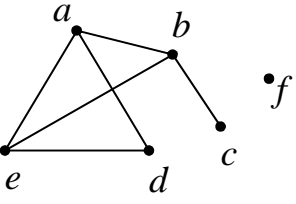


درس ۱: معرفی گراف

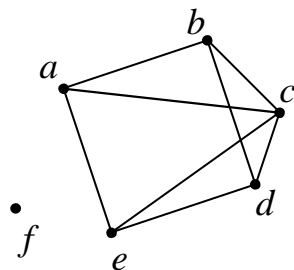
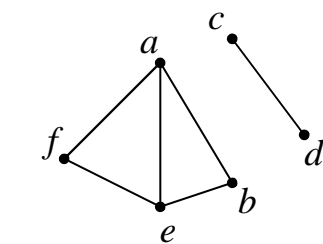
تعاریف و اثبات ها

۰/۵ نمره	دی ۹۷	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیکسبرگ یک گراف ساده است.</p> <p>ب : گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.</p>
۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>با توجه به گراف شکل مقابل (گراف G) به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>پ : درجه ی رأس a در گراف G را تعیین کنید.</p> <p>ت : آیا گراف G همبند است؟ چرا؟</p> <p>ث : یک زیر گراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف G با مجموعه ی رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه ی یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف : مجموعه ی همسایگی های باز رأس d را بنویسید.</p> <p>ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید.</p> <p>ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را تعیین کنید.</p>

۰/۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>یک گراف کامل K_8 رأسی ، یال دارد.</p>	۶
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	 <p>الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید. ب: مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید. ج: مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p>	۷
۰/۵ نمره	تیر ۹۸	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است.</p>	۸
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	 <p>الف) مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها را بنویسید. ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید. ج) درجه‌ی رأس e را در گراف \bar{G} مشخص کنید.</p>	۹
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>	۱۰
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p>	۱۱
۲ نمره	شهریور ۹۸	<p>گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های زیر را در نظر بگیرید.</p> $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ <p>الف: نمودار گراف را رسم کنید. ب: $N_G[b]$ را مشخص کنید. ج: یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p>	۱۲

۱۳	شهریور ۹۸	در هر مورد یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k - منتظم رسم کنید، به طوری که: الف: بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.
۱۴	دی ۹۸	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد رأس های زوج هر گراف، عددی فرد است.
۱۵	دی ۹۸	گراف G به صورت مقابل است را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب: اندازه‌ی گراف را تعیین کنید. پ: مجموعه‌ی همسایگی بسته رأس b را بنویسید. ت: اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد. x کدام رأس است؟
		
۱۶	دی ۹۸	هر یک از موارد زیر را پاسخ دهید. الف: گراف k - منتظم از مرتبه‌ی n را تعریف کنید. ب: آیا گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۵ وجود دارد؟ دلیل خود را بنویسید.
۱۷	دی ۹۸	اگر G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: دوری به طول ۵ مشخص کنید. ب: مکمل گراف G را رسم کنید.
		
۱۸	خرداد ۹۹	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف: مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. ب: در یک گراف k - منتظم، ماگزیمم درجه‌ی رأس برابر با است.
۱۹	خرداد ۹۹	گراف G را در نظر گرفته و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب: یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ: یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.
		
۲۰	۹۹	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \overline{G} برابر ۱۲ است. مرتبه‌ی گراف G را مشخص کنید.

۱ نمره	۹۹ خرداد	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. الف : اندازه‌ی گراف G را بیابید. ب : نمودار گراف G را رسم کنید.	۲۱
۱ نمره	۹۹ خرداد	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۲۲
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف : تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب : گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است. ت : گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲۳
۲ نمره	۹۹ خرداد	گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : دوری به طول ۴ برای b بنویسید. پ : مکمل گراف G را رسم کنید. ت : $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.	۲۴
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل را ارائه کنید. الف : $p=5$ و $r=2$ ب : $p=7$ و $r=3$	۲۵
۲/۵ نمره	۹۹ شهریور	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر را پاسخ دهید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : سه دور به طول ۳ بنویسید. پ : ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت : $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث : آیا گراف G همبند است.	۲۶



شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید. سپس گراف را رسم کنید.	۲۷
شهریور ۹۹	شماره ۱	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۲۸
شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۲۹
دی ۹۹	شماره ۱	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف: مرتبه‌ی گراف نشان دهنده‌ی تعداد گراف می باشد. ب: اگر یک یال، یک رأس به خود آن رأس وصل کند، این یال را می نامیم. پ: دو یال را می نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند. ت: تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.	۳۰
دی ۹۹	شماره ۲	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید. الف: درجه‌ی رأس e در گراف مکمل G چند است؟ ب: تمام دوره‌های موجود در گراف G را بنویسید. پ: $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۳۱
دی ۹۹	شماره ۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: گراف k -منتظم را تعریف کنید. ب: گراف P_7 را رسم کنید. پ: آیا گراف‌های C_n منتظم هستند.	۳۲
خرداد ۱۴۰۰	شماره ۲	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگترین درجه در گراف \bar{G} را با اعضا مشخص کنید. پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟	۳۳
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۲/۳۵	با توجه به گراف G در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه‌ی رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید. ت) مجموعه‌ی $N_G(f)$ را معین کنید.	۳۴

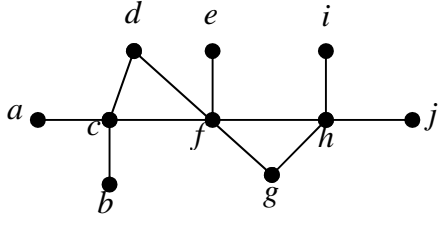
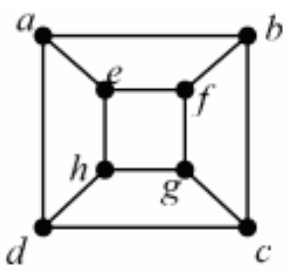
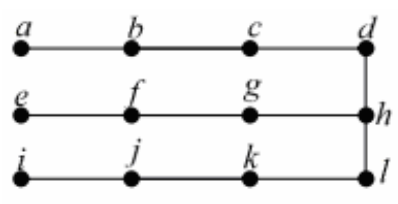
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۲۵	گراف G ، ۳- منتظم است و اندازه‌ی آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس های گراف است. مرتبه‌ی گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.	۳۵
-------------	-----------	---	----

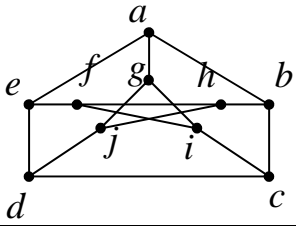
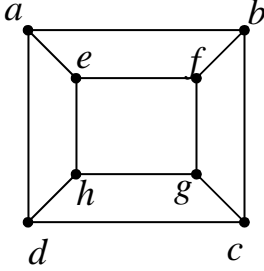
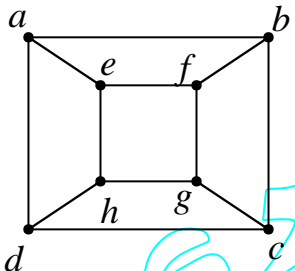
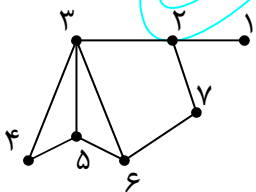
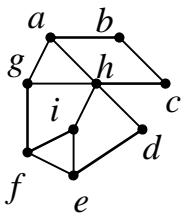
درس ۲: مدل سازی با گراف

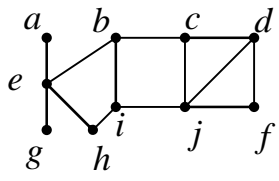
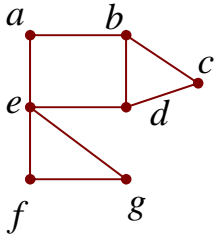
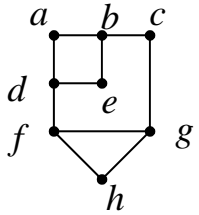
احاطه گری

