

# سوالات موضوعی نهایی

## ((ریاضیات گسسته))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

آخرین نسخه: دی ۱۴۰۰

تهیه کننده: جابر عامری



عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

# (( فصل اول : آشنایی با نظریه‌ی اعداد ))



## درس ۱ : استدلال ریاضی

### استدلال ریاضی

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. اگر $k$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح باشند و $ab$ عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.	۲
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف : مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب : برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۳
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	گزاره‌ی درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف : مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب : اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۴
۱ نمره	شهریور ۹۹	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف : برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ ، داریم : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ب : اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ پ : اگر $a, b \in R$ داریم : $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ت : حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۵
۰/۵ نمره	دی ۹۹	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۶
۰/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف : حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب : هیچ عدد صحیحی مانند $x$ و $y$ وجود ندارند که رابطه‌ی $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.	۷

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۸	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
---	--	-------------	--------

**اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها ( روش اشباع )**

۱			
۲			

**اثبات غیر مستقیم**

۱	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره
۲	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید، اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۴	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت $\alpha - \beta$ گنگ است.	دی ۹۹	۱/۵ نمره

**اثبات بازگشتی / گزاره‌های هم ارز**

۱	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ( گزاره‌های هم ارز ) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $xy + x + y \geq x^2 + y^2 + 1$	دی ۹۷	۱ نمره
۲	ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ( گزاره‌های هم ارز ) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره

۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. برای دو عدد حقیقی $x$ و $y$ نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۴
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	برای هر سه عدد حقیقی $x$ و $y$ و $z$ ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۵
۱ نمره	دی ۹۸	به روش بازگشتی، ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۶
۱ نمره	خرداد ۹۹	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$	۷
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	ثابت کنید اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۸
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	به روش بازگشتی، ثابت کنید حاصل هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی با نصف مجموع مربعات آنها است.	۹

## درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

### عاد کردن و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۱
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	اگر عددی مانند $k$ در $Z$ باشد به طوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 \mid 25$	۲
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 \mid b^3$ آنگاه $a \mid b$	۳
۱ نمره	دی ۹۸	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $4k + 9 \mid a$ و $6k + 14 \mid a$ صدق کند، مقدار $a$ را بیابید.	۴

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	۵ اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a$ بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۳a + ۳$ بر ۸ را به دست آورید.
۱ نمره	۹۹ خرداد	۶ اگر $n \in N$ و $n   ۹k + ۷$ و $n   ۷k + ۶$ ثابت کنید $n = ۱$ یا $n = ۵$
۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	۷ اگر $a   ۵m - ۲$ و $a   ۳m + ۱$ ، برای $a$ چند جواب طبیعی وجود دارد؟
۱/۲۵ نمره	۹۹ شهریور	۸ فرض کنیم $a$ و $n$ دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a   ۳n + ۴$ و $a   ۲n + ۳$ . نشان دهید: $a = ۱$
۰/۵ نمره	۱۴۰۰ خرداد	۹ جاهای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. دو عدد $a$ و $b$ اعدادی صحیح و $a$ مخالف صفر است. اگر $a   b$ آنگاه عدد ..... شمارنده‌ی عدد ..... است.
۰/۲۵ نمره	۱۴۰۰ شهریور	۱۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a   b$ و $n$ و $m$ دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آنگاه $a^n   b^n$
۱ نمره	۱۴۰۰ شهریور	۱۱ اگر $a > ۱$ ، $a   ۹k + ۴$ و $a   ۵k + ۳$ ، ثابت کنید $a$ عددی اول است.

**بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد**

۰/۲۵ نمره	۹۷ دی	۱ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	۲ در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[۱۲, (۶, ۸)]$ برابر ..... خواهد شد.
۰/۲۵ نمره	۹۸ خرداد	۳ حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ $([m^۲, m], m^۵) = \dots$ الف) $m$ ب) $m^۰$ ج) $m^۵$ د) $m^۲$

شهریور ۹۸ نمره ۰/۵	۴	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. ..... و $\forall m > 0$ ۲) ۱) $a c$ و $b c$
دی ۹۸ نمره ۰/۲۵	۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a b$ ، آنگاه $[a, b] =  b $
دی ۹۸ نمره ۱	۶	فرض کنید $a$ عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.
خرداد ۹۹ نمره ۱	۷	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ داشته باشیم، $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم $a$ و $b$ دو عدد ..... هستند. ب: اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با ..... است.
خرداد ۹۹ نمره ۰/۲۵	۸	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2 - 1$ را بیابید.
دی ۹۹ نمره ۰/۲۵	۹	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی $a$ و $b$ ، اگر $a b$ آنگاه $[a, b] =  b $
دی ۹۹ نمره ۱/۲۵	۱۰	اگر $a$ عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a + 4, 2a + 3)$ را به دست آورید.
خرداد ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵	۱۱	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. عدد $m$ یک عدد صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با ..... است.
شهریور ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵	۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a b$ آنگاه $(a, b) = a$

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $2 + a   b$ در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ را بر ۸ بیابید.
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	اگر باقی مانده ی تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد $-127$ بر ۱۵ باقیمانده برابر ..... و خارج قسمت ..... است.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	اگر باقی مانده ی تقسیم $a$ بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد $a$ را بر ۳۰ بیابید.
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	اگر باقی مانده ی تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده ی $2a - 1$ تقسیم بر ۳۱ را به دست آورید.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۹	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد؛ آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ( $k \in W$ ) نوشته می شود.
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد $m$ و $n$ بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5n - 2m$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.
۱ نمره	دی ۹۹	اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد $a$ و $b$ بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5b - 2a$ بر ۱۷ را بیابید.
۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.

افراز مجموعه ی اعداد صحیح

۱	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k - 1$ نوشت. ( $k \in Z$ )
۲		

### درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

#### همنهشتی و ویژگی های آن

۱	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $10 + 12 \times (1000)^{13}$ بر ۷ را به دست آورید.
۲	خرداد ۹۸	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟
۳	خرداد ۹۸ خارج ک	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \equiv b$ و $n   m$ آنگاه $a \equiv b$ ب: باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.
۴	خرداد ۹۸ خ	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال ..... است.
۵	شهریور ۹۸	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.
۶	دی ۹۸	باقی مانده‌ی تقسیم $13^{22}$ را بر ۱۷ به دست آورید.
۷	دی ۹۸	ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه‌ی هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $m$ ، اگر $a \equiv b$ آنگاه $ac \equiv bc$
۸	خرداد ۹۹	باقی مانده‌ی تقسیم $7^{30}$ بر ۱۵ را به دست آورید.



سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

شهریور ۹۹	شماره ۱/۲۵	رقم یکان عدد $7 + 2^{11}$ را به دست آورید.	۹
شهریور ۹۹	شماره ۱	فرض کنیم $m \in N$ و $a, b \in Z$ ، اگر $a \equiv b^m$ و $n \in N$ ، ثابت کنید $a^n \equiv b^n$	۱۰
دی ۹۹	شماره ۱/۲۵	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + 38^{36}$ را بر ۴ به دست آورید.	۱۱
خرداد ۱۴۰۰	شماره ۰/۲۵	باقی مانده‌ی تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.	۱۲
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a \equiv b^m$ باشد، آنگاه باقی مانده‌ی تقسیم دو عدد $a$ و $b$ بر $m$ مساوی اند.	۱۳
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۱	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یک عدد $9a + 6$ را به دست آورید.	۱۴

معادله‌ی همنهشتی

دی ۹۷	شماره ۱	معادله‌ی همنهشتی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
تیر ۹۸	شماره ۱	جواب عمومی معادله‌ی $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.	۲
دی ۹۸	شماره ۰/۲۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, m)   b$	۳
خرداد ۹۹	شماره ۱/۲۵	معادله‌ی هم نهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۴

