مدرس: نسیبه دهنوی

باهم ویادخدا

کاربرد مشتق

۱) تابع $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ در چه بازه‌ای "اکیداً" صعودی و در چه بازه‌ای "اکیداً" نزولی است؟

۲) نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$

ب) $f(x) = x^3 - 3x$

پ) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

Scanned with CamScanner

۳) اگر نقطه (۲و۱-) اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید:

۴) به کمک رسم نمودار، اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x\geq 0 \\ x+4 & x<0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\frac{1}{x}$

۵) اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^4-2x^2+1$ را در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص کنید:

۶) نقاط Max و min مطلق تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را در بازهٔ $[-1,-3]$ تعیین کنید:

Scanned with CamScanner

۷) با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ 2x-3 & -2\le x<0 \end{cases}$ مقادیر اکسترمم مطلق تابع را در صورت وجود بدست آورید:

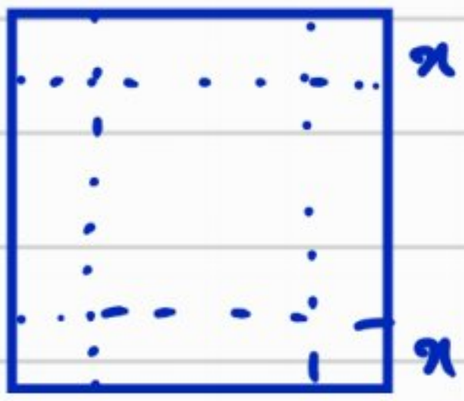
۸) از بین تمام مستطیل های با محیط ۱۸ سانتی‌متر، مستطیل با بیشترین مقدار مساحت را مشخص کنید:

۹) اگر x و y دو عدد حقیقی و $3x-4y=12$ باشد x و y را طوری بیابید که xy کمترین مقدار را داشته باشد.

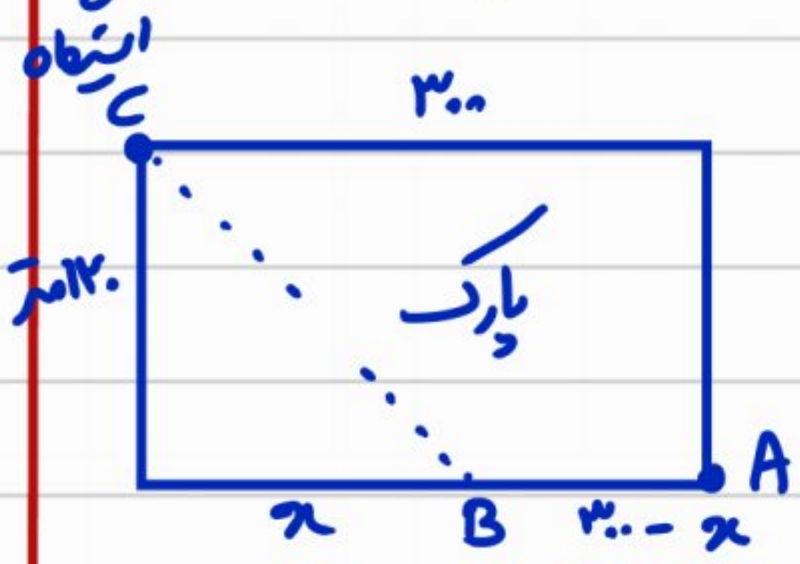
۱۰) ورق فلزی مربع شکل با طول ضلع ۲۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم و یک جعبه دربار بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟

Scanned with CamScanner

مدرس: نسیبه دهنوی



۱۱) در شکل مقابل شخص در نقطه A قرار دارد او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه A به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک و با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند مقدار x کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



Scanned with CamScanner

مدرس: نسیبه دهنوی

بانام ویادخدا

کاربرد مشتق

۱) تابع $f(x)=x-2\sqrt{x}$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

$(1,+\infty)$ صعودی $\Rightarrow y'>0$ ، $(0,1)$ نزولی $\Rightarrow y'<0$

$$f'(x)=1-\frac{2}{2\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=0 \rightarrow \sqrt{x}=1 \rightarrow x=1$$

برای $x=1$: مشتق پذیری سمت برای $x=0$

x	0		1
y'	‖	$-$	0 $+$
	‖	نزولی	صعودی

۲) نقاط برای توابع زیر را بدست آورید:

نقاط مشتق ناپذیری
- نقاط مشتق ناپذیری
  - ریشه‌ی مخرج کسر
  - ریشه‌ی زیر رادیکال با توان زوج
  - ریشه‌ی ساده قدرمطلق
- ریشه‌ی مشتق
  - ریشه‌ی زیر رادیکال با توان فرد

الف) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$ $\quad D_f:[0,4]$

$-x^2+4x\geq 0$

x	0		4
$-x^2+4x$	0 $+$	$+$	0 $-$

برای: $x_1=0$ و $x_2=4$

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}}=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2$$

$x=2$ ✓

ب) $f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=0$ برای ریشه‌ی مشتق

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

x	-1		1
f'	$+$	0 $-$	0 $+$
	نیز	Max نسبی	min نسبی

پ) $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$

$3x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ اکسترمم نسبی نیستند

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2-1)^2}}\times 6x=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$$

اکسترمم نسبی

x		0	
f'	$-$	0	$+$
		min نسبی	

Scanned with CamScanner

۳) اگر نقطه $(-1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد مقادیر a و b را بیابید.