دی ۹۷	نمره ۱	<p>گراف P_7 در شکل مقابل رسم شده است.</p>  <p>الف: یک γ - مجموعه از این گراف مشخص کنید.</p> <p>ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱
خرداد ۹۸	نمره ۱	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>الف: در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است.</p> <p>ب: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p داشته باشیم، $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.</p>	۲
خرداد ۹۸	نمره ۱/۵	<p>گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.</p> <p>ب: عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.</p> <p>ج: دو مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p>	۳
خرداد ۹۸	نمره ۱/۵	<p>الف: ثابت کنید هر مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال تبدیل کرد.</p> <p>ب: در گراف روبرو یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p> 	۴

۱ نمره	۹۸ خرداد ۹۸	<p>الف: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>
۵/۱ نمره	۹۸ تیر ۹۸	<p>جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>عدد احاطه گری گراف C_n برابر می باشد.</p>
۵/۱ نمره	۹۸ تیر ۹۸	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف: یک $\gamma -$ مجموعه در گراف P_5، دارای ۲ عضو است.</p> <p>ب: تعداد کمتر از $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ رأس نمی توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر ۹۸	<p>در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.</p> <p>الف) یک گراف ۲ منتظم از مرتبه‌ی ۸، که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۵ رأسی که $\gamma -$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد.</p> <p>ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر ۹۸	<p>اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد، در این صورت $V(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف G می تواند داشته باشد را مشخص کنید.</p>
۱ نمره	۹۸ تیر ۹۸	<p>در گراف شکل مقابل:</p> <p>الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم مشخص کنید.</p> <p>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>
۱ نمره	۹۸ خرداد ۹۸	<p>مفاهیم زیر را تعریف کنید.</p> <p>الف) مجموعه‌ی احاطه گر</p> <p>ب) عدد احاطه گری</p>

<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال بنویسید.</p> <p>پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم بنویسید.</p> 	<p>۱۲</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ-مجموعه بنویسید.</p> <p>الف)</p>  <p>ب)</p> 	<p>۱۳</p>
<p>نمره ۱</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج ک</p>	<p>الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن یک باشد.</p> <p>ب) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن ۲ بوده و مجموعه‌ی احاطه‌گری مینیمم آن یکتا باشد.</p>	<p>۱۴</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>شهریور ۹۸</p>	<p>الف : گراف P_8 را رسم کنید.</p> <p>ب : یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	<p>۱۵</p>

۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه گری گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.</p> 	۲۱
۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه گری گراف زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p> 	۲۲
۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.</p>	۲۳
۱/۵ نمره	۹۹ شهریور	<p>عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید.</p> 	۲۴
۲ نمره	۹۹ دی	<p>در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است: الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب: عدد احاطه گری G را تعیین کنید.</p> 	۲۵
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>تفاوت بین مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.</p>	۲۶
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۲۷

<p>۱/۵ نمره</p>	<p>خرداد ۱۴۰۰</p>	<p>عدد احاطه گری شکل زیر را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.</p> 	<p>۲۸</p>
<p>۱/۵ نمره</p>	<p>خرداد ۱۴۰۰</p>	<p>الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی دو باشد، رسم کنید.</p>	<p>۲۹</p>
<p>۱/۵ نمره</p>	<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>با ارائه‌ی راه حل، عدد احاطه گری گراف مقابل را تعیین کنید.</p> 	<p>۳۰</p>
<p>۱ نمره</p>	<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	<p>۳۱</p>

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

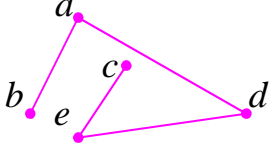
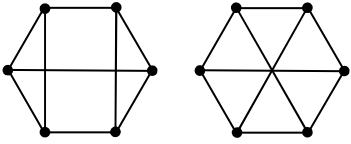
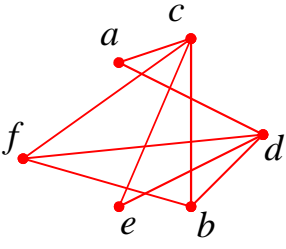
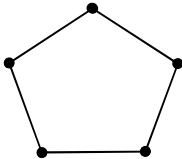
فصل دوّم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

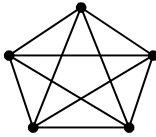
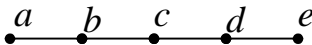
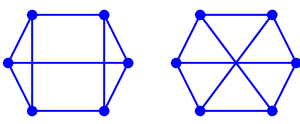
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس a $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید). در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