۵/۵ نمره	دی ۹۹	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b)   m$ معادله‌ی هم‌نهشتی	۵
۱ نمره	دی ۹۹	معادله‌ی هم‌نهشتی $۸x \equiv ۲۰ \pmod{۱۲}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۶
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	معادله‌ی $۷x \equiv ۱ \pmod{۴}$ را حل کنید.	۷
۲۵/۰ نمره	شهریور ۱۴۰۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. منظور از حل معادله‌ی هم‌نهشتی، پیدا کردن همه‌ی جواب‌های حقیقی است که در معادله- $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.	۸

### معادله‌ی سیاله

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله‌ی هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را بدست آورید.	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادله‌ی هم‌نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۳
۱/۵ نمره	دی ۹۸	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را بدست آورید.	۴
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله‌ی سیاله‌ی $۴x + ۳y = ۱۹$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله‌ی سیاله دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله‌ی سیاله‌ی داده شده را بیابید.	۵
۱ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی سیاله‌ی $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید.	۶

۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	معادله سیاله‌ی $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۷
-------------	----------------	--	---

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

@amerimath

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴
الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۵
الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۶
الف: $3! \times 3!$ ب: $2! \times 4!$	۷
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 7!$	۸
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 5!$	۹

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $\xrightarrow{x_i \geq 1, \quad i=1,2,3,4} x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$ $\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>= 210</math></p>	۲

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\frac{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4}{\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12}$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126</math></p>	۳
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>(ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. <math>8 - 4 = 4</math> شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با: <math>\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35</math></p>	۴
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: <math>\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252</math></p>	۵
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + (y_3 + 4) + x_4 + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با: <math>\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math></p>	۶
$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, \quad x_2 \geq 2, \quad x_5 \geq 4$ $x_2 = y_2 + 2 \quad \text{و} \quad x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ <p>جواب صحیح و نامنفی <math>\binom{5+5+1}{5-1} = \binom{9}{4}</math></p>	۷

<p> <math>x_1, x_3, x_4 \geq 1</math> و <math>x_2 \geq 3</math> و <math>x_5 \geq 4</math>  <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17</math>  <math>\rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 4) = 17</math>  <math>\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7</math>  تعداد جواب های صحیح نامنفی <math>\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math>.    <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17</math>  <math>x_2 &gt; 2 \rightarrow x_2 - 2 &gt; 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2</math>  <math>x_5 &gt; 3 \rightarrow x_5 - 3 &gt; 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3</math>  <math>\rightarrow x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 3) = 17</math>  <math>\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 12</math>  تعداد جواب های طبیعی <math>\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330</math>. </p>	۸
<p> <math>y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1</math>  <math>y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4</math>  <math>x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 1) + x_2 + (y_3 + 4) + \dots + x_5 = 14</math>  <math>\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + \dots + x_5 = 9</math>  تعداد جوابهای صحیح و نامنفی <math>= \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715</math> </p>	۹
<p> <math>y_2 = x_2 - 3</math> , <math>y_2 \geq 0</math> و <math>x_5 = 2</math>  <math>x_1 + (y_2 + 3) + x_3 + x_4 + 2 + x_5 = 17 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12</math>  تعداد جواب های صحیح و نامنفی <math>\binom{16}{4} =</math> </p>	۱۰

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \quad : \quad x_1 \geq 1, x_4 > 3, x_6 = 1$ $y_1 = x_1 - 1 : y_1 \geq 0$ $y_4 = x_4 - 4 : y_4 \geq 0$ $y_6 = 1$ $y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 + 1 = 12 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$ جواب $\binom{10}{4} = 210$	۱۱
$y_1 = x_1 - 3 ; y_1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 3$ $y_4 = x_4 - 4 ; y_4 \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + (y_4 + 4) + x_5 = 15$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$ جواب $\binom{12}{4} = 495$	۱۲

جایگشت های با تکرار

$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$	۱
روش اول $\binom{9}{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$ روش دوم $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 1260$	۲
۴	۳
$\binom{8}{4,2} = \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 1 \times 2} = 14$	۴
$\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 42$	۵

