

"مشقات"

بانام ویا در خدا

شاد و بخوار را شادای:

(۱) دوره شاد و مقادیر مانع و منیم هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = -2 + 5 \sin 4x$

ب) $y = \sqrt{2} - 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

ج) $y = 3\sqrt{2} \sin\left(-\frac{1}{\pi}x\right)$

د) $y = -\pi \cos(2x) - 1$

ث) $y = 3 + \sqrt{2} \tan(x)$

(۲) دوره شاد هر یک از توابع زیر را بدست آورید و بخوار آنها را در یک دوره شاد رسم کنید:

الف) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

ب) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow y = r + \sin(fr)$$

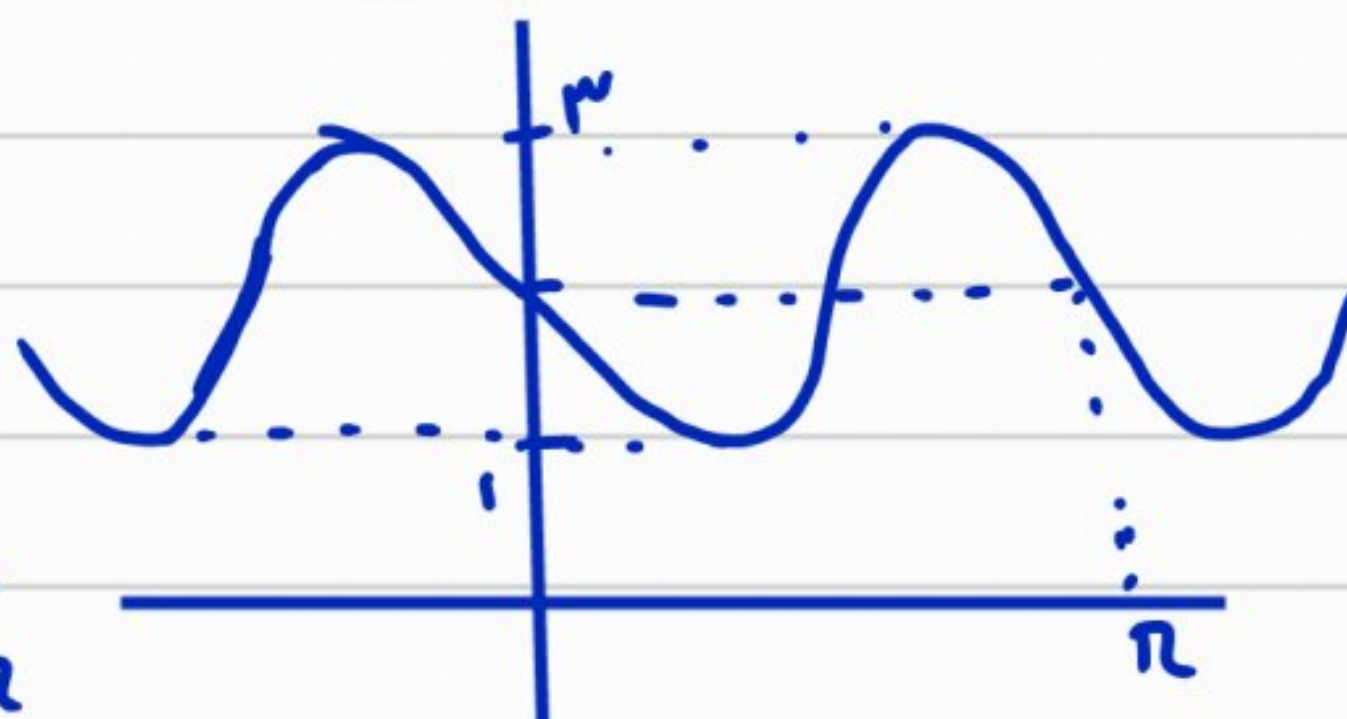
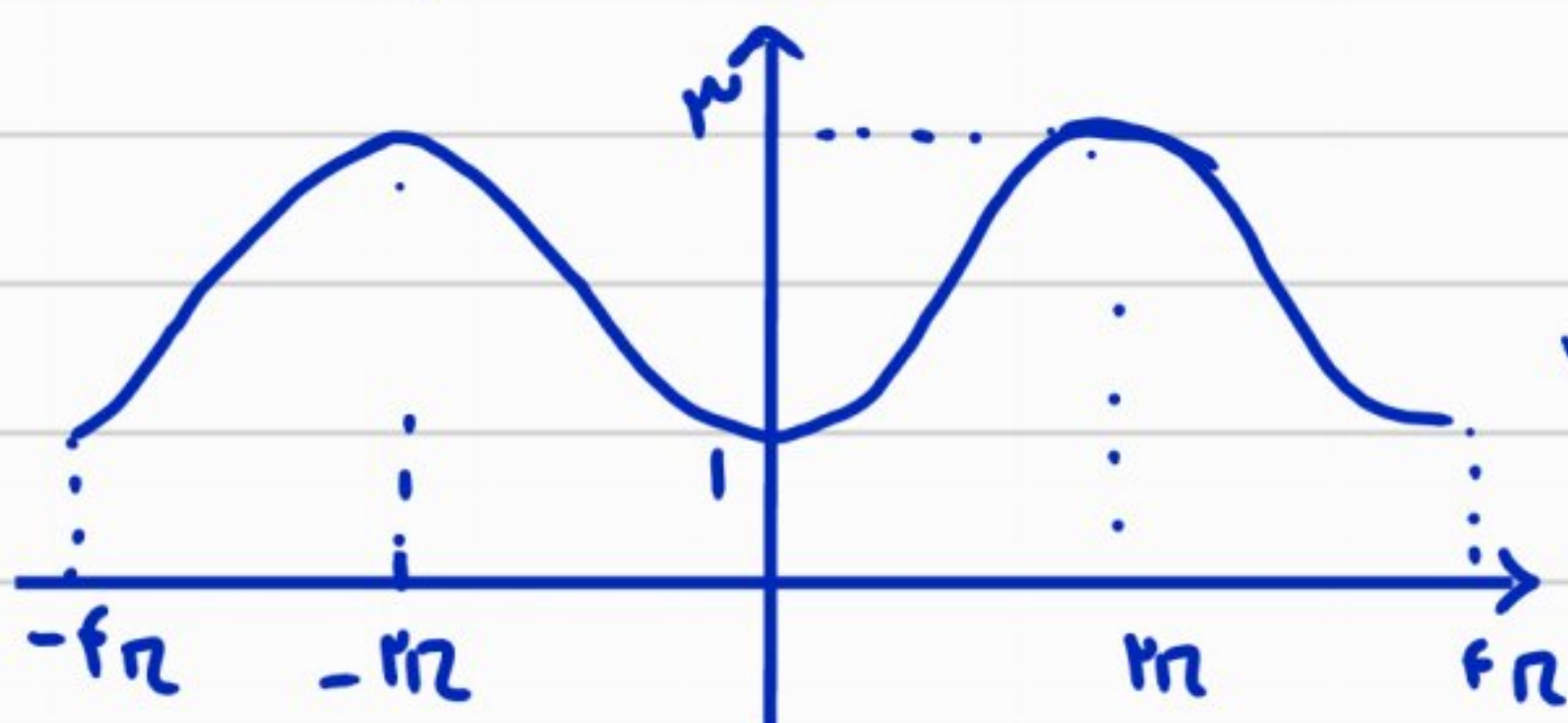
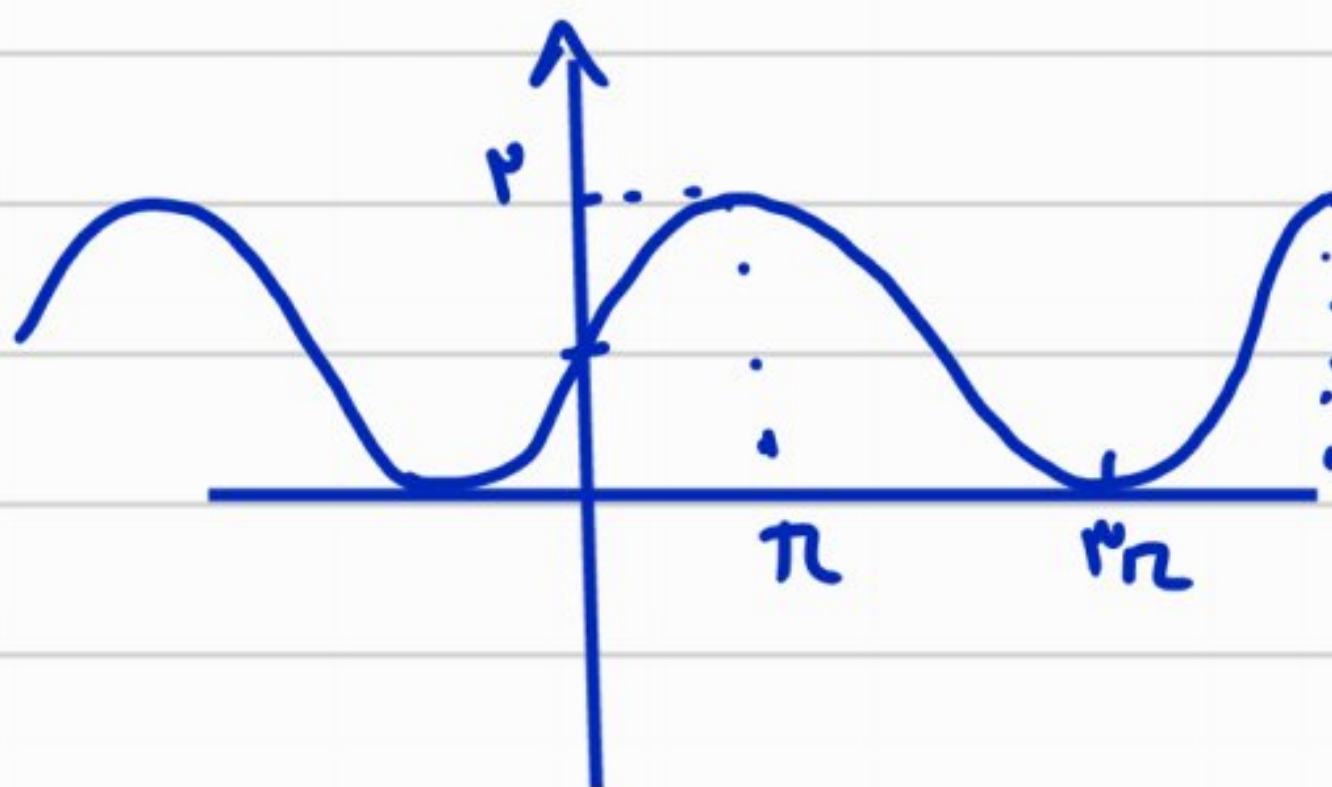
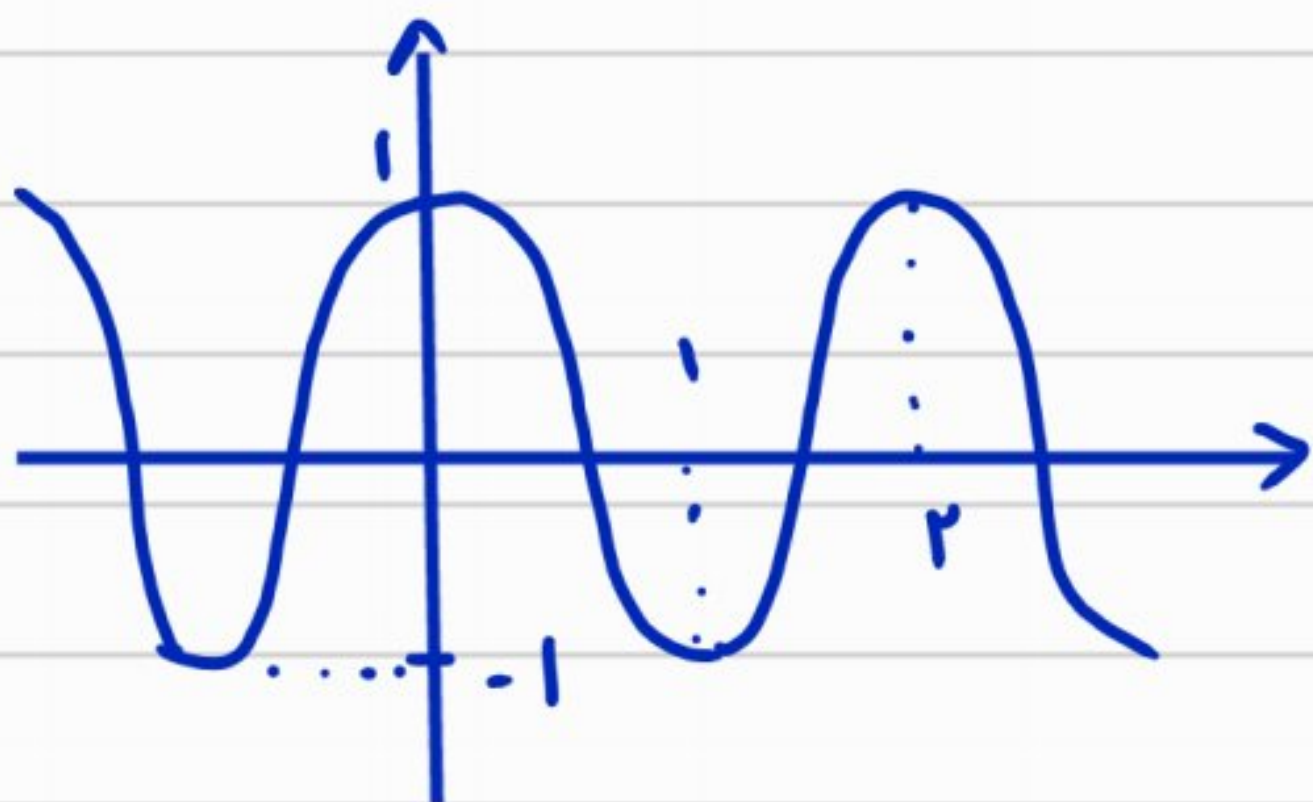
(۳) هکت از توابع دایره را با نمودارهای زیر نظر کنید :

$$۱) y = \cos(\pi x)$$

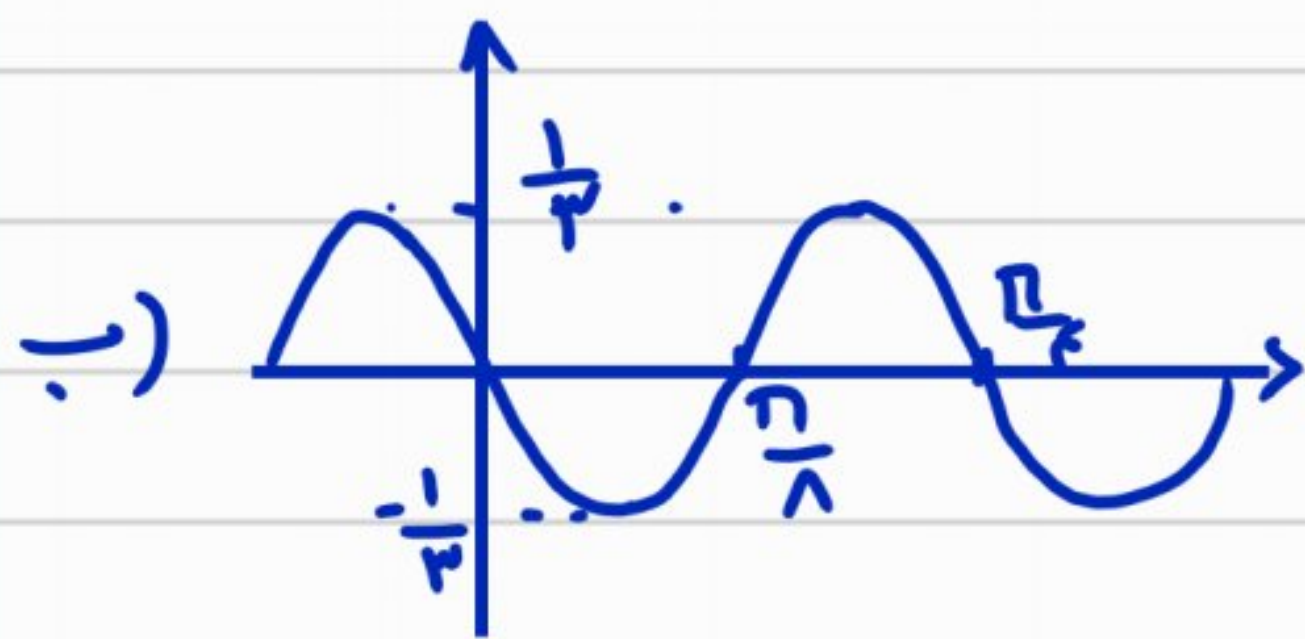
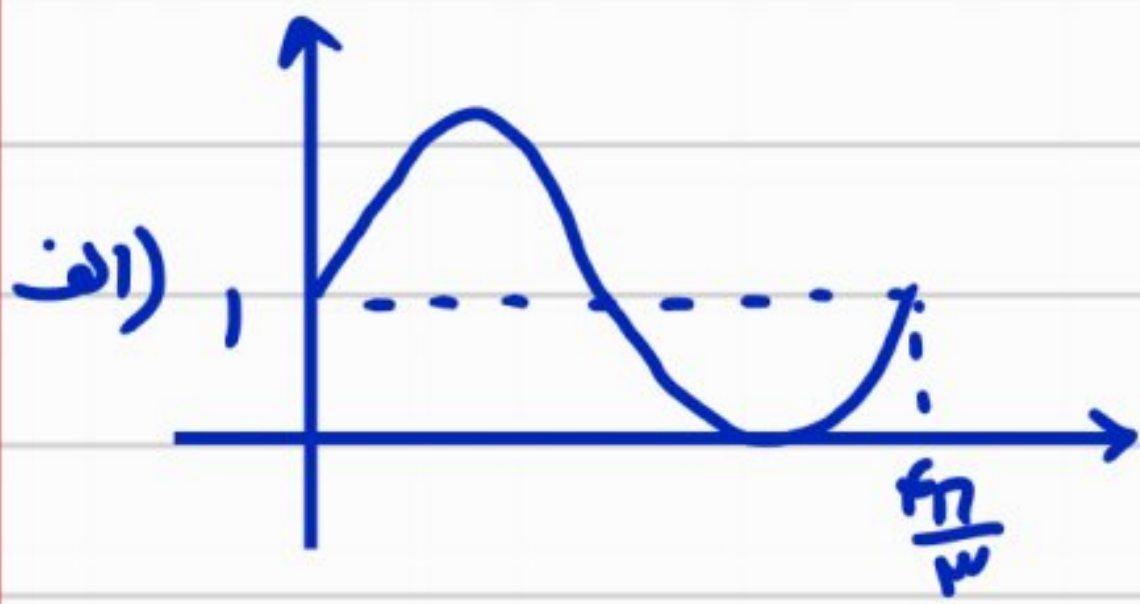
$$۲) y = r - \sin(fr)$$

$$۳) y = r - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)$$

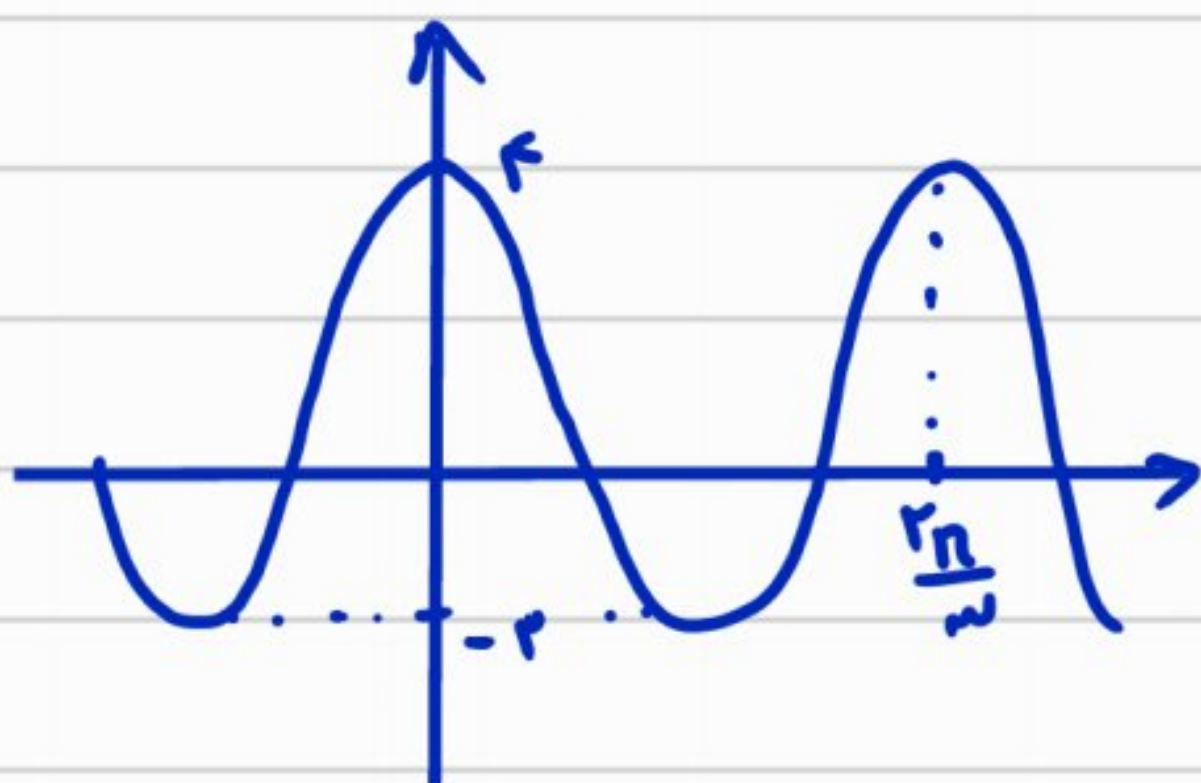
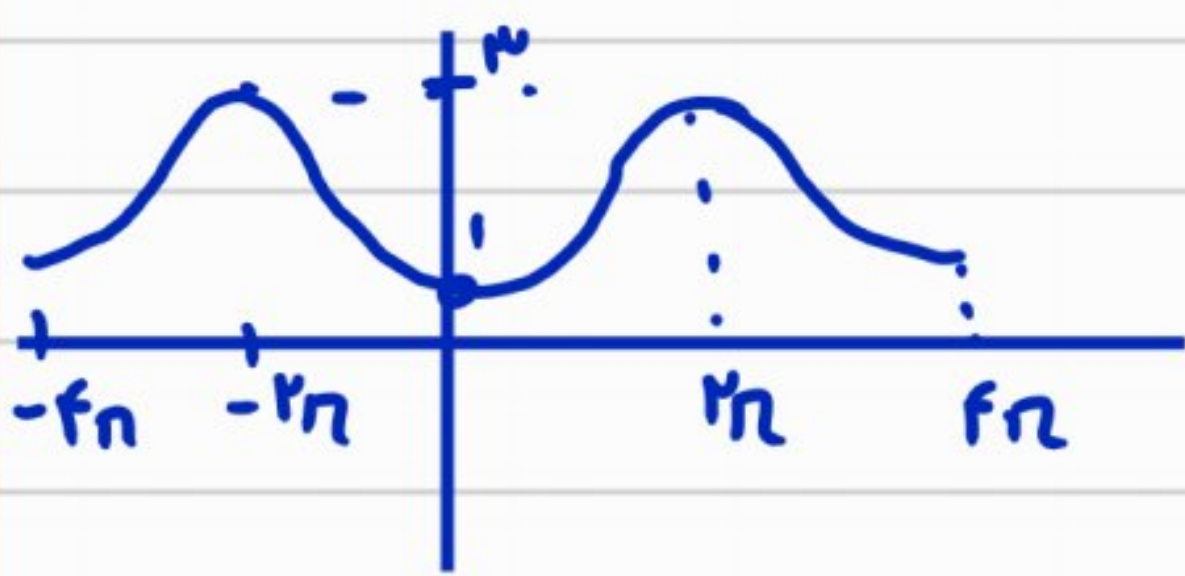
$$۴) y = \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) + 1$$



(۴) قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ رسم شده است. مقادیر a و b و c را تعیین کنید.



(۵) ضابطه مربوط به یک نمودار داده شده است. صورت $y = a \cos(bx) + c$ را بنویسید.