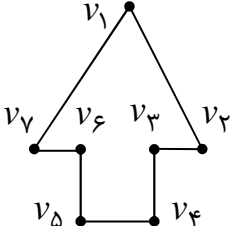
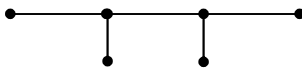
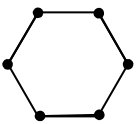
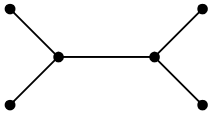
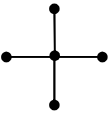
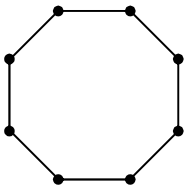
$N_G(b) = \{a, b, c\}$	الف: $p = 6$ و $q = 7$ ج:	۷
$\overline{G} \text{ تعداد یالهای } G + \text{تعداد یال های } \overline{G} = \frac{p(p-1)}{2}$		
$\overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = \frac{6(6-1)}{2} \rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = 15$		
$\rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G = 8$		
لذا مجموع درجه های رئوس \overline{G} برابر ۱۶ است.		
$\frac{n(n-1)}{2}$		۸
الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$		۹
ج: درجهی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.		ب: $abca$ یا $bcd b$
نادرست		۱۰
n رأسی		۱۱
الف:		۱۲
	ب: $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ج: b, a, e, f, c, d	
	ب:	الف:
نادرست		۱۴
ت: $x = c$	ب: $q = 6$	الف: $\delta(G) = 1$
ب: $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$		۱۵

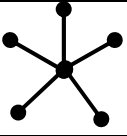
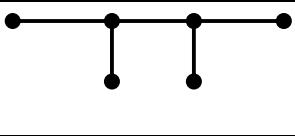
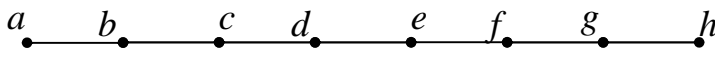
<p>الف : گرافی از مرتبه n که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k، $(0 \leq k \leq n)$ باشد.</p> <p>ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.</p>	۱۶
<p>الف : a, c, d, b, e, a</p> <p>ب :</p> 	۱۷
<p>الف : دو برابر</p> <p>ب : k</p>	۱۸
<p>الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$</p> <p>ب : دور به طول ۴ $(abeda)$ یا $(adeba)$</p> <p>پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$</p>	۱۹
<p>$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$</p>	۲۰
<p>الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$</p> <p>ب : رسم یک گراف کافی است.</p> 	۲۱
<p>به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.</p>	۲۲
<p>الف : مرتبه</p> <p>ب : مسیر</p> <p>پ : $\frac{n(n-1)}{2}$</p> <p>ت : دور</p>	۲۳
<p>الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$</p> <p>ب : $bafeb$</p> <p>پ :</p> <p>ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$</p> 	۲۴
<p>الف :</p>  <p>ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.</p>	۲۵

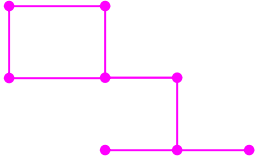
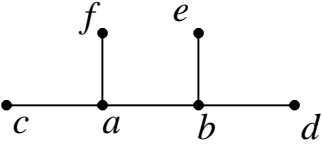
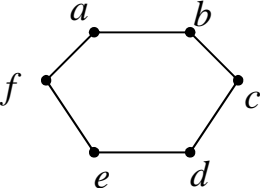
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : $cab c$ و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 	
۲۸	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$ <p>و این یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.</p>	
۲۹	الف : $abcd$ و $bcde$	
۳۰	 <p>الف : رئوس ب : طوقه پ : مجاور ت : زوج</p>	
۳۱	الف : ۳	
۳۲	ب : ۴	
۳۳	الف : گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با مساوی و برابر با عدد k باشد.	
۳۴	ب : ۳	
۳۵	پ : بله	
۳۳	الف : $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (ب) رأس f ، ۵ (پ) $abecda$ (ت) خیر	
۳۴	الف : $abgc$ ب : $bc d gb$ پ : ۵	
۳۵	ت : خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است و هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. ث : $N_G(f) = \{\}$	
۳۵	$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \rightarrow p = 6$ 	