$\binom{10}{4,1,3,2} = \frac{10!}{4! \times 1! \times 3! \times 2!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۶
$\binom{8}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 280$ روش دوم: $\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = 280$ روش اول:	۷
$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}$ یا $\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$	۸

مربع های لاتین

<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> $\Rightarrow$ <table border="1"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱																					
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															
۲	۱	۳																																															
۳	۲	۱																																															
۱	۳	۲																																															
۱۲	۳۱	۲۳																																															
۳۳	۲۲	۱۱																																															
۲۱	۱۳	۳۲																																															
۱۵	۲																																																
<table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> $\Rightarrow$ <table border="1"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr> </table>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														
درست	۴																																																
<table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۵																														
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															



<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-around;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> <div style="text-align: center;"> <math>1 \rightarrow 3</math>  <math>2 \rightarrow 2</math>  <math>3 \rightarrow 4</math>  <math>4 \rightarrow 1</math> </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد، بنابراین مربع جدید، مربع لاتین می باشد.</p>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۶
۴	۲	۱	۳																														
۳	۱	۲	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۲	۳	۴	۱																														
۱	۲	۳	۴																														
۴	۳	۲	۱																														
۳	۱	۴	۲																														
۲	۴	۱	۳																														
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">۱</td> <td style="text-align: center;">۲</td> <td style="text-align: center;">۳</td> <td style="text-align: center;">۴</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>C_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_4</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>C_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_3</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>C_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>C_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_2</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_3</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_4</math></td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;"><math>T_1</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">این جدول یکی از پاسخ های ممکن است.</p>		۱	۲	۳	۴	$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	۷							
	۱	۲	۳	۴																													
$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$																													
$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$																													
$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$																													
$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$																													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin: auto;"> <tr> <td style="color: magenta;">۱۱</td> <td style="color: magenta;">۲۲</td> <td style="color: magenta;">۳۳</td> </tr> <tr> <td style="color: magenta;">۳۲</td> <td style="color: magenta;">۱۳</td> <td style="color: magenta;">۲۱</td> </tr> <tr> <td style="color: magenta;">۲۳</td> <td style="color: magenta;">۳۱</td> <td style="color: magenta;">۱۲</td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">این دو مربع متعامدند، زیر در جدول تلفیقی شده از این دو مربع ، عدد تکراری وجود ندارد.</p>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۸																							
۱۱	۲۲	۳۳																															
۳۲	۱۳	۲۱																															
۲۳	۳۱	۱۲																															
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin: auto;"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">با استفاده از جایگشت مناسب مربع لاتین جدید خواهیم داشت. ( مثلاً با جایگشت <math>1 \rightarrow 2</math> و <math>2 \rightarrow 3</math> و <math>3 \rightarrow 4</math> و <math>4 \rightarrow 1</math> ) مربع جدید به صورت مقابل در خواهد آمد</p>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۹																
۳	۲	۱	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۴	۱	۲	۳																														
۲	۳	۴	۱																														

۱۰ ابتدا در هر مورد، مربع های داده شده را تلفیق می کنیم. ( برهم نهی)

الف :

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامدند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود ندارد.

ب :

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامد نیستند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود دارد.

۱۱ برای برنامه ریزی این مسئله کافی است، دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع  $A$  مربوط به ماشین ها و مربع  $B$  مشخص کنندهی ایاف است.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 $\Rightarrow$ 

	$W_1$	$W_2$	$W_3$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 $\Rightarrow$ 

	$W_1$	$W_2$	$W_3$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع تلفیقی، عدد سمت چپ هر درایه نشان دهندهی ماشین و عدد سمت راست آن نشان دهندهی نوع ایاف است.

