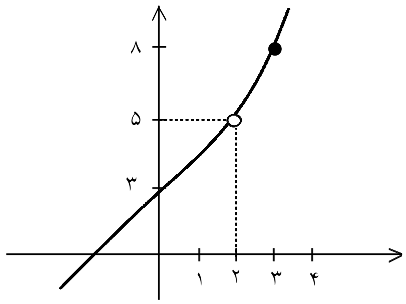
۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & x > ۲ \\ x + ۳ & x < ۲ \end{cases}$ را درنظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x = ۲$، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

الف) خیر



ب) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۵$

۲- با تکمیل هریک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه‌ی موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} -۳x + ۴ = \dots$

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
f(x)					→	؟	←					

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = \dots$, $f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	→	-۱	←	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
f(x)						→	؟	←				

« **پاسخ** »

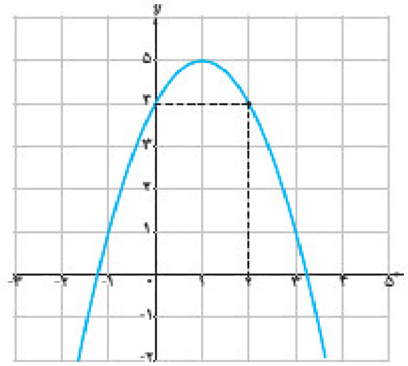
الف) $\lim\limits_{x \to ۰} -۳x + ۴ = ۴$

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
f(x)	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	→	؟	←	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

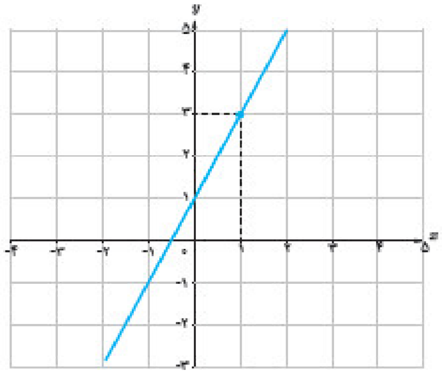
ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = -۵$, $f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	→	-۱	←	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
f(x)	-۶	-۵/۵	-۵/۱	-۵/۰۱	-۵/۰۰۱	→	؟	←	-۴/۹۹۹	-۴/۹۹	-۴/۹	-۴/۸

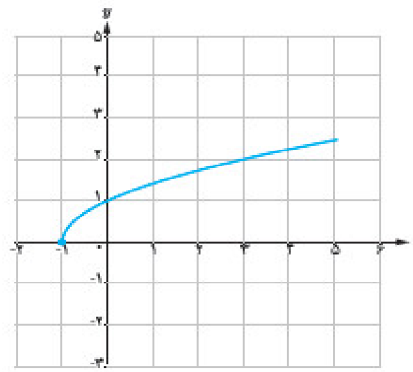
۳- با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



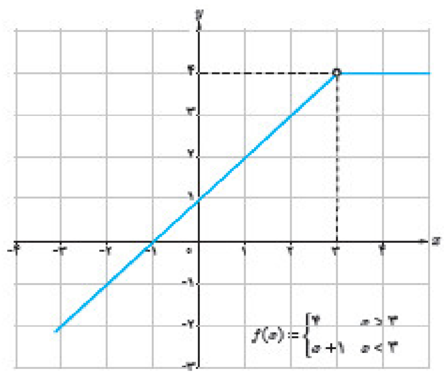
$$\lim_{x \to ۲} \left(-x^{۲} + ۲x + ۴\right) =$$