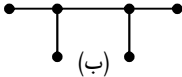
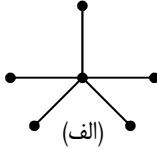
درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

۱	الف : $\{b, e, h, k\}$	ب : $\{a, c, e, g, i, k\}$
۲	الف : ۳ رأس	ب : $p - ۱$
۳	الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب : $\gamma(G) = ۳$ ج : $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$	
۴	الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	
۵	الف : ب :	 
۶	۲	
۷	الف: درست	ب : درست
۸	الف : ب : ج :	  

$\Delta(G) = 4$ $\text{حداکثر تعداد یالها} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\text{حداقل تعداد یالها} = n - 1 = 5 - 1 = 4$	۹
<p>الف: $\{f, d\}$ ب: $\{e, f, g, h\}$</p>	۱۰
<p>۱۱ الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد. ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف G را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .</p>	۱۱
<p>الف) $\{c, f, h, j\}$ ب) $\{a, b, f, h\}$ پ) $\{c, f, h\}$</p>	۱۲
<p>۱۳ الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه‌ی $\{a, g\}$ همان ۲- مجموعه است . ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$ از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان ۴- مجموعه است .</p>	۱۳
<p>الف)  (الف)</p> <p>ب)  (ب)</p>	۱۴
<p>الف: </p> <p>ب: $\{a, d, g\}$ ج: $\{a, d, e, h\}$</p>	۱۵
<p>۱۶ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.</p>	۱۶
<p>۱۷ الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$ ب: احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$</p>	۱۷

<p>الف : برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم C_3 یا P_3 کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$</p> <p>ب : در گرافی مشابه گراف زیر $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.</p> 	<p>۱۸</p>
<p>الف : مینیمم ب : مینیمال</p>	<p>۱۹</p>
<p>الف : گراف روبرو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است.</p>  <p>ب : گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از $\{e, b\}$ و $\{f, c\}$ و $\{a, d\}$</p> 	<p>۲۰</p>
<p>برای گراف مورد سؤال داریم:</p> $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{g, h, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف، لذا: $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$</p>	<p>۲۱</p>
<p>$\Delta = 3$ و $n = 8$ و $\left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)$</p> <p>مجموعه‌های $\{a, g\}$ یا $\{b, h\}$ یا $\{c, e\}$ یا $\{d, f\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی هستند.</p> <p>بنابراین $\delta(G) = 2$</p>	<p>۲۲</p>
<p>یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.</p>	<p>۲۳</p>

<p>با توجه به اینکه $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$، لذا داریم $\delta(G) \geq 2$</p> <p>پس حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. پس $\lambda(G) = 2$</p>	۲۴
<p>الف: $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$</p> <p>ب: $2 = \left\lceil \frac{7}{4+1} \right\rceil$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ از این دو نتیجه می توان نوشت که $\gamma(G) = 2$</p>	۲۵
<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، مجموعه‌ی احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مجموعه‌ی احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم عضوهای بیشتری داشته باشد.</p>	۲۶
<p>$D = \{a, c, i, d\}$ توجه داشته باشید که این مجموعه تنها جواب این مسئله نمی باشد.</p>	۲۷
<p>طبق قضیه داریم: $2 \leq \gamma(G) = \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil$ از طرفی مجموعه‌ی $D = \{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گراست. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$</p>	۲۸
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> </div>	۲۹
<p>طبق قضیه‌ی داریم $2 \leq \gamma(G) = \left\lceil \frac{7}{4+1} \right\rceil$. از طرفی مجموعه‌ی $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.</p>	۳۰
<p>$D = \{a, e, c, h\}$</p>	۳۱

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

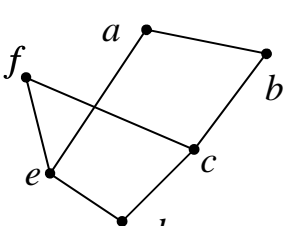
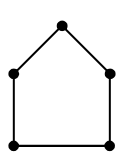
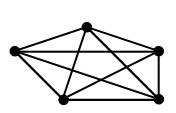
پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