ریشه مشتق

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ ، $f'(-1)=0$

$3(-1)^2+2a(-1)+b=0 \rightarrow -2a+b=-3$

$f(-1)=2 \rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=2$

$-1+a-b+1=2 \rightarrow a-b=2$

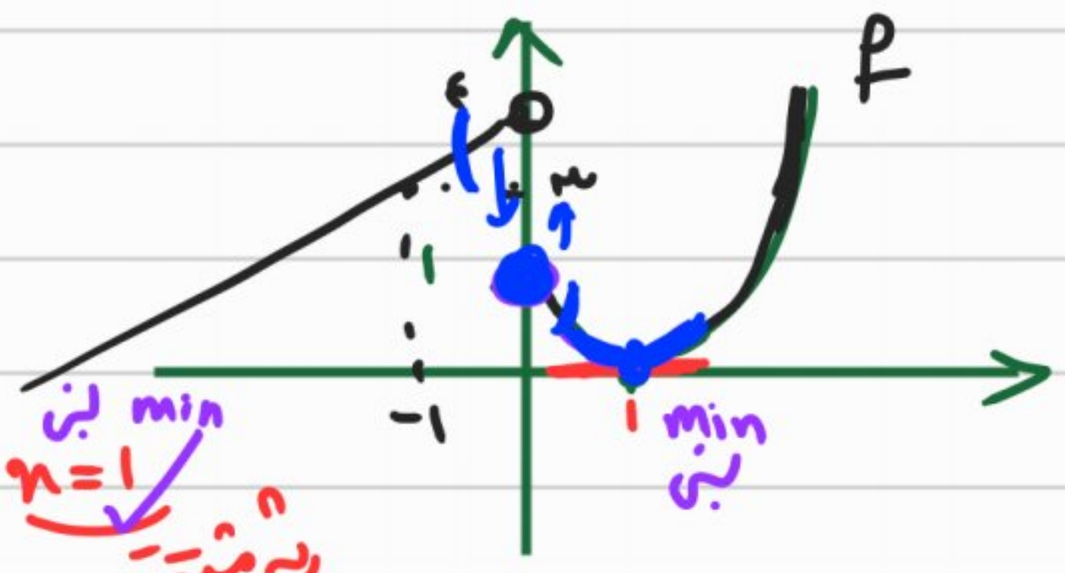
$\begin{cases} -2a+b=-3 \\ a-b=2 \end{cases}$

$-a=-1 \rightarrow a=1$

$1-b=2 \rightarrow -b=1 \rightarrow b=-1$

۴) به کمک رسم نمودار، اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را مشخص کنید:

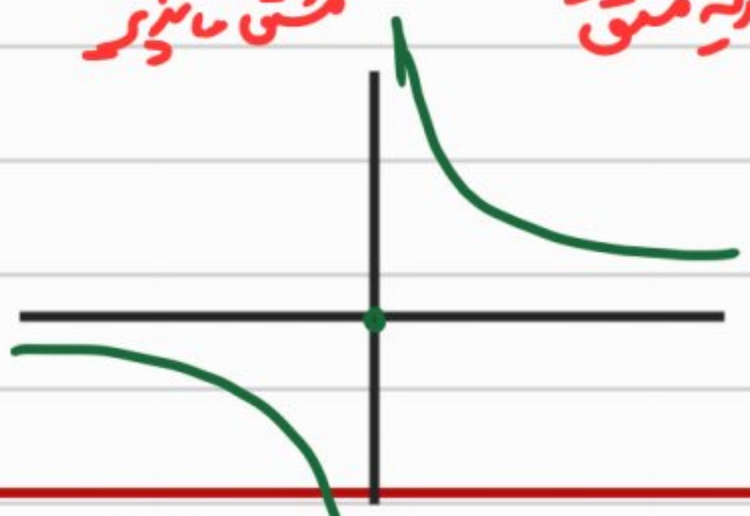
الف) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x\geq 0 \\ x+4 & x<0 \end{cases}$



$x=0$ و $x=1$: مشتق ناپذیر

$x=0$: مشتق ناپذیر، $x=1$: ریه مشتق

ب) $f(x)=\frac{1}{x}$



$x=0$: مشتق ناپذیر

$x=0$: مشتق ناپذیر، بی نهایت

۵) اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^4-2x^2+1$ را در بازه $[-2, 1]$ مشخص کنید:

۱) نقاط بحرانی

۲) سرو ته بازه

۳) مقدار تابع را در ۱ و ۲ میابیم

۴) f ها را مقایسه میکنیم

$f'(x)=4x^3-4x=0$

$4x(x^2-1)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow f(0)=1 \\ x=1 \rightarrow f(1)=0 \\ x=-1 \rightarrow f(-1)=0 \end{cases}$ مطلق min

$f(-2)=16-8+1=9$ max

۶) نقاط Max و min مطلق تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را در بازه $[-3, -1]$ تعیین کنید:

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=0 \rightarrow \frac{4}{x^2}=1 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

$f(-3)=-3-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3}=-4/3$

$f(-1)=-1-4=-5$ مطلق min

$f(2)=2+2=4$ مطلق max

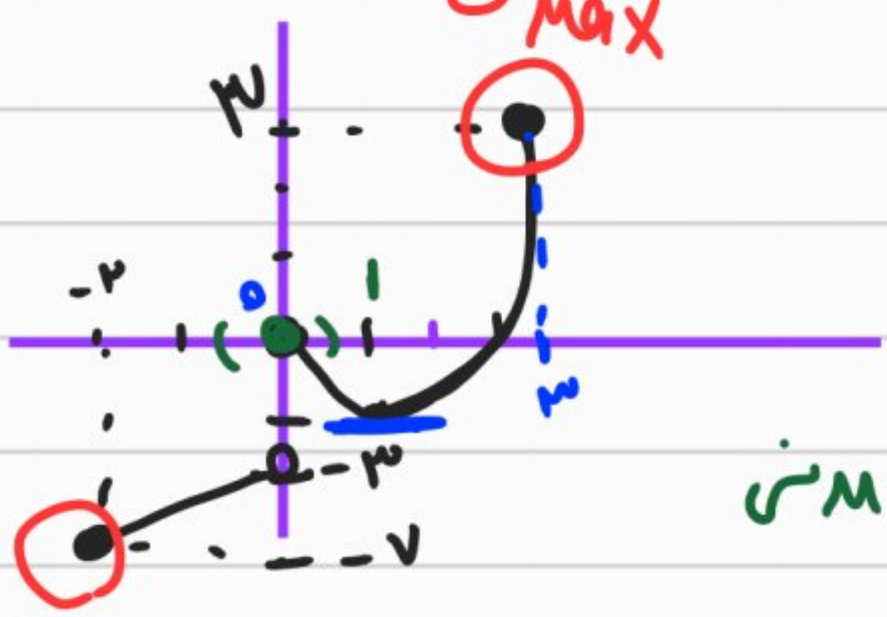
$f(-2)=-2-2=-4$

Scanned with CamScanner

۷) با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ 2x-3 & -2\le x<0 \end{cases}$ معادیر اکسترم مطلق تابع را در صورت وجود بدست آورید:

$5(1-1)$

$9-6=3$



-2 0 -7 -3

مطلق : 3 و -2 : معادیر مطلق -7 : معادیر نسبی

بحرانی : 1 و 3 و -2 و 0

1 و 3 : ext ✓ نسبی Max

-2 و 0 : ext ✓ نسبی min

نسبی دقیق

۸) از بین تمام مستطیل هایی با محیط ۱۸ سانتی‌متر، مستطیل با بیشترین مقدار مساحت را مشخص کنید:

x : طول

y : عرض

محیط $= 2(x+y)$

$18 = 2(x+y)$

$x+y=9$

$y=9-x$

مساحت = طول × عرض

$S = x \times y$

$S = x(9-x) = -x^2+9x \Rightarrow S(\frac{9}{2}) = -\frac{81}{4}+\frac{81}{2}$

$\frac{81}{4}$

$S'(x) = -2x+9 = 0 \rightarrow -2x=-9$

$x=\frac{9}{2}$

۹) اگر x و y دو عدد حقیقی و $3x-4y=12$ باشد xy را طوری بیابید که xy کمترین مقدار را داشته باشد.

$-4y=-3x+12$

$y=\frac{3}{4}x-3$

$S(x) = x \times y$

$S(x) = x\left(\frac{3}{4}x-3\right) = \frac{3}{4}x^2-3x$

$S'(x) = \frac{3}{2}x-3=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x=3 \rightarrow x=2$

$y=\frac{3}{4}(2)-3=-\frac{3}{2}$

۱۰) ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۲۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم و یک جعبه درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟

$V(x) = S_{\text{قاعده}} \times h$

$V(x) = (20-2x)^2 \times x \rightarrow V(x) = (400-80x+4x^2)x$

$V(x) = 400x-80x^2+4x^3$

Scanned with CamScanner

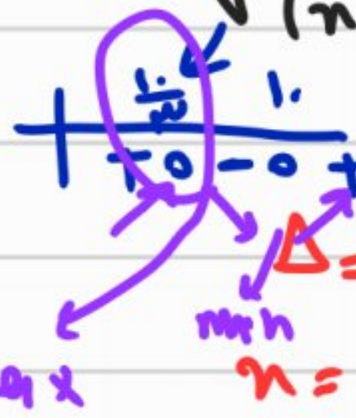
مدرس: نسیبه دهنوی

$$V'(x) = 400 - 160x + 12x^2 = 0$$

$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

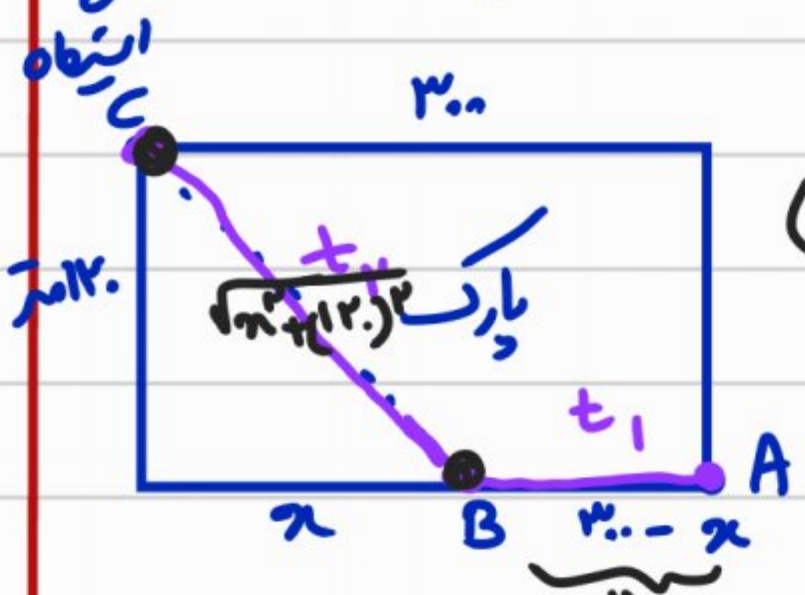
$$\Delta = 1600 - 4(3)(100) = 1600 - 1200 = 400$$

$$x = \frac{+40 \pm \sqrt{400}}{2\times 3} \Rightarrow x = \frac{40+20}{6} = 10 \quad (\text{قبول}) \qquad x = \frac{40-20}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \quad (\text{قبول})$$



۱۱) در شکل مقابل شخصی در نقطه A قرار دارد او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه A به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک و با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند مقدار x کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

$$x = 50t \rightarrow t = \frac{x}{50}$$



$$f(t) = t_1 + t_2$$

$$f(x) = \frac{300 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 120^2}}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 2\sqrt{x^2+120^2}} \times 2x = 0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{x^2+120^2}} = \frac{1}{4}$$

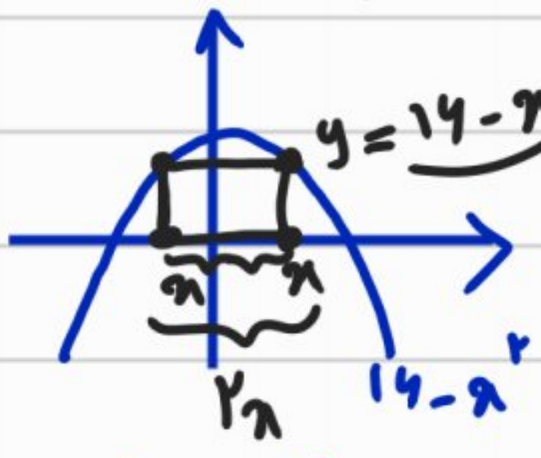
$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2+120^2}}{2} \qquad t_1 = \frac{300-x}{4}$$

$$(2x)^2 = \left(\sqrt{x^2+120^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + 120^2 \rightarrow 3x^2 = 120^2 \Rightarrow x^2 = \frac{120^2}{3}$$

$$x = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

۱۲) مستطیلی در سهمی $y = 16 - x^2$ مطابق شکل محاط شده است مانزیم مساحت مستطیل را بدست آورید.



$$S(x) = x \times y$$

$$S(x) = x(16 - x^2) = -x^3 + 16x$$

$$S'(x) = -3x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{3} \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 + 16\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{64}{3\sqrt{3}} + \frac{64\times 3}{\sqrt{3}}$$

$$S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-64 + 3\times 64}{3\sqrt{3}} = \frac{2\times 64}{3\sqrt{3}} = \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

نسیبه دهنوی

Scanned with CamScanner