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۲		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<p style="text-align: center;">در مربع تلفیقی مقابل، اعداد دو رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع داده شده متعامد هستند.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱۳									
۱۱	۲۲	۳۳																	
۳۲	۱۳	۲۱																	
۲۳	۳۱	۱۲																	
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۴		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: left;"> <p>۱ → ۳ ۲ → ۱ ۳ → ۲    ((الف))</p> </div> <div style="text-align: center;"> <math>B = </math> <table border="1" style="margin-left: 10px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <p>((ب))</p> <table border="1" style="margin-left: 10px;"> <tr><td style="background-color: yellow;">۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr> <tr><td>۱۳</td><td>۳۲</td><td style="background-color: yellow;">۲۱</td></tr> </table> </div> </div> <p style="text-align: center;">متعامد نیستند، زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۲۱	۱۳	۳۲	۳۲	۲۱	۱۳	۱۳	۳۲	۲۱	۱۵
۱	۳	۲																	
۲	۱	۳																	
۳	۲	۱																	
۲۱	۱۳	۳۲																	
۳۲	۲۱	۱۳																	
۱۳	۳۲	۲۱																	
$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \ominus B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix}$	۱۶																		

الف :	۱۷
$\begin{array}{ c c } \hline ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$	
<p>ب : فقط دو مربع لاتین <math>2 \times 2</math> متعامد وجود دارد که متعامد نیستند. زیرا در مربعی تلفیقی آنها عدد تکراری وجود دارد.</p>	
$\begin{array}{ c c } \hline ۱۲ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$	

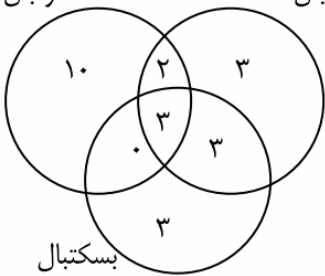
**درس ۲: روش هایی برای شمارش**

**اصل شمول و عدم شمول**

۱	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند <math>A</math> به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند <math>B</math></p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S  =  B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}  =  \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $=  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$
۲	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{90}{2} \right] + \left[ \frac{90}{3} \right] - \left[ \frac{90}{6} \right]$ $= 45 + 30 - 15 = 60$

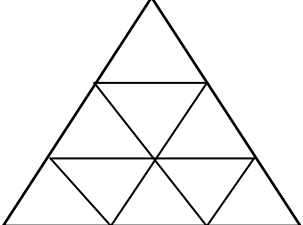
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{200}{4} \right] + \left[ \frac{200}{3} \right] - \left[ \frac{200}{12} \right]$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند <math>A</math> به یک مجموعه ی سه عضوی مانند <math>B</math> است. طوری که برد این توابع همه اعضای <math>B</math> باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از <math>A</math> نسبت داده شود).</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> $ A  = 4 \text{ و }  B  = 3$ $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۴
<p>مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را <math>A</math> و مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را <math>B</math> می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[ \frac{400}{4} \right] = 100 \text{ و } n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57 \text{ و } n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B - A)$ $= 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۵
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{350}{4} \right] + \left[ \frac{350}{6} \right] - \left[ \frac{350}{12} \right]$ $= 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۶
درست	۷

<p> <math>1 \leq j \leq 3</math> , <math>A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}</math>  <math>A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}</math> و <math>B = \{b_1, b_2, b_3\}</math>  <math> S  = 3^4</math> و <math> A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4</math> و <math> A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1^4</math>  و <math> A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0^4 = 0</math>  <math> A_1 \cup A_2 \cup A_3  =  A_1  +  A_2  +  A_3  -  A_1 \cap A_2  -  A_1 \cap A_3  -  A_2 \cap A_3  +  A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45</math>  <math> \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - 45 = 36</math>    روش دوم :  <math> A  = 4</math> و <math> B  = 3</math>  <math>3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36</math> </p>	۸
<p> تعداد حالت های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی مجموعه ای ۸ عضوی </p> $({}_8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$	۹
<p> <math>A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \rightarrow  A  = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16</math>  <math>B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \rightarrow  B  = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10</math>  <math>A \cap B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3</math>  <math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 16 + 10 - 3 = 23</math> </p>	۱۰
<p> <math> S  = 200</math> و <math> A  = \left[ \frac{200}{2} \right] = 100</math> و <math> B  = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28</math> و <math> A \cap B  = \left[ \frac{200}{14} \right] = 14</math>  <math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 100 + 28 - 14 = 114</math>  <math> \overline{A \cap B}  =  \overline{A \cup B}  =  S  -  A \cup B  = 200 - 114 = 86</math> </p>	۱۱

<p>الف : <math>3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 45 = 36</math>      ب : <math>(6)_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360</math></p>	۱۲
<p>حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی است که برابر با <math>8^2</math> است.</p>	۱۳
<p><math>P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120</math></p>	۱۴
<p><math> F \cup V  =  S  -  F \cup V  = 25 - (15 + 14 - 9) = 5</math></p>	۱۵
<p><math>A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in Z\} \rightarrow n(A) = \left[ \frac{400}{5} \right] = 80</math></p> <p><math>B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in Z\} \rightarrow n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57</math></p> <p><math>A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in Z\} \rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{35} \right] = 11</math></p> <p><math> A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B  = 80 + 57 - 11 = 126</math></p> <p><math> \overline{A \cup B}  =  S  -  A \cup B  = 400 - 126 = 274</math></p>	۱۶
<p>فوتبال      والیبال</p>  <p>بسکتبال</p> <p>فقط در یک رشته = <math>10 + 3 + 3 = 16</math></p>	۱۷
<p>الف) <math>3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36</math>      ب) <math>P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680</math></p>	۱۸

$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 4k\} \rightarrow  A  = \left[ \frac{200}{4} \right] = 50$ $B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 7k\} \rightarrow  B  = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 28k\} \rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{200}{28} \right] = 7$ $ A \cap B'  =  A  -  A \cap B  = 50 - 7 = 43$	۱۹
---	----

**اصل لانه کبوتری**

$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{array}{r} 6 \quad   \quad 4 \\ 4 \quad   \quad 1 \\ \hline 2 \\ 1+1=2 \end{array}</math> </div> <div> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. (<math>n = 365</math>)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با <math>kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936</math></p> </div> </div>	۱
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <math display="block">7 \times 12 = 84</math> <p>تعداد لانه ها :</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز</p> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{array}{r} 50.5 \quad   \quad 84 \\ 50.4 \quad   \quad 6 \\ \hline 1 \end{array}</math> </div> <div> <p><math>6+1=7</math></p> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقل ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> </div> </div>	۲
<p>در این مسئله <math>k + 1 = 7</math> یعنی <math>k = 6</math> است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی <math>n = 12</math> است. طبق اصل لانه کبوتری ، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر <math>kn + 1 = (6 \times 12) + 1 = 73</math> باشد.</p>	۳
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع ( با ضلع هایی به طول ۱ واحد ) تقسیم می کنیم.</p> <p>حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله ی بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است .</p> </div> </div>	۴



تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر	تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه	۵
طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند $A$ و $B$ در یک لانه جای می گیرند. پس :		
$\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$		
تعداد کبوترها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:		۶
$\begin{matrix} \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} & \text{نقطه} \\ ۱,۸۴ & ۲,۸۳ & ۳,۸۲ & \dots & ۴۲,۴۳ \end{matrix}$		
چنانچه قرار باشد، کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعشان ۸۵ است.		
در این مسئله $k + 1 = 7$ پس $k = 6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = (6)(12) + 1 = 73$ باشد.		۷
$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ و $n = 7$ تعداد لانه ها		۸
$nk + 1 = (7)(19) + 1 = 133 + 1 = 134$ تعداد کبوترها		
بنابراین حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن باشند.		
هر فصل تولد را لانه فرض می کنیم که برابر ۴ است. همچنین هر فرد خانواده را معادل کبوتر قرار می دهیم که برابر ۵ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می گیرند. به عبارتی دیگر در یک فصل به دنیا آمده اند.		۹
$k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$ ، $32 \times 31 = 992$ تعداد لانه ها		۱۰
$2 \times 992 + 1 = 1985$ تعداد کبوترها		
$k + 1 = 5 \rightarrow k = 4$		۱۱
$kn + 1 = 54 \rightarrow 4n = 53$		
$n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$		

$$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19 \rightarrow kn + 1 = 19(17) + 1 = 134$$

۱۲

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

@amerimath