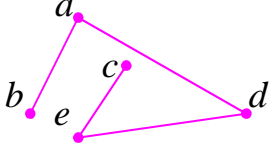
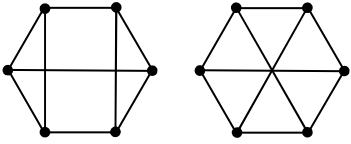
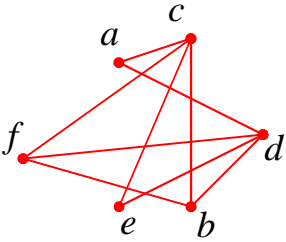
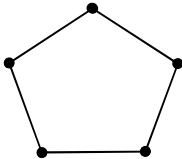
فصل دوّم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

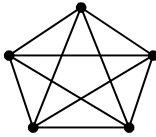
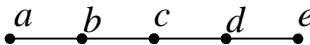
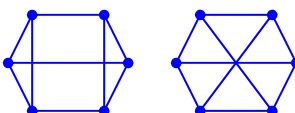
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس a $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید). در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

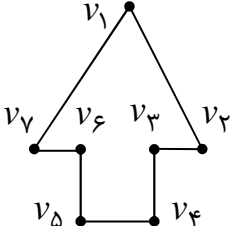
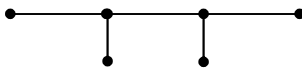
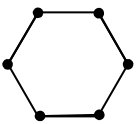
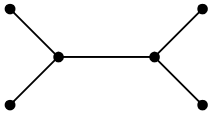
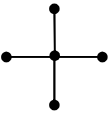
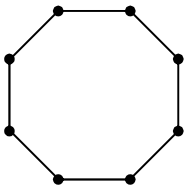
$N_G(b) = \{a, b, c\}$	الف: $p = 6$ و $q = 7$	۷
ج:		
$\overline{G} \text{ تعداد یالهای گراف } G + \text{تعداد یال های گراف } \overline{G} = \frac{p(p-1)}{2}$		
$\overline{G} \text{ تعداد یال های گراف } G + 7 = \frac{6(6-1)}{2} \rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های گراف } G + 7 = 15$		
$\rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های گراف } = 8$		
لذا مجموع درجه های رئوس گراف \overline{G} برابر ۱۶ است.		
$\frac{n(n-1)}{2}$		۸
الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$		۹
ج: درجه‌ی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.		ب: $abca$ یا $bcd b$
		نادرست
		n رأسی
		الف:
		$N_G[b] = \{a, b, c\}$
		ج: b, a, e, f, c, d
		الف:
ب:		
		نادرست
ت: $x = c$	ب: $q = 6$	الف: $\delta(G) = 1$
$N_G[b] = \{b, a, c, d\}$		۱۵

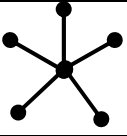
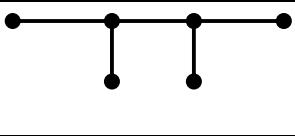
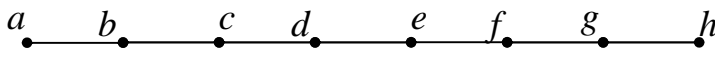
۱۶	الف : گرافی از مرتبه‌ی n که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k ، $(0 \leq k \leq n)$ باشد. ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.
۱۷	الف : a, c, d, b, e, a ب :
	
۱۸	الف : دو برابر ب : k
۱۹	الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ ب : دور به طول ۴ $(abeda)$ یا $(adeba)$ پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$
۲۰	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$
۲۱	الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$ ب : رسم یک گراف کافی است.
	
۲۲	به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.
۲۳	الف : مرتبه ب : مسیر پ : $\frac{n(n-1)}{2}$ ت : دور
۲۴	الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ ب : $bafeb$ پ : ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$
	
۲۵	الف :
	
	ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.