$$\lim_{x \to ۱} (۲x + ۱) =$$

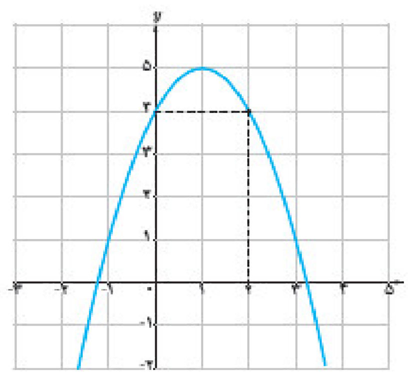


$$\lim_{x \to -۱} \sqrt{x + ۱} =$$

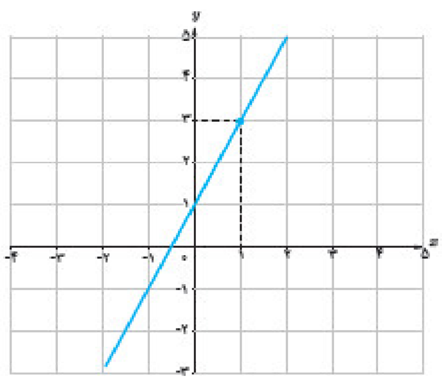


$$\lim_{x \to ۳} f(x) =$$

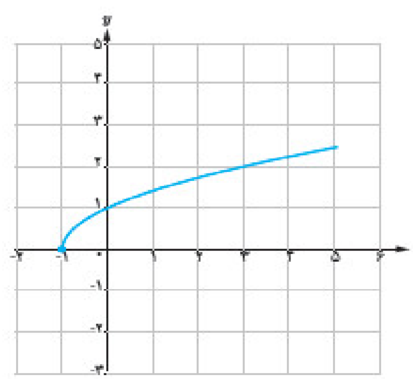
« پاسخ »



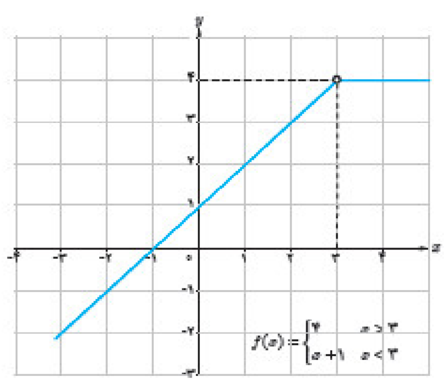
$$\lim_{x \to ۲} \left(-x^{۲} + ۲x + ۴\right) = ۴$$



$$\lim_{x \to ۱} (۲x + ۱) = ۳$$



$\lim \sqrt{x + ۱} =$ حد ندارد



$\lim f(x) = ۴$

۴- برای تابع $f(x) = x + ۱$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار، مقادیر زیر را حساب کنید.

$f(۱)$

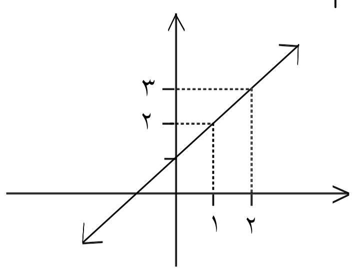
$\lim_{x \to ۱} f(x)$

« **پاسخ** »

الف)

$f(x) = x + ۱$

x	۱	۲
y	۲	۳



ب)

$f(۱) = ۲$

$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۲$

۵- تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x + ۲ & x > -۳ \\ -۲x^{۲} + b & x < -۳ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر b و a را چنان بیابید که:

$\lim_{x \to -۱} f(x) = -۴$ و $\lim_{x \to -۴} f(x) = -۱$

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} \lim_{x \to -۱} f(x) = -۴ \\ \lim_{x \to -۴} f(x) = -۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + ۱ = -۴ \\ -۳۲ + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵ \\ b = ۳۱ \end{cases}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[۵]{x + ۱}$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

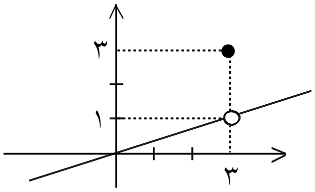
الف) $\lim_{x \to (-۱)^-} f(x)$ ب) $\lim_{x \to (-۱)^+} f(x)$ ج) $\lim_{x \to ۱} f(x)$

« **پاسخ** »

الف) $\lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = ۰$

ب) $\lim_{x \to (-۱)^+} f(x) = ۰$

ج) $\lim_{x \to ۱} f(x) = \sqrt[۵]{۱ + ۱} = \sqrt[۵]{۲}$



۷- با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x \to ۳} g(x)$ را حساب کنید.

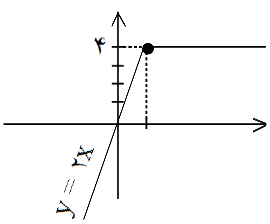
« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۳} g(x) = ۱$$

۸- با رسم نمودار تابع و تشکیل جدول مقادیر تابع در مجاورت نقطه‌ی داده شده، حد راست و هم‌چنین حد چپ تابع را (در صورت وجود) در $x_۰$ تعیین کنید.

$$e(x) = \begin{cases} ۲x & \text{و } x \le ۲ \\ ۴ & \text{و } x > ۲ \end{cases} \qquad x_۰ = ۲$$

« **پاسخ** »



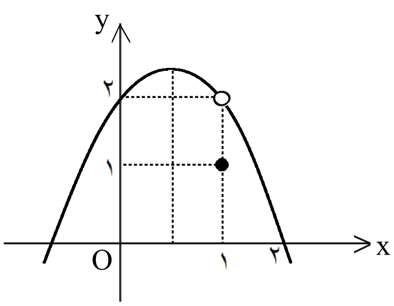
x	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹
f(x)	۲	۳	۳/۴	۳/۸	۳/۹۸

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۴$

x	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱
f(x)	۴	۴	۴	۴	۴

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۴$

۹- با استفاده از نمودار، حد تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



$$\lim_{x \to ۱} f(x) \;،\; f(x) = \begin{cases} -x^۲ + x + ۲, & x \ne ۱ \\ ۱ , & x = ۱ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۲$$

۱۰- جدول زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را وقتی x به سمت مقدار مورد نظر میل می‌کند، مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\lim_{x \to ۳} \frac{\sqrt{x+۱} - ۲}{x - ۳}$$

	$x \to$								$x \to$						
x	$\ldots \to$	۲ $\to$	۲/۵ $\to$	۲/۹ $\to$	۲/۹۹ $\to$	۲/۹۹۹ $\to$	$\ldots \to$	۳	$\leftarrow \ldots$	$\leftarrow$ ۳/۰۰۱	$\leftarrow$ ۳/۰۱	$\leftarrow$ ۳/۱	$\leftarrow$ ۳/۵	$\leftarrow$ ۴	$\leftarrow \ldots$
f(x)	$\ldots \to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\ldots \to$		$\leftarrow \ldots$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow \ldots$
	$f(x) \to$								$f(x) \to$						

« **پاسخ** »

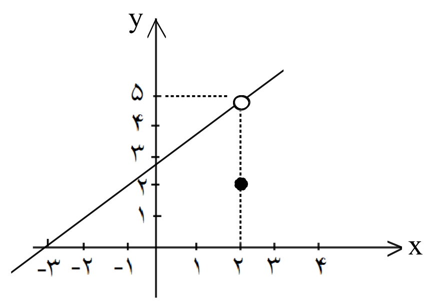
	$x \to ۳$								$x \to ۳$						
x	$\ldots \to$	۲ $\to$	۲/۵ $\to$	۲/۹ $\to$	۲/۹۹ $\to$	۲/۹۹۹ $\to$	$\ldots \to$	۳	$\leftarrow \ldots$	$\leftarrow$ ۳/۰۰۱	$\leftarrow$ ۳/۰۱	$\leftarrow$ ۳/۱	$\leftarrow$ ۳/۵	$\leftarrow$ ۴	$\leftarrow \ldots$
f(x)	$\ldots \to$	۰/۲۸ $\to$	۰/۲۷ $\to$	۰/۲۶ $\to$	۰/۲۵۲ $\to$	۰/۲۵۱ $\to$	$\ldots \to$	$\frac{۱}{۴}$	$\leftarrow \ldots$	$\leftarrow$ ۰/۲۴۹	$\leftarrow$ ۰/۲۴۸	$\leftarrow$ ۰/۲۴	$\leftarrow$ ۰/۲۳	$\leftarrow$ ۰/۰۲	$\leftarrow \ldots$
	$f(x) \to$								$f(x) \to \frac{۱}{۴}$						

۱۱- از روی نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، وقتی x به سمت عدد داده شده میل می‌کند، تعیین کنید و مشخص نمایید که آیا تابع حد دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ , & x \neq ۲ \\ ۲ , & x = ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x)$$



« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۵ \\ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حد دارد}$$

۱۲- با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+۱} - ۱}$ را وقتی x به سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید.

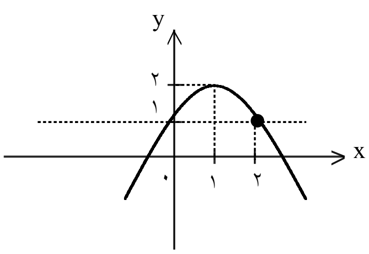
« **پاسخ** »

x	-۱	-/۰۱	۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
f(x)	۱	۱/۹۴۸	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۰۴	۲/۰۰۴	۲/۰۴	۲/۴

۱۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-۱)^۲ + ۲$، حدود زیر را مشخص کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} [f(x)]$ ب) $\left[\lim\limits_{x \to ۱} f(x)\right]$

« **پاسخ** »



الف) $\lim\limits_{x \to ۱} [f(x)] = ۱$ در همسایگی ۱، نه در خود یک

$۱ < f(x) < ۲ \Rightarrow [f(x)] = ۱$

ب) $\left[\lim\limits_{x \to ۱} f(x)\right] = \left[۲^-\right] = ۱$ $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ عدد نزدیک به ۲ است.

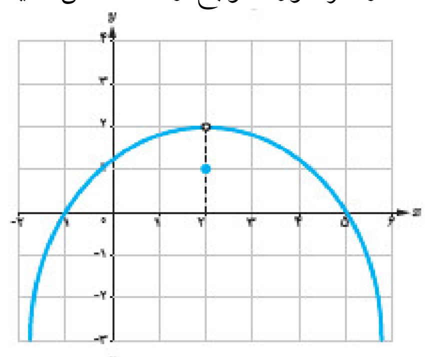
۱۴- با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \dfrac{x}{[x] - ۲}$ در نقطه $x = ۲$ چه می‌توان گفت؟

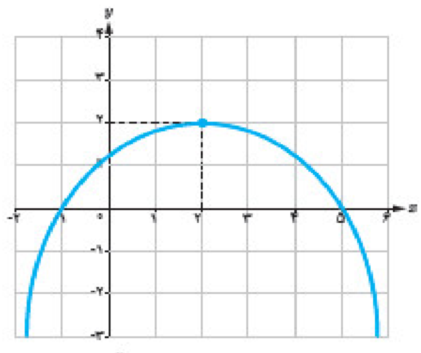
« **پاسخ** »

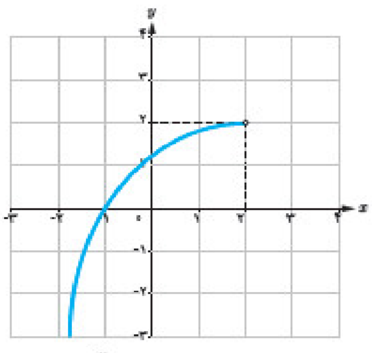
$x \to ۲^+ \Rightarrow [x] = ۲$

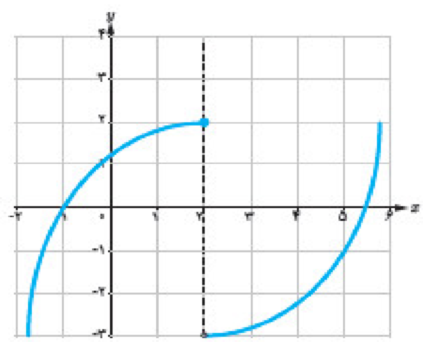
$[x] - ۲ = ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲^+} \dfrac{x}{[x] - ۲} =$ وجود ندارد

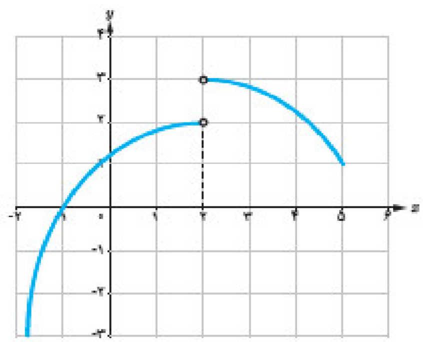
۱۵- با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.

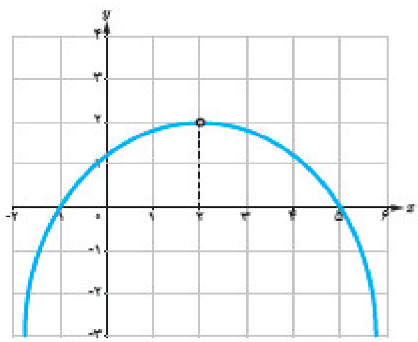

(الف)


(ب)


(پ)


(ت)


(ث)

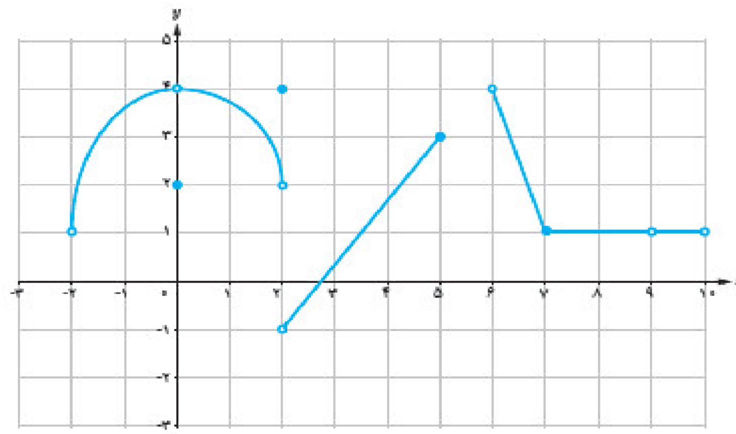

(ج)

- تابع در همایسگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.
- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.
- تابع درنقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.
- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

« **پاسخ** »

- تابع در همایسگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)
- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)
- تابع درنقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)
- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۱۶- نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to ۵} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x \to ۶^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۸} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x \to ۹} f(x)$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۴$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x \to ۵} f(x) =$ وجود ندارد

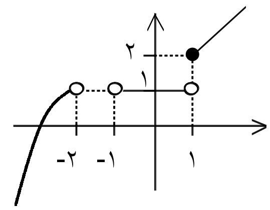
ت) $\lim\limits_{x \to ۶^-} f(x) = ۴$

ث) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۱$

ج) $\lim\limits_{x \to ۸} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x \to ۹} f(x) = ??$

۱۷- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.



A) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$

B) $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$

C) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$

D) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x)$

« **پاسخ** »

A) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$

B) $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$

C) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) =$ حد ندارد

D) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -۲^-} f(x) = ۱ \;,\; \lim\limits_{x \to -۲^+} f(x) =$ وجود ندارد

۱۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a[x] + [x + ۱]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$ موجود است.

([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ موجود است یعنی حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (a[x] + [x + ۱]) = a + ۲$$

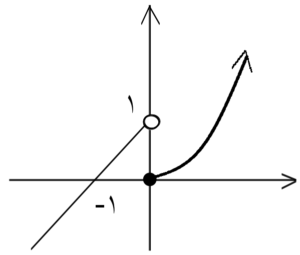
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (x[x] + [x + ۱]) = ۰ + ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

۱۹- ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \le ۰ \\ x + ۱ & x > ۰ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، وجود حد تابع را در $x = ۰$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۰^{+}} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^{-}} f(x) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} f(x) = \text{حد ندارد}$$



۲۰- در تابع $f(x) = x[x]$:

الف) تابع را در بازه‌ی $x \in [-۱ , ۱)$ رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)							

ج) آیا حد تابع در $x = ۰$ موجود است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

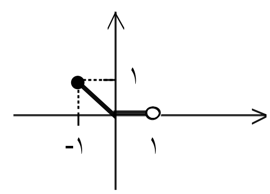
الف)

$$-۱ \le x < ۰ \xrightarrow{[x] = -۱} y = -x$$

x	-۱	۰
y	۱	۰

$$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{[x] = ۰} y = ۰$$

x	۰	۱
y	۰	۰



ب)

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰	۰	۰	۰

ج) موجود است. زیرا حد راست و چپ برابر است.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۰^{+}} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^{-}} f(x) = ۰ \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۰$$

۲۱- در تابع $f(x) = (-۱)^{[x]}$:

الف) تابع را در بازه‌ی $x \in [۰ , ۲)$ رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ج) آیا حد تابع در $x = ۱$ موجود است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

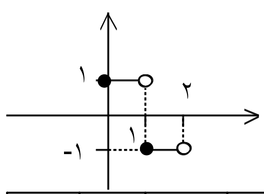
الف)

$$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{[x] = ۰} y = (-۱)^۰ = ۱$$

x	۰	۱
y	۱	۱

$$۱ \le x < ۲ \xrightarrow{[x] = ۱} y = (-۱)^۱ = -۱$$

x	۱	۲
y	-۱	-۱



ب)

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ در $x = ۱$ برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۱} f(x) = \text{موجود نیست}$$

۲۲- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۲$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} + ۲ & x \geq ۲ \\ \dfrac{ax}{x - ۳} & x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

برای آن‌که در $x = ۲$ دارای حد باشد باید حد راست و چپ در $x = ۲$ برابر باشد.

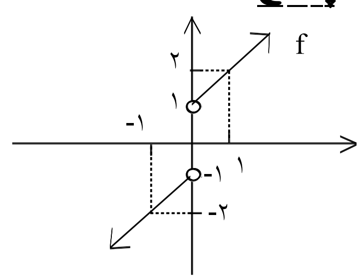
$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{+}} x^{۳} + ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

$$\lim_{x \to ۲^{-}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{-}} \frac{ax}{x - ۳} = \frac{۲a}{-۱} = -۲a$$

$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{-}} f(x) \Rightarrow ۱۰ = -۲a \Rightarrow a = -۵$$

۲۳- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۰ \\ x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x = ۰$ به دست آورید. آیا تابع f در $x = ۰$ حد دارد؟ چرا؟

« **پاسخ** »



$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۰ \\ x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$$

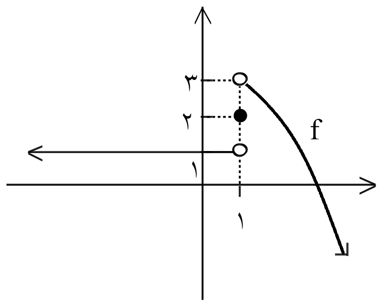
x	۰	۱
y	۱	۲

۱	۰	-۱
y	-۱	-۲

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ۰^{+}} f(x) = ۱ \\ \lim_{x \to ۰^{-}} f(x) = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} f(x) = \text{حد ندارد}$$

تابع در $x = ۰$ حد ندارد زیرا حد راست و چپ در $x = ۰$ برابر نیست.

۲۴- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) + \lim_{x \to ۱^+} f(x) - ۲f(۱)$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) + \lim_{x \to ۱^+} f(x) - ۲f(۱) = ۱ + ۳ - ۲(۲) = ۰$$

۲۵- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \to ۳} \dfrac{x + ۳}{\sqrt{۵x + ۱}}$

ب) $\lim_{x \to ۳^-} (۱ - [x])$

ج) $\lim_{x \to ۲} \dfrac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۷x + ۱۰}$

د) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos x - \sin x}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim_{x \to ۳} \dfrac{x + ۳}{\sqrt{۵x + ۱}} = \dfrac{۶}{\sqrt{۱۶}} = \dfrac{۶}{۴} = \dfrac{۳}{۲}$