نسبہ کر مثلثاتی زوایاں دوبرابر کمان :

(۶) مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

(۷) اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه حاده باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha$$

(۸) فرض کنید $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

(۹) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید:

۱۰ درستی سادگی را زیر آنگاه کنید:

$$\text{الف) } \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

$$\text{ب) } \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

$$\text{ج) } \frac{2}{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$$

۱۱ اگر $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = 3$ باشد مقادیر مثبت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را بدست آورید.

مدرس : نسیمہ دهنوی

معادلات مثلثی :

(۱۳) کویک معادلات زیری اعلیٰ نسیم :

$$\text{الف) } 2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2\cos x + 1) + 1$$

$$ج.) (1 + \tan^2 n) \cos^3 n + 1 = 2 \sin^2 n$$

۱۳ خط $y = \frac{1}{2}$ خود را، تابع $y = \cos 2n$ را در y بر خط $y = \frac{1}{2}$ قطع می کند.

مدرس: نسیمہ دهنوی

$y = a \sin(bx) + c$
 $\max: |a| + c$
 $\min: -|a| + c$
 "مسلکات"
 $T = \frac{2\pi}{|b|}$

بانام و یاد خدا

شاد و بخودار را شاد می: (1)

$y = a \tan bx + c$
 $T = \frac{\pi}{|b|}$

دوره شاد و مقدار ماکزیم و منیم هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = \frac{-2}{c} + 5 \sin 4x \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$, $\max = 5 - 2 = 3$
 $\min = -5 - 2 = -7$

ب) $y = \sqrt{2} - 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$, $\max = 3 + \sqrt{2}$
 $\min = -3 + \sqrt{2}$

ج) $y = 3\sqrt{2} \sin\left(-\frac{1}{\pi}x\right) \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|-\frac{1}{\pi}|} = 4\pi$, $\max = 3\sqrt{2}$
 $\min = -3\sqrt{2}$

د) $y = -\pi \cos(2x) - 1 \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$, $\max = \pi - 1$
 $\min = -\pi - 1$

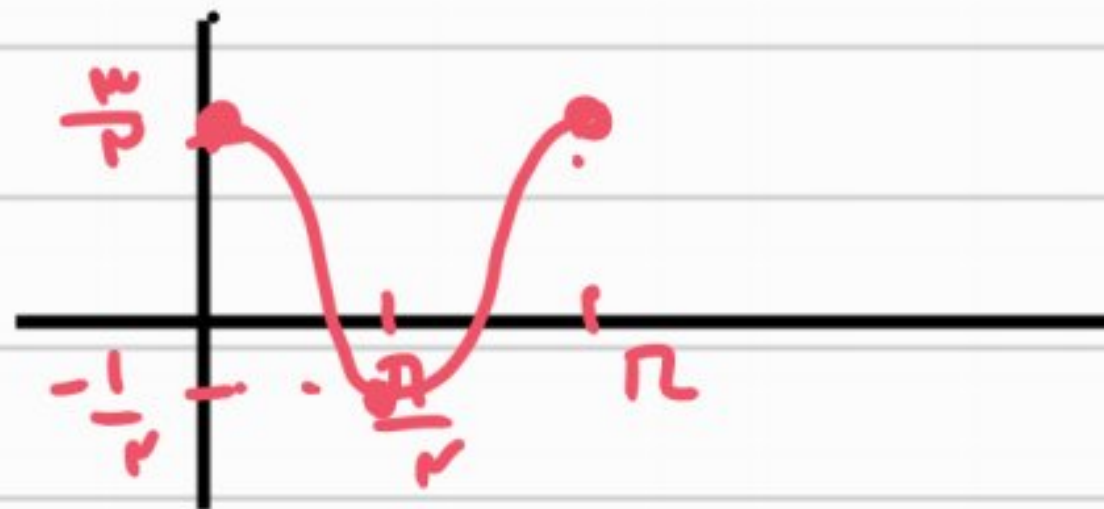
ه) $y = 3 + \sqrt{2} \tan(x) \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{|1|} = \pi$



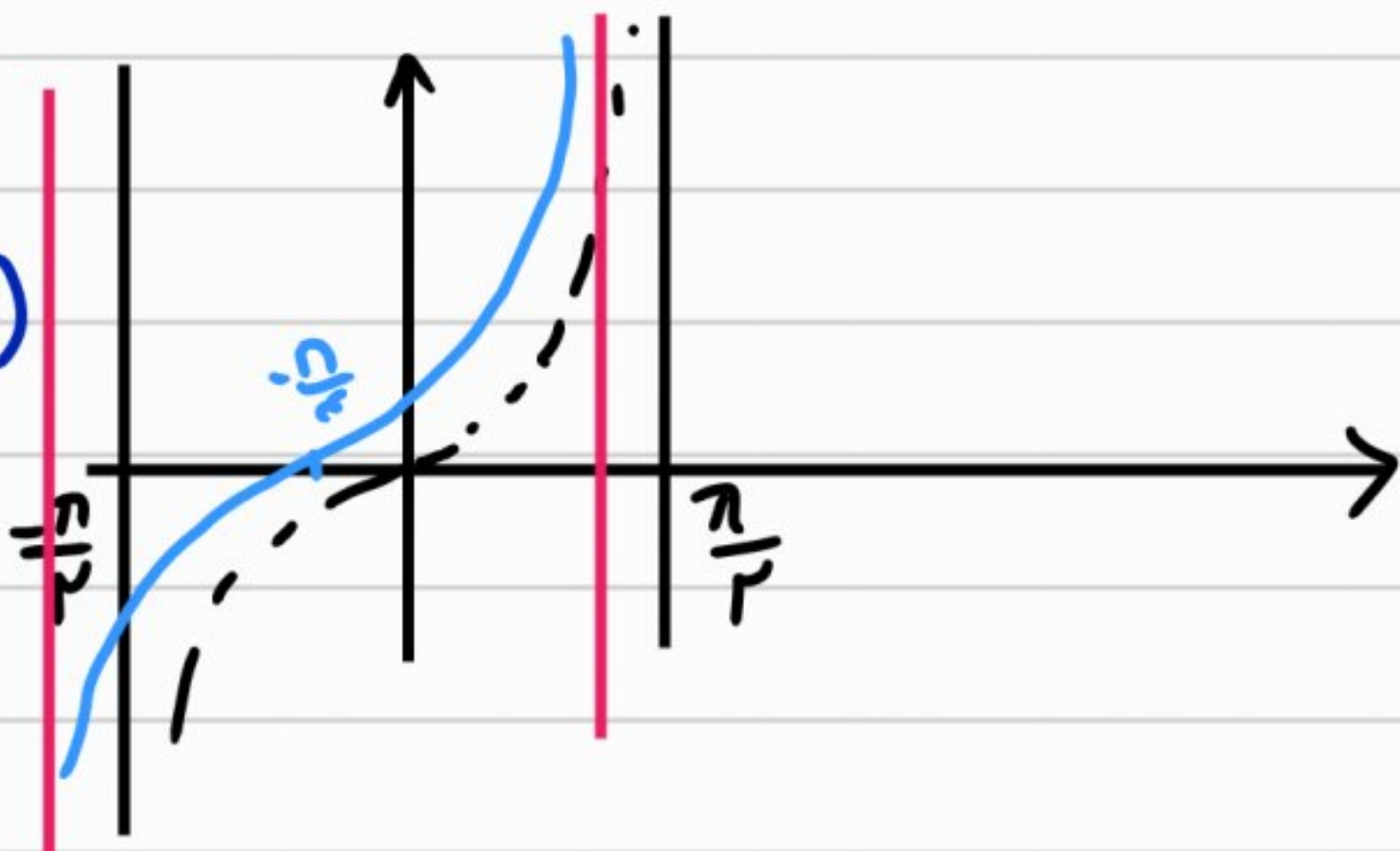
(2) دوره شاد هر یک از توابع زیر را بدست آورید و بخودار آنها را در یک دوره شاد رسم کنید:

الف) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$



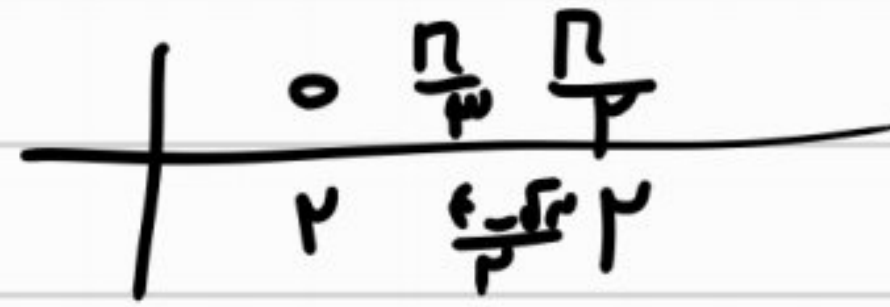
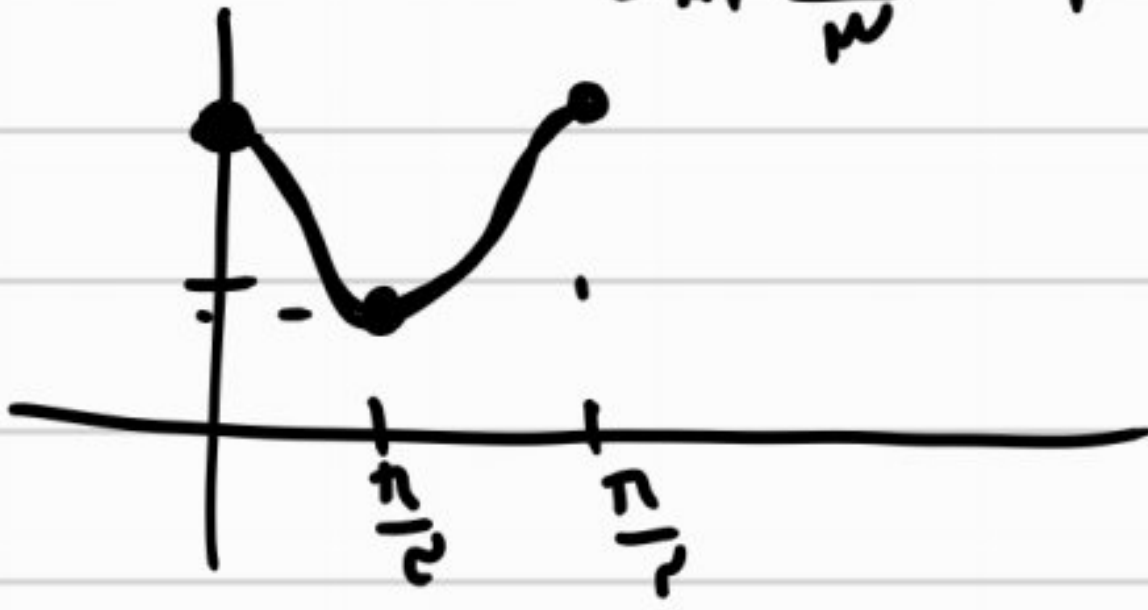
ب) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



$$\Rightarrow y = r + \sin(\frac{x}{r})$$

$$\sin \frac{x}{r} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{r}$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{r}} = 2\pi r$$



(۳) هکت از توابع دایره شده را با نمودارهای زیر نظر کنید:

max: 1
min: -1

$$1) y = \cos(\pi x)$$

$$2) y = r - \sin(\frac{x}{r})$$

min = 1

max = r

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{r}} = 2\pi r$$

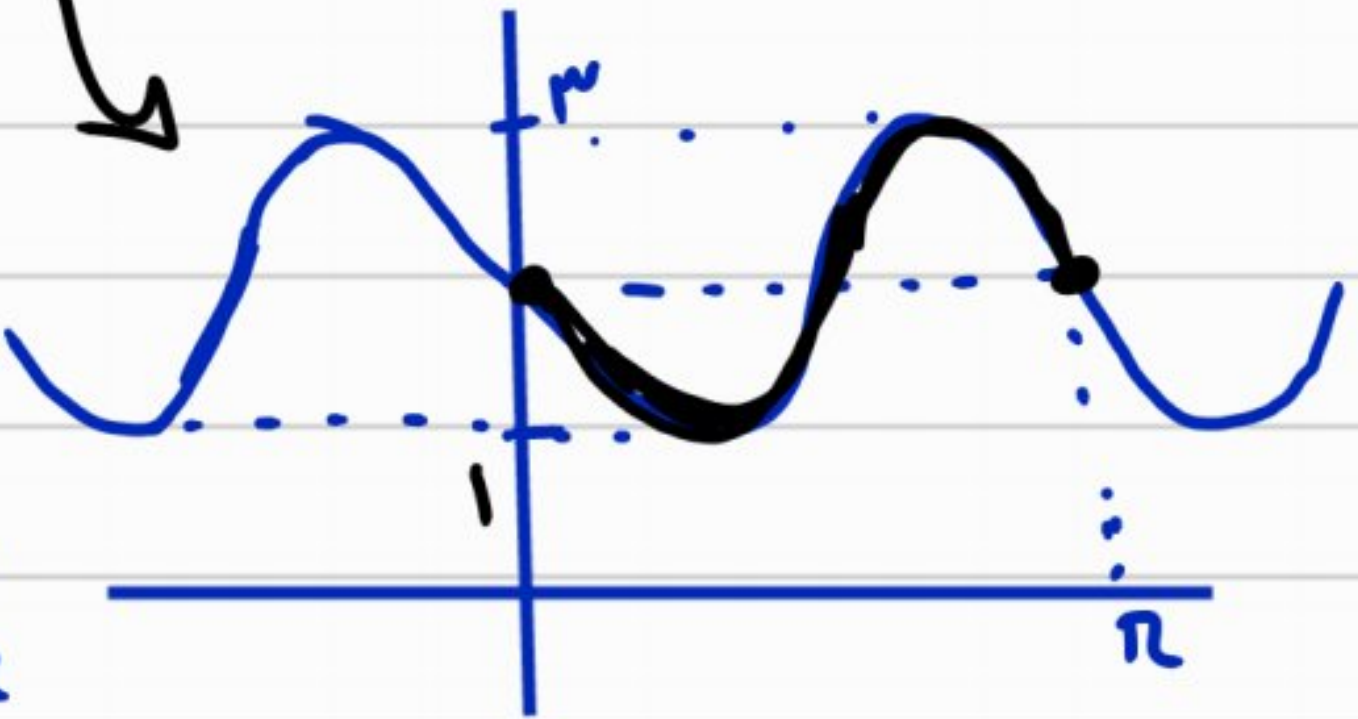
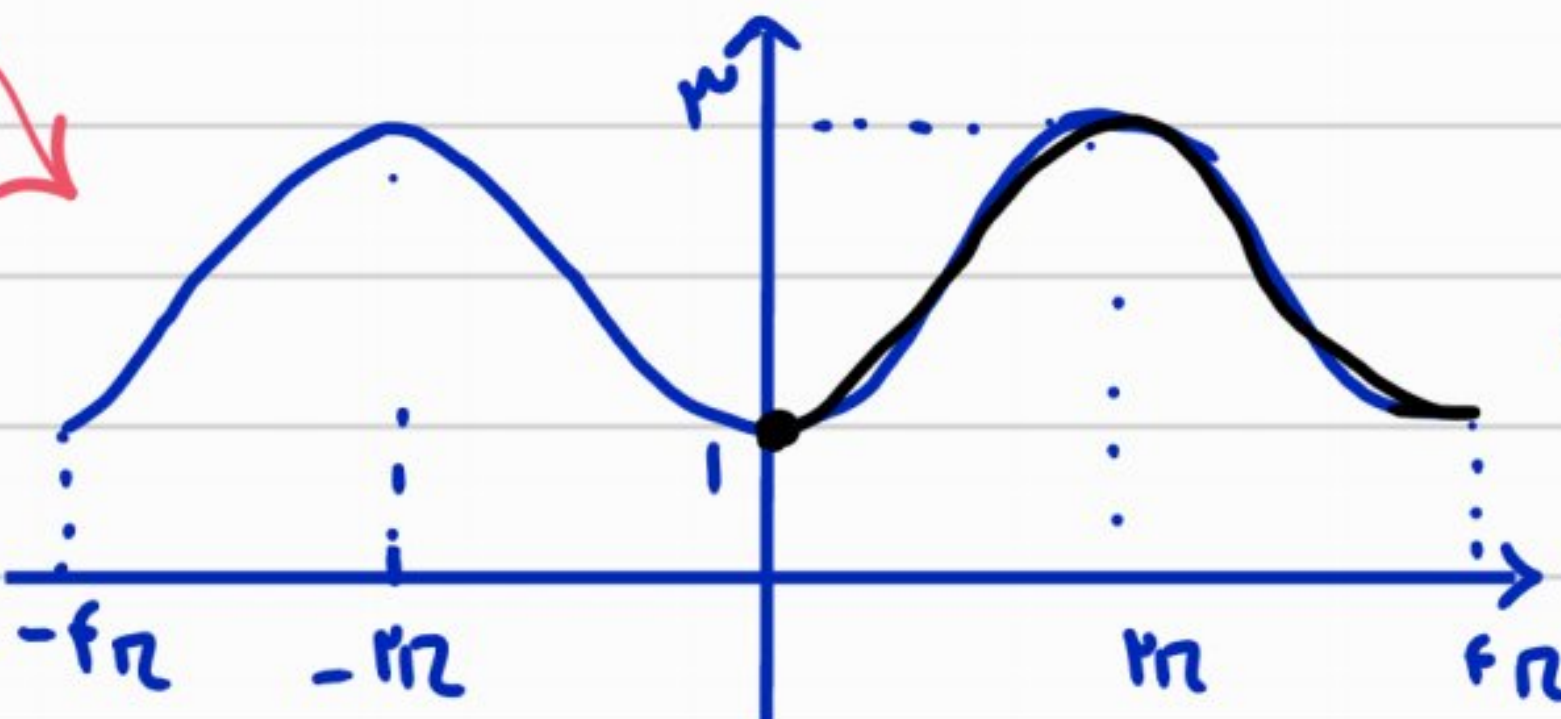
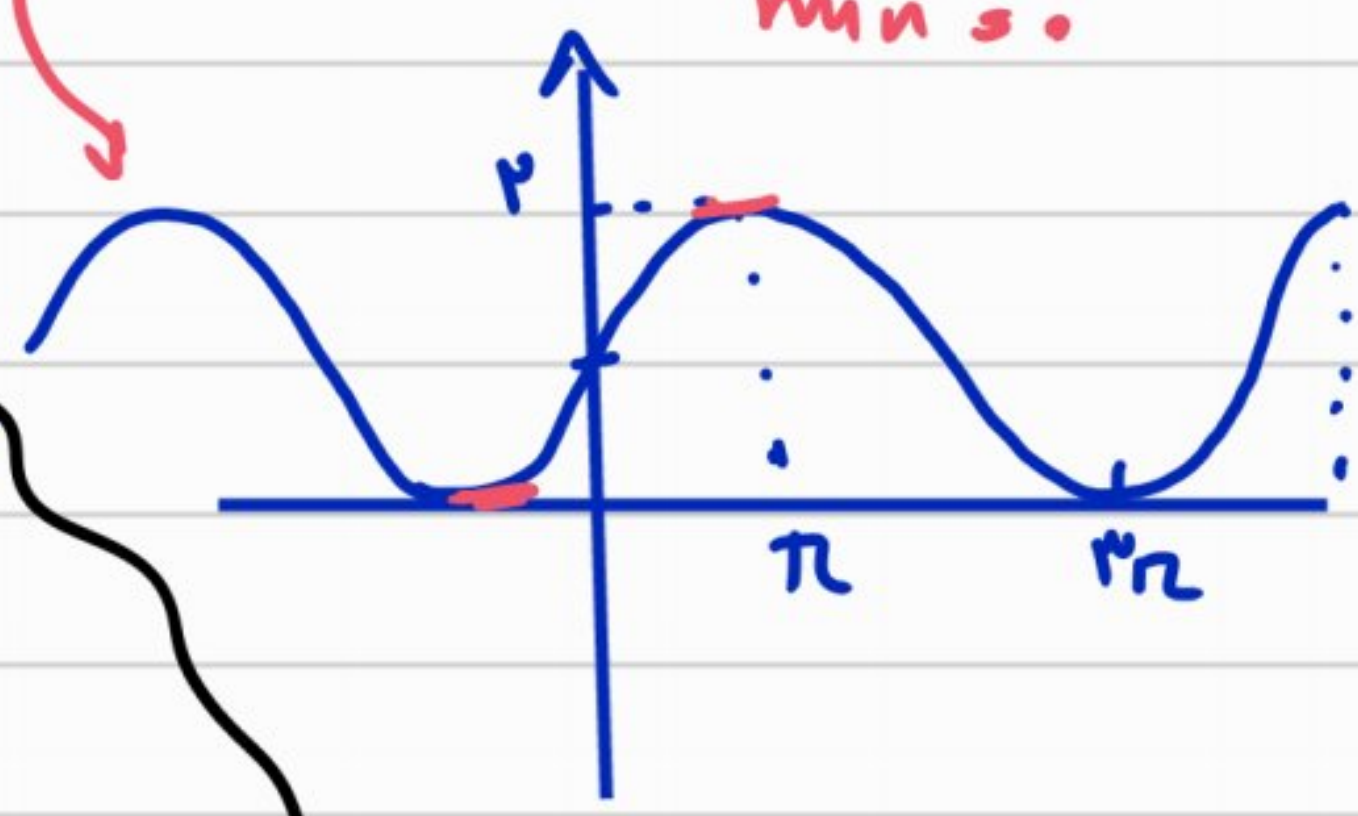
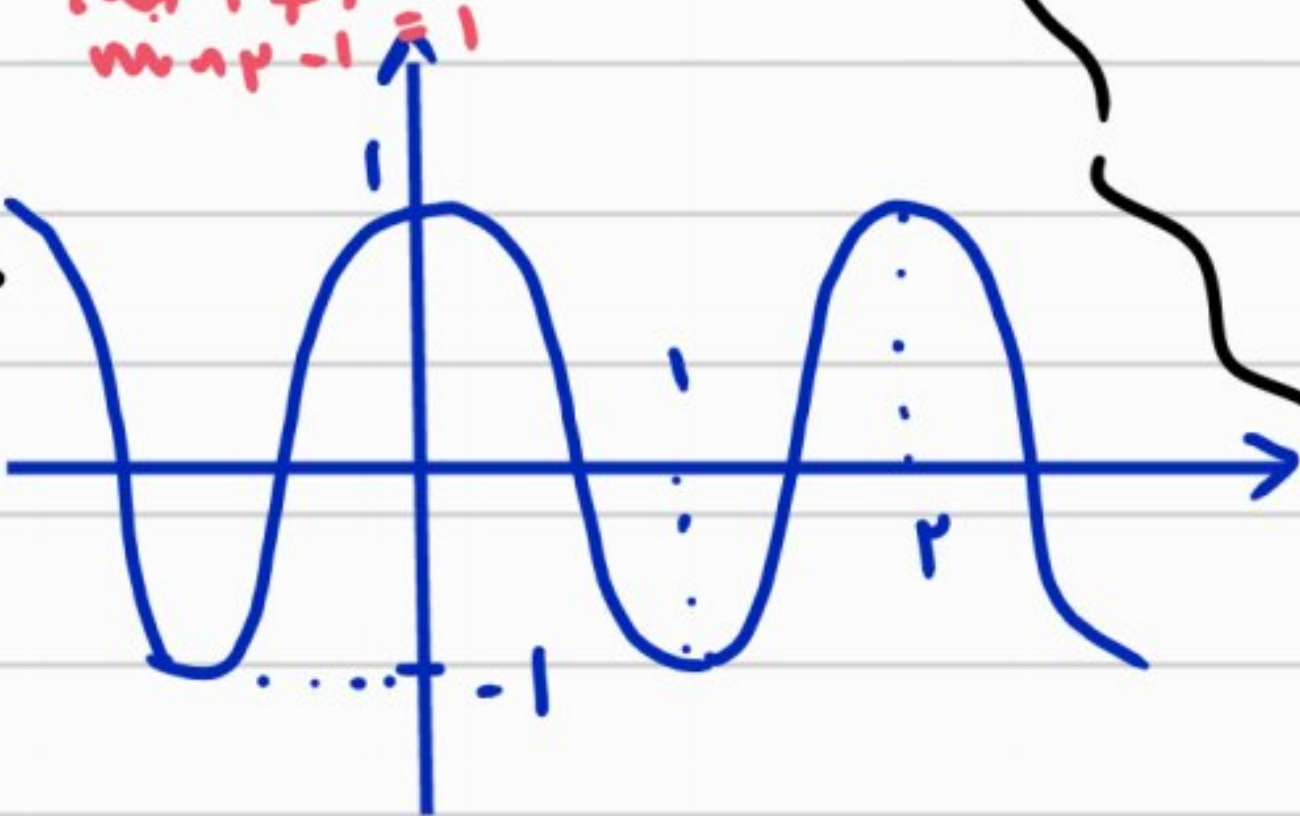
$$3) y = r - \cos(\frac{x}{r})$$

max: r+1
min: -1

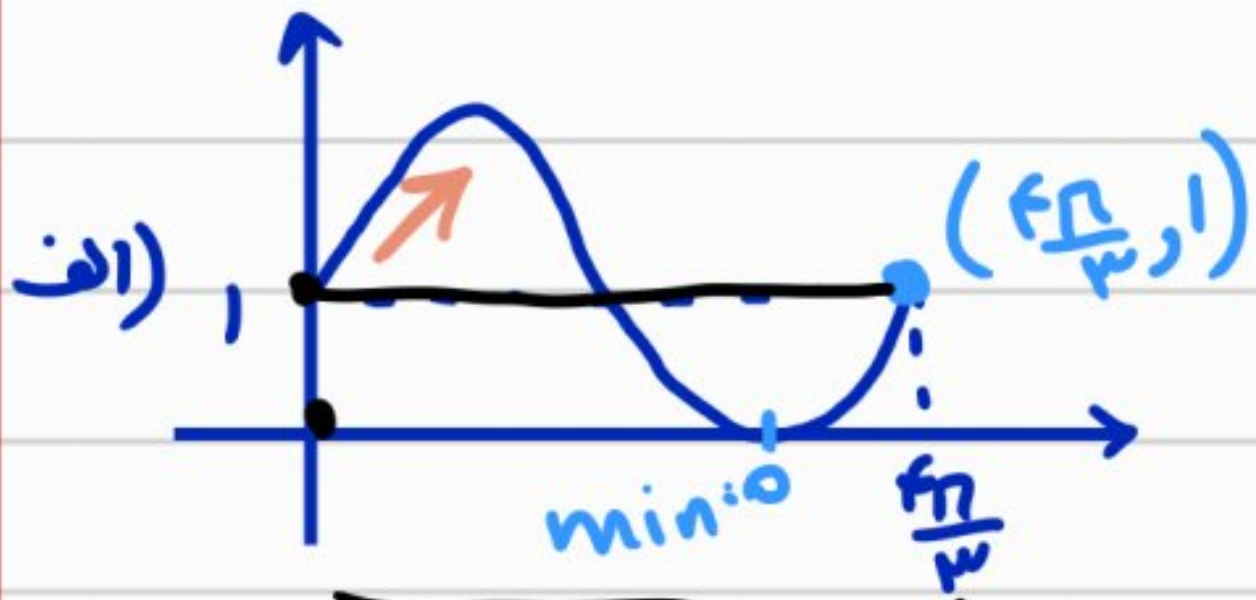
$$4) y = \sin(\frac{x}{r}) + 1$$

max: r

min: 0



۴) قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ رسم شده است. مقادیر a و b و c را تعیین کنید.



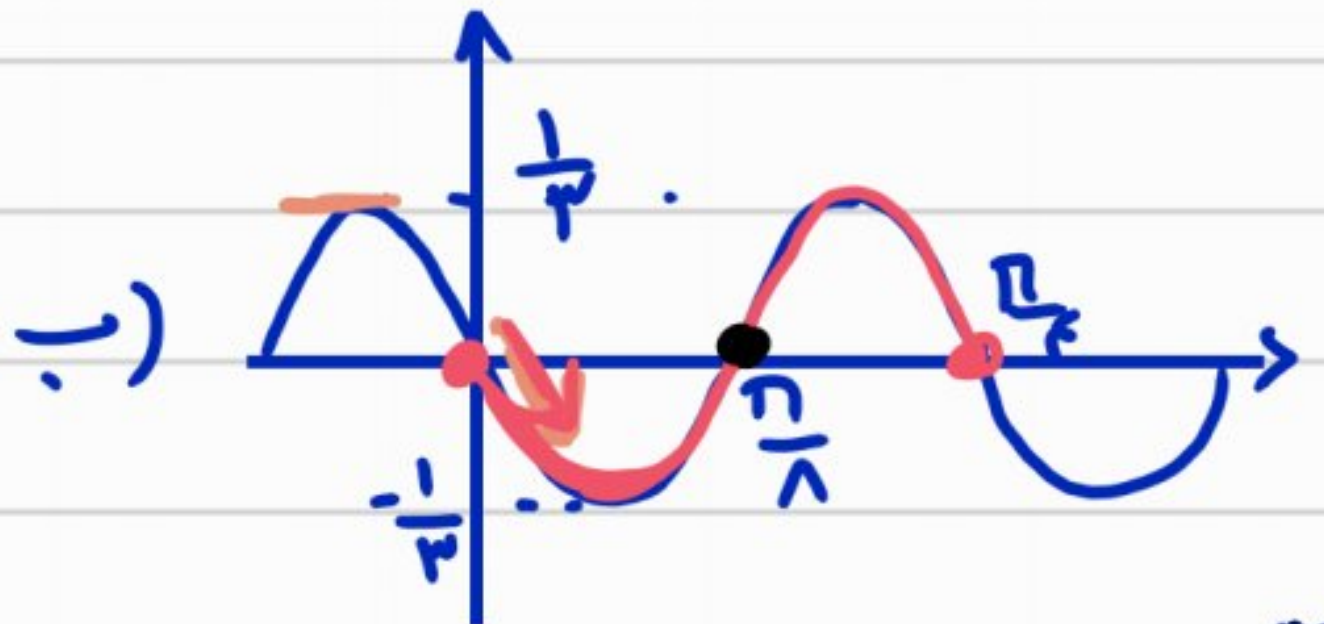
$$ax - 1 + c = 0$$

$$-a + c = 0$$

$$1 = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c \Rightarrow c = 1$$

$$-a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$T = \frac{\pi}{b} \Rightarrow \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = 2$$



$$\text{Max: } \frac{1}{2} = a \times 1 + c$$

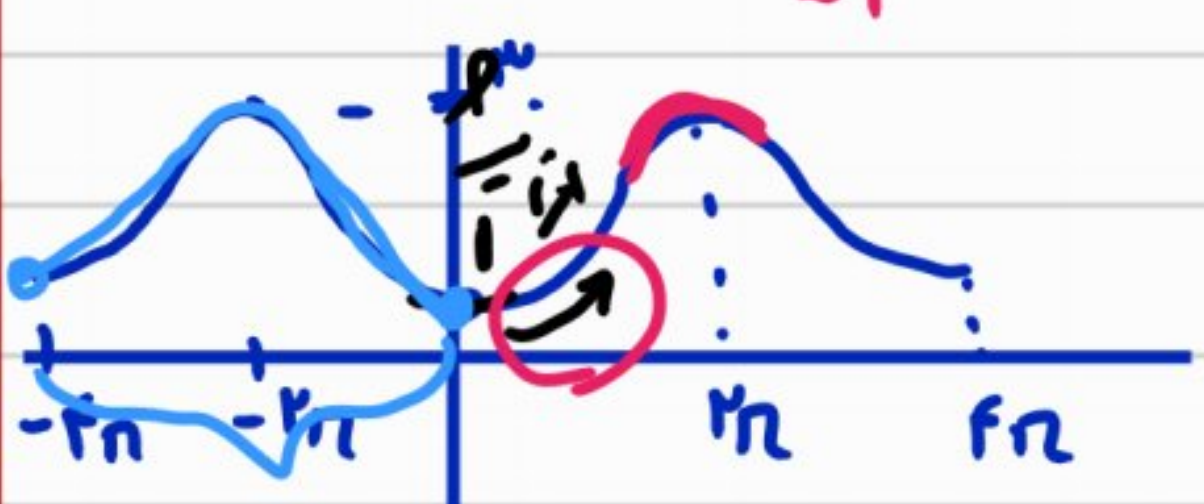
$$-a + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 0$$

$$\text{min: } -\frac{1}{2} = a \times 1 + c$$

$$a + c = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = -1$$

۵) ضابطه مربوط به نمودار داده شده رسم شده است. ضابطه آن را بنویسید.



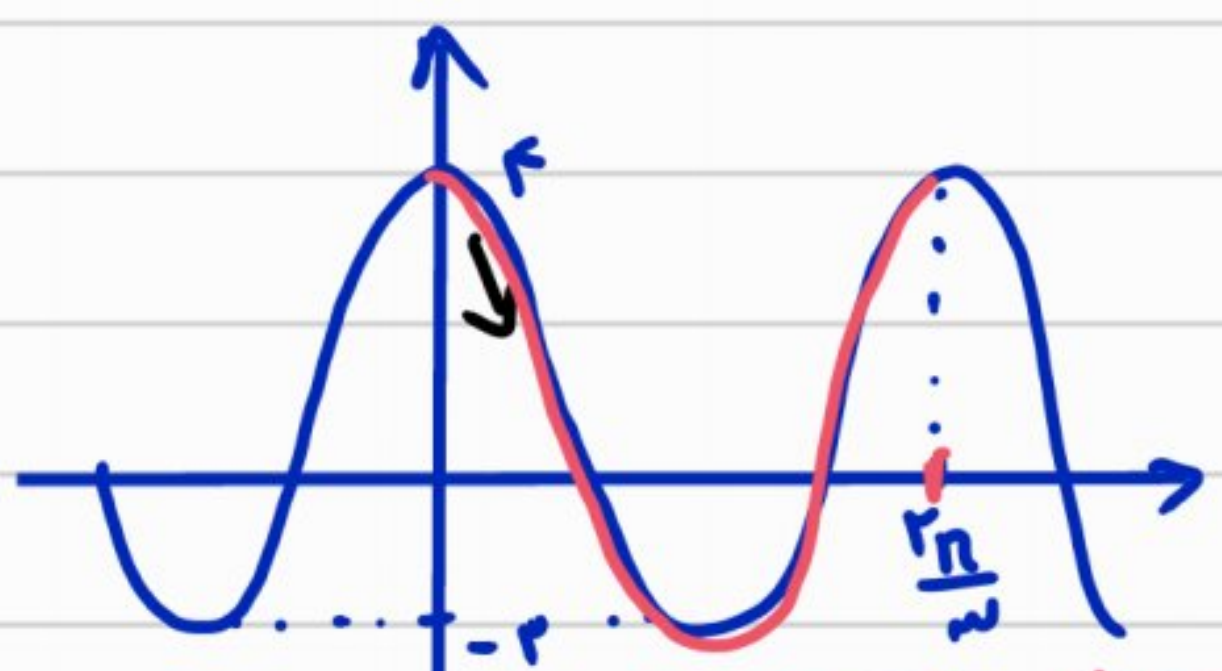
$$\text{min: } 1 = a \times 1 + c \rightarrow a + c = 1$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ -a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow c = 2$$

$$\text{Max: } 2 = a \times 1 + c \rightarrow -a + c = 2$$

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$



$$\text{Max: } 1 = a \times 1 + c \rightarrow a + c = 1$$

$$\text{min: } -1 = a \times 1 + c \rightarrow -a + c = -1$$

$$a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دوبرابرمان:

(۶) مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(۷) اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و زاویه α تند باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = 2 \times \frac{16}{25}$$

$$1 - \frac{16}{25} = \cos^2 \alpha$$

$$\frac{9}{25} = \cos^2 \alpha$$

(۸) فرض کنید $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \times \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2 \times \frac{1}{5}$$

$$1 - \frac{8}{5} = \cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(۹) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید:

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

۱۰ درستی سادها را زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \tan \alpha$: طرفین $\frac{\cancel{\sin^2 \alpha} \cos \alpha}{\cancel{\cos^2 \alpha}} = \tan \alpha$

ب) $\frac{\cancel{r} \sin^2 n \cos n}{\cos^2 n - \sin^2 n} = \tan n$ \rightsquigarrow $\frac{\sin^2 n}{\cos^2 n} = \tan n$ طرفین

ج) $\frac{r}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin^2 \alpha$

د) $\frac{r}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \left(\frac{r}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} \right) = r \sin \alpha \cos \alpha$ \therefore طرفین $\sin^2 \alpha$

۱۱ اگر $\frac{\sin^2 n}{1 - \cos^2 n} = 3$ باشد مقادیر مثبت $\sin n$ و $\cos n$ را بدست آورید.

$1 + \tan^2 n = \frac{1}{\cos^2 n}$

$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 n} \rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 n}$

$\cos n = \pm \sqrt{\frac{9}{10}}$ توجه

$\sin^2 n = 1 - \cos^2 n = 1 - \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\sin n = \pm \sqrt{\frac{1}{10}}$ توجه

نسبت دهنده

$\frac{\cancel{\sin^2 n} \cos n}{\cancel{\sin^2 n}} = 3$

$\Rightarrow \cot n = 3$

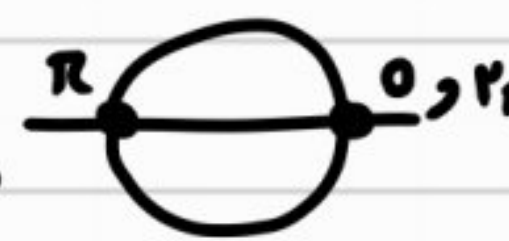
$\tan n = \frac{1}{3}$

معادلات مثلثاتی :

مدرس : نسیمہ دهنوی

(۱۳) حرکت معادلات زیری اصل کنید :

(الف) $r \sin^2 \alpha + \sqrt{r} \sin \alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha (r \sin \alpha + \sqrt{r}) = 0$

$\sin \alpha = 0 \rightarrow$  $\Rightarrow \alpha = k\pi$ ✓

$r \sin \alpha = -\sqrt{r} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{r}}{r}$

حقیقت $\alpha = 2k\pi + \alpha$
 $\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha$

$\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}}$ ✓
 $\alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}}$ ✓

$\Rightarrow \cos^2 \alpha - \cos \alpha + 1 = 0$

$\times 1 + \cos^2 \alpha = r \cos \alpha$

$r \cos^2 \alpha - \cos \alpha = 0$

$\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\cos \alpha (r \cos \alpha - 1) = 0$

$r \cos \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{r} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{1}{r}$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$

حقیقت $\alpha = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$

$\sin^2 \alpha = -\sin^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = \sin^2(\pi - \alpha)$

$\alpha = 2k\pi + (-\alpha)$

$\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow 2\alpha = 2k\pi + \pi$

$2\alpha = 2k\pi \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$

$2\alpha = 2k\pi + \pi \rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{r} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) = 0$

$-\cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0 \rightarrow r \cos^2 \alpha = r \cos \alpha$

$r \alpha = r \cos \alpha \pm \alpha \Rightarrow r \alpha = r \cos \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = r \cos \alpha$

$r \alpha = r \cos \alpha - \alpha \Rightarrow r \alpha = r \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{r \cos \alpha}{r}$

$\Rightarrow \cos \alpha (r \cos \alpha + 1) + 1 = 0$

$r \cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1 = 0$

$\cos \alpha = t$

$r t^2 + t + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(r)(1) = 1 - 4r = 9$

$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r}} \rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2r} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 + 3}{2r} = \frac{2}{2r} = \frac{1}{r} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{r} \\ \frac{-1 - 3}{2r} = \frac{-4}{2r} = -\frac{2}{r} = -1 \Rightarrow \cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha = (2k+1)\pi \end{array} \right.$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

2.) $(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + 1 = r(1 - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \cos^2 \alpha + 1 = r - r \cos^2 \alpha$$

$$r \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

$$r t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(r)(-1) = 1 + 4 = 9$$

$$\cos^2 \alpha = t$$

$$\rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{r}$$

$$t = \frac{-1 + 3}{r} = \frac{2}{r} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2}{r}$$

$$\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

$$t = \frac{-1 - 3}{r} = -\frac{4}{r} = -1$$

$$\cos^2 \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\pi$$

$[-\pi, \pi]$ در بازه

خط $y = \frac{1}{r}$ خود را بکش و $y = \cos^2 \alpha$ را در آن نقاط تقاطع می‌کند.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{r}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

$$r \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

$$\alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

k اعداد زوج صحیح

$$k=0 \rightarrow \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}} \checkmark$$

$$k=1 \rightarrow \pi + \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}\pi + \pi}{\sqrt{r}}$$

$$\rightarrow \pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}\pi - \pi}{\sqrt{r}} \checkmark$$

$$k=-1 \rightarrow -\pi + \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{-\sqrt{r}\pi + \pi}{\sqrt{r}} \checkmark$$

$$\rightarrow -\pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{-\sqrt{r}\pi - \pi}{\sqrt{r}}$$

نسیه دهی