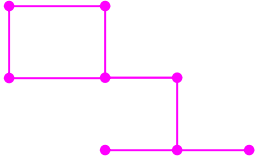
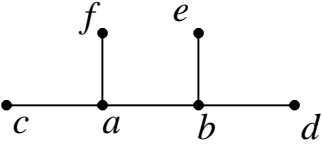
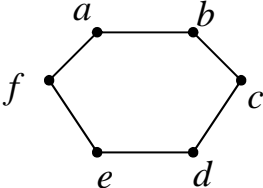
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : $cab c$ و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 	
۲۸	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$ <p>و این یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.</p>	
۲۹	الف : $abcd$ و $bcde$	
۳۰	 <p>الف : رئوس ب : طوقه پ : مجاور ت : زوج</p>	
۳۱	الف : ۳	
۳۲	ب : ۴	
۳۳	الف : گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با مساوی و برابر با عدد k باشد.	
۳۴	ب : ۳	
۳۵	پ : بله	
۳۳	الف) $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (ب) رأس f ، ۵ (پ) $abecda$ (ت) خیر	
۳۴	الف : $abgc$ ب : $bc d gb$ پ : ۵	
۳۵	ت : خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است و هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. ث : $N_G(f) = \{\}$	
۳۵	$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \rightarrow p = 6$ 	

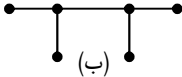
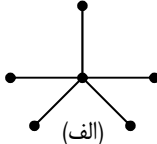
درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

۱	الف : $\{b, e, h, k\}$	ب : $\{a, c, e, g, i, k\}$
۲	الف : ۳ رأس	ب : $p - ۱$
۳	الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب : $\gamma(G) = 3$ ج : $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$	
۴	الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	
۵	الف : ب :	 
۶	۲	
۷	الف: درست	ب : درست
۸	الف : ب : ج :	  

$\Delta(G) = 4$ $\text{حداکثر تعداد یالها} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\text{حداقل تعداد یالها} = n - 1 = 5 - 1 = 4$	۹
<p>الف: $\{f, d\}$ ب: $\{e, f, g, h\}$</p>	۱۰
<p>۱۱ الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد. ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف G را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .</p>	۱۱
<p>الف) $\{c, f, h, j\}$ ب) $\{a, b, f, h\}$ پ) $\{c, f, h\}$</p>	۱۲
<p>۱۳ الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه‌ی $\{a, g\}$ همان 2-مجموعه است. ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$ از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان 4-مجموعه است.</p>	۱۳
<p>الف)  (الف)</p> <p>ب)  (ب)</p>	۱۴
<p>الف: </p> <p>ب: $\{a, d, g\}$ ج: $\{a, d, e, h\}$</p>	۱۵
<p>۱۶ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.</p>	۱۶
<p>۱۷ الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$ ب: احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$</p>	۱۷

<p>الف : برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم C_3 یا P_3 کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$</p> <p>ب : در گرافی مشابه گراف زیر $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.</p> 	<p>۱۸</p>
<p>الف : مینیمم ب : مینیمال</p>	<p>۱۹</p>
<p>الف : گراف روبرو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است.</p>  <p>ب : گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از $\{e, b\}$ و $\{f, c\}$ و $\{a, d\}$</p> 	<p>۲۰</p>
<p>برای گراف مورد سؤال داریم:</p> $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{g, h, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف، لذا: $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$</p>	<p>۲۱</p>
<p>$\Delta = 3$ و $n = 8$ و $\left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)$</p> <p>مجموعه‌های $\{a, g\}$ یا $\{b, h\}$ یا $\{c, e\}$ یا $\{d, f\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی هستند.</p> <p>بنابراین $\delta(G) = 2$</p>	<p>۲۲</p>
<p>یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.</p>	<p>۲۳</p>

<p>با توجه به اینکه $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$، لذا داریم $\delta(G) \geq 2$</p> <p>پس حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. پس $\lambda(G) = 2$</p>	۲۴
<p>الف: $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$</p> <p>ب: $2 = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا</p> <p>$\gamma(G) \leq 2$ از این دو نتیجه می توان نوشت که $\gamma(G) = 2$</p>	۲۵
<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، مجموعه‌ی احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مجموعه‌ی احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم عضوهای بیشتری داشته باشد.</p>	۲۶
<p>$D = \{a, c, i, d\}$ توجه داشته باشید که این مجموعه تنها جواب این مسئله نمی باشد.</p>	۲۷
<p>طبق قضیه داریم: $2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{10}{4+1} \right\rfloor$ از طرفی مجموعه‌ی $D = \{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گراست. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$</p>	۲۸
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> </div>	۲۹
<p>طبق قضیه‌ی داریم $2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor$. از طرفی مجموعه‌ی $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.</p>	۳۰
<p>$D = \{a, e, c, h\}$</p>	۳۱

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir