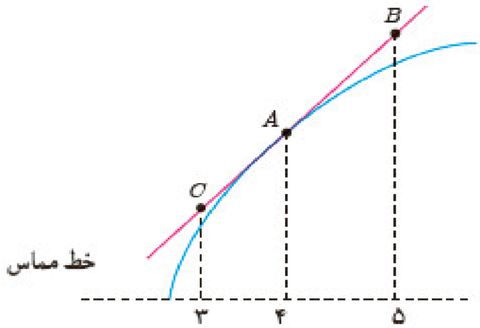
۱- برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۵$ با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



« **پاسخ** »

$$m = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A) \Rightarrow \frac{f(B) - ۲۵}{۵ - ۴} = \frac{f(C) - ۲۵}{۳ - ۴} = ۱/۵$$

$$\begin{cases} \frac{f(B) - ۲۵}{۱} = ۱/۵ \Rightarrow f(B) = ۲۶/۵ \\ \frac{f(C) - ۲۵}{۳ - ۴} = ۱/۵ \Rightarrow f(C) = ۲۳/۵ \end{cases} \Rightarrow B\left|\begin{matrix} ۵ \\ ۲۶/۵ \end{matrix}\right. ,\ A\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۲۵ \end{matrix}\right. ,\ C\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲۳/۵ \end{matrix}\right.$$

۲- اگر $f(x) = x^۳ - ۲$، $f'(-۱)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

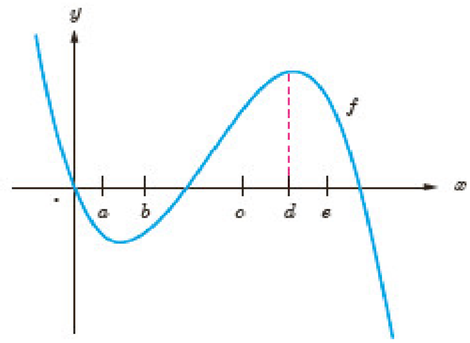
$$f(-۱) = (-۱)^۳ - ۲ = -۱ - ۲ = -۳$$

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\cancel{(x+۱)}\left(x^۲ - x + ۱\right)}{\cancel{x+۱}}$$

$$= \lim_{x \to -۱} \left(x^۲ - x + ۱\right) = ۳$$

۳- با درنظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a , b , c , d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	−۰/۵
	−۲



« **پاسخ** »

x	f'(x)
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲

۴- اگر $f(x) = ۳x^{۲} - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$$f(۲) = ۳(۲)^{۲} - ۲(۲) + ۱ = ۹$$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^{۲} - ۲x + ۱ - ۹}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^{۲} - ۲x - ۸}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(۳x + ۴)}{\cancel{x-۲}} = \lim_{x \to ۲} (۳x + ۴) = ۱۰$$

$y - ۹ = ۱۰(x - ۲) \Rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$ معادله خط مماس

۵- تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۰ \\ x^۲ - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

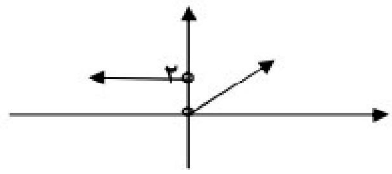
ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

« پاسخ »

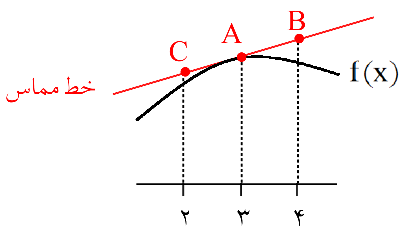
الف) در $x = ۰$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است. ۰/۵ (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره تعلق می‌گیرد)

ب) $f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & x > ۰ \end{cases}$ ۰/۵

ج)



۶- برای تابع f در شکل زیر، $f'(۳) = ۰/۵$ و $f(۳) = ۵$ می‌باشد. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.



« پاسخ »

$$A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۵ \end{matrix}\right. , \quad m = ۰/۵$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۵ = ۰/۵(x - ۳) \Rightarrow y = ۰/۵x + ۳/۵$$

$$C\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰/۵(۲) + ۳/۵ \end{matrix}\right. \Rightarrow C\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۴/۵ \end{matrix}\right.$$

$$B\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۰/۵(۴) + ۳/۵ \end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۵/۵ \end{matrix}\right.$$

۷- اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} \ (۰/۲۵) = \lim_{x \to -۱} \frac{۱ - ۲x^۲ + ۱}{x + ۱} \ (۰/۲۵)$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{۲(۱ - x)(۱ + x)}{x + ۱} = ۴ \ (۰/۲۵)$$

۸- با استفاده از تعریف، معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ را در نقطه‌ی $x = ۱$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$m = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} \ ۰/۲۵ =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x - ۱} \ ۰/۲۵ = \lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x + ۳)}{(x - ۱)} \ ۰/۲۵ = ۴ \ ۰/۲۵$$

$$y - ۶ = ۴(x - ۱) \Rightarrow \ ۰/۵ \ y = ۴x + ۲$$

۹- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ را در نقطه‌ی a محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$f'(a) = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{x^۲ + ۱ - (a^۲ + ۱)}{x - a}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a}}_{۰/۵} = ۲a \ ۰/۵$$

۱۰- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = \sqrt{۴ - x}$ را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sqrt{۴ - x - \Delta x} - \sqrt{۴ - x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{۴ - x - \Delta x} + \sqrt{۴ - x}}{\sqrt{۴ - x - \Delta x} + \sqrt{۴ - x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۴ - x - \Delta x - ۴ + x}{\Delta x \left(\sqrt{۴ - x - \Delta x} + \sqrt{۴ - x}\right)} = \frac{-۱}{۲\sqrt{۴ - x}}$$

۱۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}$ را در $x = ۰$ بررسی نمایید.

« **پاسخ** »

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} \quad ۰/۲۵$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{x} \times \frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}} \quad ۰/۲۵ \quad = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \quad ۰/۲۵ \quad \to \begin{cases} f'_{+}(۰) = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = +\infty \quad ۰/۲۵ \\ f'_{-}(۰) = \lim_{x \to ۰^{-}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = -\infty \quad ۰/۲۵ \end{cases}$$

پس تابع f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ۰/۲۵

۱۲- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{۲}{x}$ را در $x = ۳$ حساب کنید.

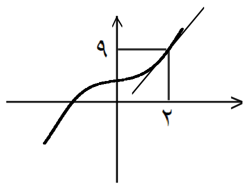
« **پاسخ** »

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ۰/۲۵ \quad \to$$

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{\frac{۲}{x} - \frac{۲}{۳}}{x - ۳} \overset{۰/۲۵}{=} \lim_{x \to ۳} \frac{\frac{۶ - ۲x}{۳x}}{x - ۳} \overset{۰/۲۵}{=} \lim_{x \to ۳} \frac{-۲}{۳x} \quad ۰/۲۵ \quad = -\frac{۲}{۹} \quad ۰/۲۵$$

۱۳- خط مماس بر نمودار f را در نقطه‌ی (۹ , ۲) رسم کنید.

« **پاسخ** »



۱۴- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ را در $x=2$ حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\underset{(0/25)}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\underset{(0/25)}{\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}}{x-2}}=$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\overset{(0/25)}{\frac{3-(x+1)}{3(x+1)}}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-x+2}{3(x+1)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{3(x+1)}=\frac{-1}{9}$$

۱۵- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ را در نقطه‌ی $x=2$ بدست آورید.

« **پاسخ** »

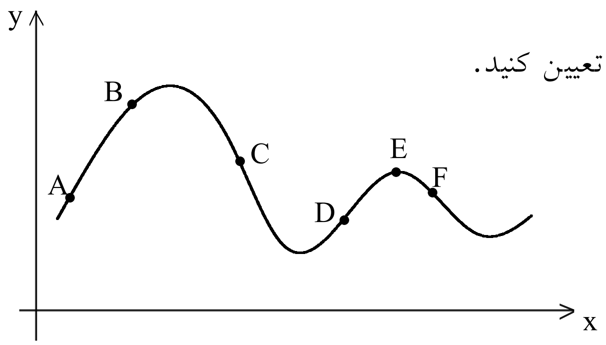
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=f'(2)\quad 0/25 \quad\Rightarrow\quad f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}\ 0/25 =\lim_{x\to 2}(x+2)=4\quad 0/5$$

۱۶- اگر $f(x)=x\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)$ آن‌گاه مقدار $f'(0)$ را با تعریف مشتق به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{x^2}+1}{\cancel{x}-0}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)=1$$

۱۷- شیب تقریبی خط مماس بر نمودار
در تعدادی نقطه در جدول زیر داده شده است. آن نقطه‌ها را تعیین کنید.

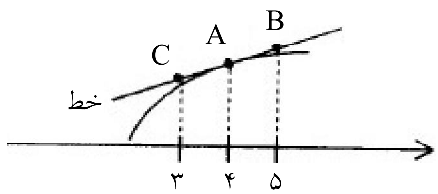


شیب	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۳
نقطه						

« **پاسخ** »

شیب	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۳
نقطه	C	F	E	B	D	A

۱۸- برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



« **پاسخ** »

$$f'(۴) = m_{AB} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{y_B - ۲۴}{۱} \Rightarrow y_B = ۲۵/۵$$

$$\frac{y_C - ۲۴}{-۱} = ۱/۵ \Rightarrow y_C = ۲۲/۵$$

$A\left|\begin{matrix}۴\\ ۲۴\end{matrix}\right.$ (۰/۲۵) $\quad B\left|\begin{matrix}۵\\ ۲۵/۵\end{matrix}\right.$ (۰/۲۵) $\quad C\left|\begin{matrix}۳\\ ۲۲/۵\end{matrix}\right.$ (۰/۲۵)

۱۹- مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \left(۳x^۲ - ۴\right)(۲x - ۵)^۲$

ب) $f(x) = \dfrac{x^۲ - ۳x + ۱}{-۳x + ۲}$

پ) $f(x) = \left(\sqrt{۳x + ۲}\right)\left(x^۳ + ۱\right)$

ت) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}}$

« **پاسخ** »

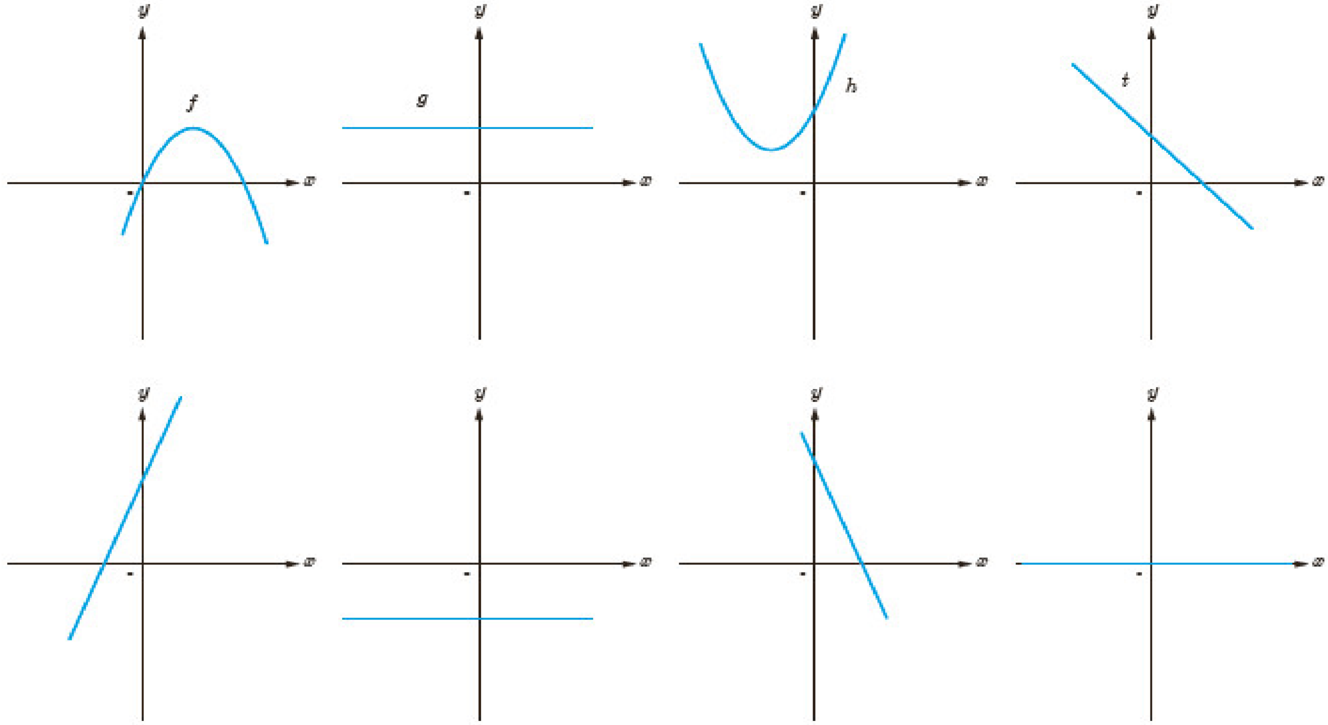
الف) $f'(x) = ۶x(۲x - ۵)^۲ + ۴(۲x - ۵)\left(۳x^۲ - ۴\right) = (۲x - ۵)\left(۲۴x^۲ - ۳۰x - ۱۶\right)$

ب) $f'(x) = \dfrac{(۲x - ۳)(-۳x + ۲) + ۳\left(x^۲ - ۳x + ۱\right)}{(-۳x + ۲)^۲} = \dfrac{-۳x^۲ + ۴x - ۳}{(-۳x + ۲)^۲}$

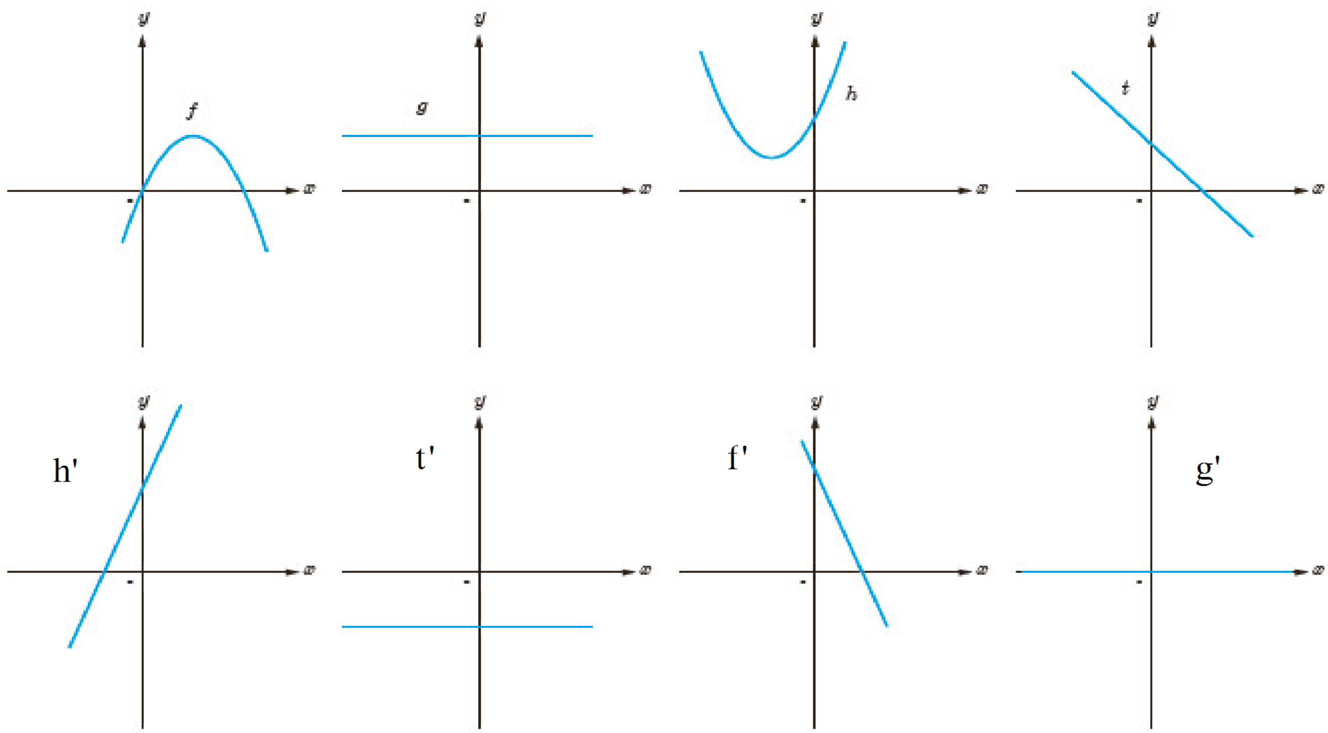
پ) $f'(x) = \left(\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۲}}\right)\left(x^۳ + ۱\right) + ۳x^۲\left(\sqrt{۳x + ۲}\right)$

ت) $f'(x) = \dfrac{۹\left(\sqrt{x}\right) - \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x - ۲)}{\left(\sqrt{x}\right)^۲}$

۲۰- نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.



« پاسخ »

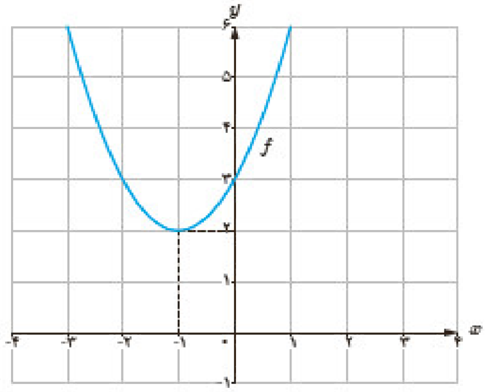


۲۱- الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۲)\ ,\ f'(-۱)\ ,\ f'(۰)\ ,\ f'(۳)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



« پاسخ »

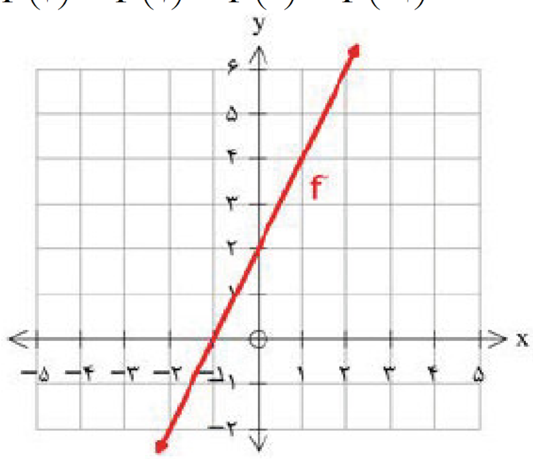
الف) $f'(-۱) < f'(۰) < f'(۲) < f'(۳)$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲$

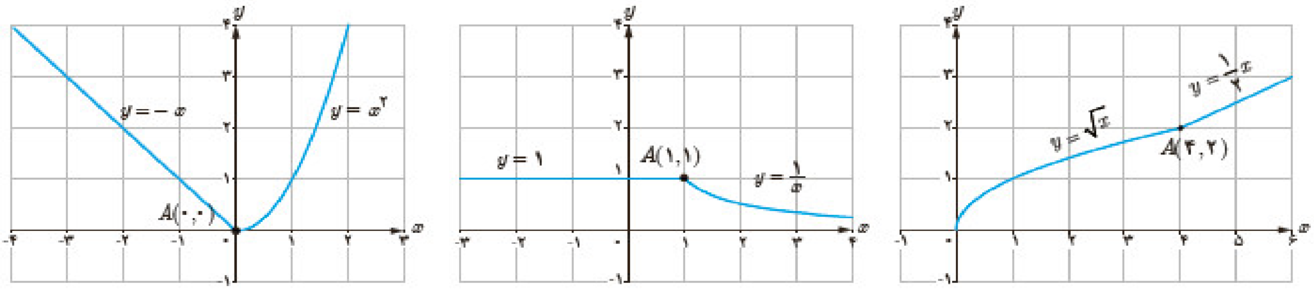
$f'(۳) = ۸\ ,\ f'(۲) = ۶\ ,\ f'(۰) = ۲\ ,\ f'(-۱) = ۰$

$f'(۳) > f'(۲) < f'(۰) > f'(-۱)$

پ) تاب مشتق:



۲۲- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه‌ی A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف) (ب) (پ)

« **پاسخ** »

الف) $\begin{cases} f'_{+}(۰)=۰ \\ f'_{-}(۰)=-۱ \end{cases} \Rightarrow f'(۰)$ وجود ندارد

ب) $\begin{cases} f'_{+}(۱)=-۱ \\ f'_{-}(۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow f'(۱)$ وجود ندارد

پ) $\begin{cases} f'_{+}(۴)=\frac{۱}{۲} \\ f'_{-}(۴)=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow f'(۴)$ وجود ندارد

۲۳- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۵$ ب) $g(x)=x^۲\left(\sqrt{x+۱}\right)$

« **پاسخ** »

الف) $f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۴ (۰/۵)\times\left(\frac{۲x-۱-۲x}{(۲x-۱)^۲}\right) \quad (۰/۵)$

ب) $g'(x)=۲x\left(\sqrt{x+۱}\right)(۰/۵)+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}\times x^۲ \ (۰/۵)$

۲۴- به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x\,|x-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

تابع f در $x=۱$ پیوسته است. ۰/۲۵

$f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\ (۰/۲۵) = \lim\limits_{x\to ۱}\frac{x\,|x-۱|-۰}{x-۱}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} f'_{+}(۱)=۱ \ (۰/۲۵) \\ f'_{-}(۱)=-۱ \ (۰/۲۵) \end{cases}$

پس تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. ۰/۲۵

۲۵- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۲}$ واقع بر منحنی را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{-۱}{x^۲} \xrightarrow{۰/۲۵} m=f'\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۴ \quad ۰/۲۵ \\ x_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y_۱=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲ \quad ۰/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۲=-۴\left(x-\frac{۱}{۲}\right) \quad ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow y=-۴x+۴ \quad ۰/۲۵$$

۲۶- فرض کنید $f(x)=x^۶-۲x^۴-x+۱$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x)=۶x^۵-۸x^۳-۱ \quad (۰/۲۵) \qquad f''(x)=۳۰x^۴-۲۴x^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}=f''(۱) \quad (۰/۲۵) \rightarrow \lim\limits_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}=۳۰(۱)^۴-۲۴(۱)^۲$$

$$=۶ \quad (۰/۲۵)$$

۲۷- مشتق تابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x)=\frac{۳x^۳+۵}{۵x-۱}$$

« **پاسخ** »

$$f'(x)=\frac{۹x^۲(۵x-۱)-۵\left(۳x^۳+۵\right) \quad ۰/۵}{(۵x-۱)^۲ \quad ۰/۲۵}$$

۲۸- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\leqslant ۱ \\ x^{۲}+۳ & x>۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

مشتق‌پذیر نیست ۰/۲۵ زیرا

$$f'_{+}(۱)=\underbrace{\lim_{x\to ۱^{+}} \frac{x^{۲}-۱}{x-۱}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\lim_{x\to ۱^{+}} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}}_{۰/۲۵}=۲ \quad ۰/۲۵ \quad , \quad f'_{-}(۱)=\underbrace{\lim_{x\to ۱^{-}} \frac{۳(x-۱)}{x-۱}}_{۰/۲۵}=۳ \quad ۰/۲۵$$

۲۹- با استفاده از تعریف مشتق، وجود مشتق‌های راست و چپ و مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x)=|x-۳|$ را در نقطه‌ی $x=۳$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_{+}(۳)=\underbrace{\lim_{x\to ۳^{+}} \frac{|x-۳|-۰}{x-۳}}_{۰/۲۵}==\underbrace{\lim_{x\to ۳^{+}} \frac{x-۳}{x-۳}}_{۰/۲۵}=۱ \quad ۰/۲۵ \quad , \quad f'_{-}(۳)=\underbrace{\lim_{x\to ۳^{-}} \frac{-(x-۳)}{x-۳}}_{۰/۲۵}=-۱ \quad ۰/۲۵$$

۳۰- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ بیابید.

« **پاسخ** »

$$f(۲)=۴ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}} \quad ۰/۵ \Rightarrow m_{\text{مماس}}=f'(۲)=-۳ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{۱}{۳} \quad ۰/۲۵$$

$y-۴=\frac{۱}{۳}(x-۲)$ ۰/۲۵ معادله ی خط قائم

۳۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^۲-۴\right|$ را در $x=۲$ بررسی نمایید.

« **پاسخ** »

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left|x^۲-۴\right|-۰}{x-۲} \quad ۰/۲۵$$

$$\to \begin{cases} f'_{+}(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=۴ \quad ۰/۵ \\ f'_{-}(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{-(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴ \quad ۰/۵ \end{cases}$$

$f'_{+}(۲)\neq f'_{-}(۲)$ پس تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ۰/۲۵

۳۲- به کمک تعریف، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^۲-۱\right|$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\left|x^۲-۱\right|}{x-۱} \quad ۰/۲۵ = \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^{+}}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} \quad ۰/۲۵ =\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(x+۱)=۲ \quad ۰/۲۵ \\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{-(x^۲-۱)}{x-۱} \quad ۰/۲۵ =\lim\limits_{x\to ۱^{-}}-(x+۱)=-۲ \quad ۰/۲۵ \end{cases}$$

چون این حد وجود ندارد بنابراین $f(x)$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. ۰/۲۵

۳۳- به کمک تعریف، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

$D_f=[۲,+\infty)$ ۰/۲۵

$$\underbrace{f'_{+}(۲)}_{۰/۲۵}=\underbrace{\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\sqrt{x-۲}-۰}{x-۲}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}}_{۰/۲۵}=+\infty \quad ۰/۲۵ \Rightarrow$$

۰/۲۵ تابع در نقطه‌ی ۲ مشتق‌پذیر نیست.

۳۴- اگر $f(x)=۲x^۴+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشند، مشتق تابع fog را در $x=۰$ بیابید.

« **پاسخ** »

$$f'(x)=۸x^۳ \quad ۰/۲۵ \quad , \quad g'(x)=\frac{-x}{(x^۲+۳)\sqrt{x^۲+۳}} \quad ۰/۲۵ \quad , \quad g(۰)=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad ۰/۲۵$$

$$(fog)'(۰)=f'(g(۰))\times g'(۰)=۸\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۳\times ۰=۰ \quad ۰/۲۵$$

۳۵- مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۳x^۲+۶x+۲ & x\geqslant ۲ \\ ۴\sqrt{x+۲}-۳x & x<۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow x=۲ \rightarrow$$ f در ۲ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases} -۶x+۶ & x>۲ \qquad f'+(۲)=-۶ \\ \frac{۲}{\sqrt{x+۲}}-۳ & x>۲ \qquad f'-(۲)=-۲ \end{cases} \Rightarrow$$ f در $x=۲$ مشتق ندارد.

۳۶- مشتق تابع $y=۳(۲x-۵)^۴+\sqrt[۳]{x}$ را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

« **پاسخ** »

$$y'=۳\times۴\times۲\times(۲x-۵)^۳+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$۰/۵ \qquad\qquad ۰/۵$$

۳۷- مشتق پذیری تابع $f(x) = (x - ۲)[x]$ را در $x = ۲$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

تابع در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست ۰/۲۵. زیرا

$$f'_{-}(۲) = \underbrace{\lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to ۲^-} \frac{(x - ۲) \times ۱ - ۰}{x - ۲}}_{۰/۲۵} = ۱ \quad ۰/۲۵$$

$$f'_{+}(۲) = \underbrace{\lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to ۲^-} \frac{(x - ۲) \times ۲ - ۰}{x - ۲}}_{۰/۲۵} = ۲ \quad ۰/۲۵$$

۳۸- مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$f(x) = (۴x-۱)^۳\left(x^۳-x\right)$$

« **پاسخ** »

$$f'(x)=۳(۴x-۱)^۲(۴)\left(x^۳-x\right)+\left(۳x^۲-۱\right)(۴x-۱)^۳$$

۳۹- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه‌ی $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right)^۲$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰ , ۱]$ چه‌قدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰ , ۱۰۰]$ می‌شود؟

« **پاسخ** »

الف)
$$v(۱) = ۴۰\left(۱ - \frac{۱}{۱۰۰}\right)^۲ = ۳۹/۲۰۴$$
$$v(۰) = ۴۰\left(۱ - \frac{۰}{۱۰۰}\right)^۲ = ۴۰$$
$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{۳۹/۲۰۴ - ۴۰}{۱ - ۰} = -۰/۷۹۶$$

ب)
$$v' = ۴۰ \times ۲\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) \times \left(-\frac{۱}{۱۰۰}\right) = -۰/۸\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right)$$
$$-۰/۸\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) = -۰/۴ \Rightarrow -۰/۸ + \frac{۰/۸t}{۱۰۰} = -۰/۴$$
$$v(۱۰۰) = ۴۰\left(۱ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰}\right)^۲ = ۰$$
$$v(۰) = ۴۰\left(۱ - \frac{۰}{۱۰۰}\right)^۲ = ۴۰$$
$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{۰ - ۴۰}{۱۰۰ - ۰} = -۰/۴$$
$$\frac{۸t}{۱۰۰۰} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow t = ۵۰\,s$$

۴۰- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۲ \le t \le ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = ۳$ چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

الف)
$$m(۴) = \sqrt{۴} + ۲ \times ۴^۳ = ۱۳۰$$
$$m(۲) = \sqrt{۲} + ۲ \times ۲^۳ = ۱۷/۴$$
$$\Rightarrow ۱۳۰ - ۱۷/۴ = ۱۱۲/۶$$

ب)
$$m'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۶t^۲ \qquad f(۳) = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} + ۶ \times ۳^۲ = ۰/۲۸ + ۵۴ = ۵۴/۲۸$$

۴۱- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^{۲} - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰ , ۵]$ با هم برابرند؟

« **پاسخ** »

$f'(t) = ۲t - ۱$

$f(۵) = ۲۵ - ۵ + ۱۰ = ۳۰$

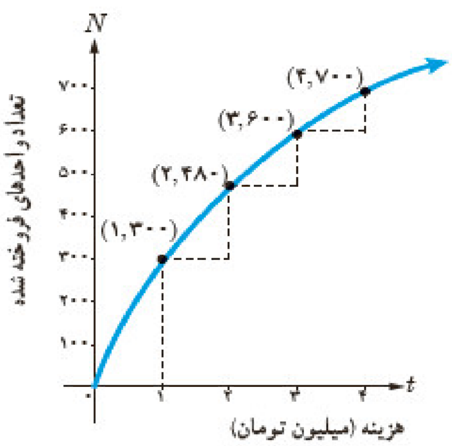
$f(۰) = ۰ - ۰ + ۱۰ = ۱۰$ $\Rightarrow$ سرعت لحظه ای متوسط $= \frac{۳۰ - ۱۰}{۵ - ۰} = ۴$

$۲t - ۱ = ۴ \Rightarrow ۲t = ۵ \Rightarrow t = ۲/۵s$

۴۲- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی‌که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟



« **پاسخ** »

الف) $\frac{N(۱) - N(۰)}{۱ - ۰} = \frac{۳۰۰ - ۰}{۱} = ۳۰۰$

$\frac{N(۲) - N(۱)}{۲ - ۱} = \frac{۴۸۰ - ۳۰۰}{۱} = ۱۸۰$

$\frac{N(۳) - N(۲)}{۳ - ۲} = \frac{۶۰۰ - ۴۸۰}{۱} = ۱۲۰$

$\frac{N(۴) - N(۳)}{۴ - ۳} = \frac{۷۰۰ - ۶۰۰}{۱} = ۱۰۰$

ب) چون شیب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تقعر رو به پایین است)

۴۳- یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + ۲t^{۳}$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی $[۳ , ۴]$ چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

آهنگ متوسط

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۴) - x(۳)}{۴ - ۳} \ (۰/۲۵) = \frac{۱۳۰ - \left(\sqrt{۳} + ۵۴\right)}{۱} \ (۰/۵) = ۷۶ - \sqrt{۳} \ (۰/۲۵)$$

۴۴- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۹$ چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\ \ (۰/۵)\Rightarrow m'(۹)=\frac{۱۰۹}{۶}\ \ (۰/۲۵)$$

۴۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\frac{x}{۲}+۱$ را به ازای $x_۱=۲$ و $h=۰/۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۰/۲}=\frac{۲/۱-۲}{۰/۲}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{۰/۱}{۰/۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲}$$

(صفحه ۱۲۶)

۴۶- اگر $P(t)=۲۰۰۰+۵۰۰t^{۲}$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت)،

الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۴ ساعت اول پس از زمان $t_۰=۱$ به دست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t=۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

الف) $\underbrace{\frac{p(۵)-p(۱)}{۴}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱۴۵۰۰-۲۵۰۰}{۴}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۳۰۰۰}_{(۰/۲۵)}$

ب) $p'(t)=۱۰۰۰t\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow p'(۲)=۲۰۰۰\ \ (۰/۲۵)$

صفحه ۱۳۰

۴۷- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=-x^{۲}+۵x$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از ۱ به ۳ تغییر می‌کند، بدست آورید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=\frac{۶-۴}{۲}}_{۰/۵}=۱\ \ ۰/۲۵$$

۴۸- معادله‌ی حرکت ذره‌ای به صورت $s = t^{۳} - ۴t^{۲} + ۲t + ۳$ است. (s برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است) شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = ۳t^{۲} - ۸t + ۲ \quad ۰/۵$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = ۶t - ۸ \quad ۰/۵$$

$$a(۳) = ۶(۳) - ۸ = ۱۰ \ \frac{cm}{s^{۲}} \quad ۰/۵$$

۴۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر می‌کند، به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}} = \frac{۵-۲}{۲۵-۴} = \frac{۳}{۲۱} \quad ۱$$

۵۰- معادله‌ی حرکت یک متحرک به‌صورت $f(t) = ۵t + ۲$ می‌باشد. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $t_{۱} = ۱$ به $t_{۲} = ۳$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{۲}) - f(t_{۱})}{t_{۲} - t_{۱}} = \frac{f(۳) - f(۱)}{۳-۱} = \frac{۱۷ - ۷}{۲} = ۵$$

۵۱- متحرکی که بر محور x ها در حرکت است، دارای معادله‌ی $x = ۳t^{۲} - ۴t + ۱$ می‌باشد. (t را بر حسب ثانیه و x را بر حسب سانتی‌متر بگیرید.)

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t = ۱$ و $t = ۳$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t = ۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

الف) سرعت متوسط $= \frac{f(۳) - f(۱)}{۳ - ۱} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \quad ۰/۵$

ب) $f'(x) = ۶t - ۴ \quad ۰/۲۵ \longrightarrow f'(۲) = ۸ = V(۲) \quad ۰/۲۵$

۵۲- معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $x = t^۲ + ۵t + ۶$ می‌باشد. اولاً: سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی از لحظه‌ی $t = ۳$ تا $t = ۵$ بدست آورید. ثانیا: آهنگ آنی تغییرات x را در $t = ۲$ بدست آورید.

« **پاسخ** »

$$t_۲ = ۵ \Rightarrow x_۲ = ۵۶$$
$$t_۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۳۰$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۵۶ - ۳۰}{۵ - ۳} = \frac{۲۶}{۲} = ۱۳$$
$$x' = ۲t - ۵ \xrightarrow{t = ۲} x'(۲) = -۱$$

۵۳- توپی را با سرعت اولیه ۲۰ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت، از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $x = f(t) = -۴/۹t^۲ + ۲۰t$ است. مطلوب است محاسبه:

الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاپ؟

ب) سرعت متوسط توپ از لحظه پرتاب تا پایان ثانیه دوم ($t = ۰$ تا $t = ۲$)؟

« **پاسخ** »

الف)
$$V = x' = f'(x) = -۹/۸t + ۲۰$$
$$f'(۱) = -۹/۸ \times ۱ + ۲۰ = ۱۰/۲$$

ب) سرعت متوسط $\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{-۴/۹ \times ۲^۲ + ۲۰ \times ۲ - ۰}{۲} = ۱۰/۲$

۵۴- معادله‌ی حرکت یک متحرک به صورت $y = x^۲ - x + ۱$ است. آهنگ آنی تغییرات y را در $x = ۵$ حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$y = x^۲ - x + ۱ \rightarrow y' = ۲x - ۱ \rightarrow y'(۵) = ۹$$

۵۵- متحرکی بر محور xها در حرکت است و دارای معادله‌ی $x(t) = t^۲ + ۴t + ۱$ می‌باشد.

اولا: سرعت متوسط متحرک را در فاصله زمانی $t_۱ = ۱$ و $t_۲ = ۳$ به دست آورید.

ثانیا: سرعت لحظه‌ای در $t = ۳$ را به دست آورید. (t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی‌متر)

« **پاسخ** »

$$x(t) = t^۲ + ۴t + ۱ \rightarrow \begin{cases} x(۱) = ۶ \\ x(۳) = ۲۲ \end{cases}$$

سرعت متوسط: $\frac{x(۳) - x(۱)}{۳ - ۱} = \frac{۲۲ - ۶}{۲} = ۸$

سرعت لحظه‌ای: $x'(t) = ۲t + ۴ \rightarrow x'(۳) = ۱۰$

۵۶- متحرکی که بر محور xها در حرکت است دارای معادله‌ی $x = t^{۲} - ۲t - ۱$ است (t را بر حسب ثانیه و x را سانتی‌متر بگیرید). سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t = ۱$ و $t = ۴$ و سرعت لحظه‌ای آن را در زمان‌های $t = ۰$ و $t = ۱$ و $t = ۳$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۴) - x(۱)}{۴ - ۱} = \frac{۷ - (-۲)}{۳} = ۳$$

$$x'_t = v_t = ۲t - ۲ \Rightarrow v(۰) = -۲ \quad , \quad v(۱) = ۰ \quad , \quad v(۳) = ۴$$

۵۷- اگر $p(t) = ۳۰۰۰ + ۱۰۰t^{۲}$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t بر حسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t_۰ = ۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(۷) - P(۲)}{۷ - ۲} = \frac{\cancel{۳۰۰۰} + ۱۰۰(۷)^{۲} - \cancel{۳۰۰۰} - ۱۰۰(۲)^{۲}}{۵} = \frac{۱۰۰(۴۹ - ۴)}{۵} = ۲۰ \times ۴۵ = ۹۰۰$$

۵۸- تابع $f(x) = x^{۲} + ۶x - ۷$ داده شده است.
آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه‌ی $x_۰ = ۴$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۲x + ۶ \Rightarrow f'(۴) = ۲(۴) + ۶ = ۱۴$$

۵۹- تابع $f(x) = x^{۲} + ۶x - ۷$ داده شده است.
آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_۱ = ۲$ به $x_۲ = ۶$ تغییر کند، تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} f(۶) = ۳۶ + ۳۶ - ۷ = ۶۵ \\ f(۲) = ۴ + ۱۲ - ۷ = ۹ \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{f(۶) - f(۲)}{۶ - ۲} = \frac{۶۵ - ۹}{۴} = \frac{۵۶}{۴} = ۱۴$$

۶۰- توپی را با سرعت اولیه ۷۸/۴ متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبه‌ی (الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه (ب) سرعت لحظه‌ای در پایان ۴ ثانیه (ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه (د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت (هـ) مدتی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد. (و) سرعت لحظه‌ای توپ وقتی که به زمین برسد.

« **پاسخ** »

$$S = \frac{-۱}{۲} g t^{۲} + V_{۰} t \Rightarrow S = -۴/۹ t^{۲} + ۷۸/۴ t$$

الف) $S'_t = -۹/۸t + ۷۸/۴ \rightarrow S'(۱) = -۹/۸ + ۷۸/۴ = ۶۸/۶ \frac{m}{s}$

ب) $S'(۴) = V(۴) = -۹/۸(۴) + ۷۸/۴ = ۳۹/۲ \frac{m}{s}$

ج) $V(t) = ۰ \Rightarrow t = \frac{۷۸/۴}{۹/۸} = ۸s$

د) $S(۸) = -۴/۹ \times ۶۴ + ۷۸/۴ \times ۸ = ۳۱۳/۶m$

هـ) $S = ۰ \Rightarrow t = \frac{۷۸/۴}{۴/۹} = ۱۶s$

و) $V(۱۶) = -۷۸/۴ \frac{m}{s}$