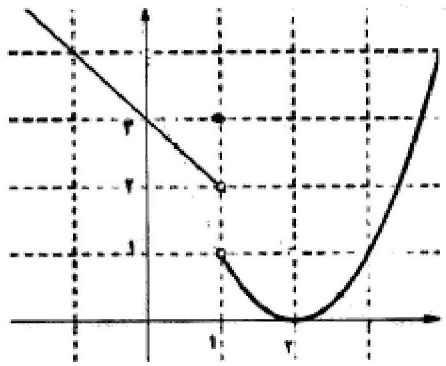
ب) $\lim_{x \to ۳^-} (۱ - [x]) = ۱ - ۲ = -۱$

ج) $\lim_{x \to ۲} \dfrac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۷x + ۱۰} = \lim_{x \to ۲} \dfrac{\cancel{(x - ۲)}(x + ۲)}{\cancel{(x - ۲)}(x - ۵)} = \lim_{x \to ۲} \dfrac{x + ۲}{x - ۵} = \dfrac{۴}{-۳}$

د) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)}{\cancel{\cos x - \sin x}}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

۲۶- با استفاده از نمودار روبه‌رو، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.



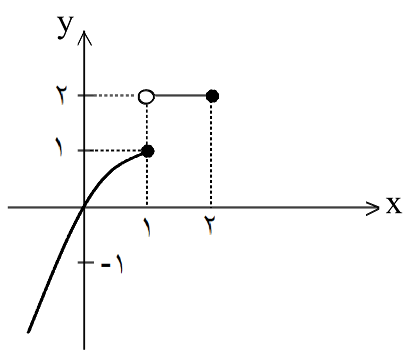
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) - \lim_{x \to ۱^+} f(x) + ۲f(۱)$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) - \lim_{x \to ۱^+} f(x) + ۲f(۱) = ۲ - ۱ + ۲ \times ۳ = ۷$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۲۷- با استفاده از نمودار زیر حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \to ۱} f(x)$

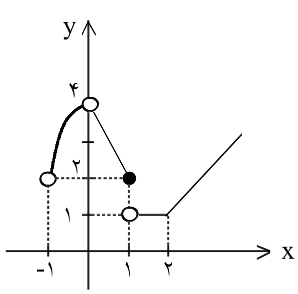
« **پاسخ** »

الف) $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$ ۰/۲۵

ب) $\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$ ۰/۲۵

ج) $\lim_{x \to ۱} f(x) =$ وجود ندارد ۰/۲۵

۲۸- با استفاده از نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را در صورت وجود مشخص کنید.



الف) $\lim_{x \to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \to ۱^-} f(x)$

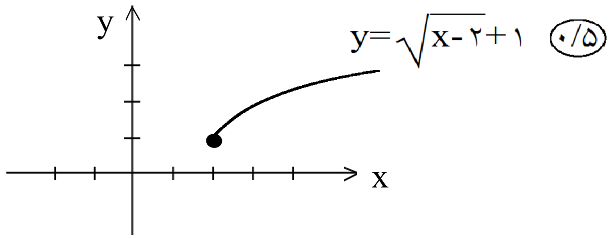
ج) $\lim_{x \to ۱} f(x)$

« **پاسخ** »

الف) ۱ ۰/۲۵ ب) ۲ ۰/۲۵ ج) حد ندارد ۰/۲۵

۲۹- با رسم نمودار $y=\sqrt{x-2}+1$ مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a=2$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ حد ندارد $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ حد ندارد

۰/۲۵ ۰/۲۵

۳۰- حد تابع $\lim\limits_{x\to 3^+} (x-[x])$ را در صورت وجود محاسبه کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

$$\lim_{x\to 3^+} (x-[x]) = 3-3=0$$ ۰/۵

۳۱- اگر تابع f در نقطه ۳ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 3} (f(x)+3x-1)=5$، حاصل $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to 3} (f(x)+3x-1) = \lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} (3x-1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) + 8 = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = -3$$

۳۲- توابع زیر را درنظر بگیرید.

$$y = ۳x + ۲ \quad , \quad y = x^{۲} - ۱ \quad , \quad y = [x] - ۱ \qquad y = \begin{cases} -۲ & x < ۱ \\ ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

الف) مقدار حد هریک از توابع فوق در $x = ۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x) = \cdots$	$g(x) = \cdots$	$f(x)+g(x) = \ldots$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \cdots$	$g(x) = \cdots$	$f(x)\, g(x) = \cdots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x) = \cdots$	$g(x) = \cdots$	$\frac{f(x)}{g(x)} = \cdots$
تابع $f^{۲}$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \cdots$		$f^{۲}(x) = \cdots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \cdots$		$\sqrt{f(x)} = \cdots$

« **پاسخ** »

۳۳- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۹} \left(\sqrt{x}-۹\right)^{۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} \left(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵\right)$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}} \dfrac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)\left(x^{۳}+۱\right)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}} \dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^{+۶}x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\operatorname{Sin} x}{x+\operatorname{Cos} x}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{|\operatorname{Cos} x|}{x-\pi}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x\to ۹} \left(\sqrt{x}-۹\right)^{۳} = \left(\sqrt{۹}-۹\right)^{۳} = -۲۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} \left(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵\right) = -۶(-۱)^{۷}-۴(-۱)+۵ = ۱۵$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}} \dfrac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)\left(x^{۳}+۱\right)} = \dfrac{\left(-\frac{۵}{۳}+\pi\right)\overbrace{\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۵\right)}^{۰}}{\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۶\right)\left(\left(-\frac{۵}{۳}\right)^{۳}+۱\right)} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}} \dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴} = \dfrac{۱-\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}}{\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}-۴} = \dfrac{۱-۲}{۲-۴} = \dfrac{-۱}{-۲} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^{۲}+۶x} = \sqrt{۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+۶\left(\frac{۱}{۲}\right)} = ۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\operatorname{Sin} x}{x+\operatorname{Cos} x} = \dfrac{\operatorname{Sin} ۰}{۰+\operatorname{Cos} ۰} = \dfrac{۰}{۰+۱} = ۰$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{|\operatorname{Cos} x|}{x-\pi} = \dfrac{\left|\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۲}\right|}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \dfrac{۰}{\frac{\pi}{۲}} = ۰$

۳۴- اگر $\lim\limits_{x \to ۳} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{۳f(x) - ۱}{۲f(x) + ۵} = ۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{f(x) - ۱}{f(x) + ۷}$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۳} \frac{۳f(x) - ۱}{۲f(x) + ۵} = \frac{۳\lim\limits_{x \to ۳} f(x) - \lim\limits_{x \to ۳} ۱}{۲\lim\limits_{x \to ۳} f(x) + \lim\limits_{x \to ۳} ۵} = ۲ \xrightarrow{\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = k} \frac{۳k - ۱}{۲k + ۵} = ۲$$

$$\Rightarrow ۴k + ۱۰ = ۳k - ۱ \Rightarrow k = -۱۱$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - ۱}{f(x) + ۷} = \frac{\lim\limits_{x \to ۳} f(x) - \lim\limits_{x \to ۳} ۱}{\lim\limits_{x \to ۳} f(x) + \lim\limits_{x \to ۳} ۷} = \frac{-۱۱ - ۱}{-۱۱ + ۷} = \frac{-۱۲}{-۴} = ۳$$

۳۵- اگر $f(x) = a[x] + ۳[x + ۷]$ در $x = ۵$ دارای حد باشد، a را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

روش اول:

$$\lim_{x \to ۵^+} a[x] + ۳[x] + ۲۱ = ۵a + ۱۵ + ۲۱ = ۵a + ۳۶$$

$$\lim_{x \to ۵^-} a[x] + ۳[x] + ۲۱ = ۴a + ۱۲ + ۲۱ = ۴a + ۳۳$$

$$\xrightarrow{\text{شرط وجود حد}} \lim_{x \to ۵^+} f(x) = \lim_{x \to ۵^-} f(x) \Rightarrow ۵a + ۳۶ = ۴a + ۳۳ \Rightarrow a = -۳$$

روش دوم: باید جزء صحیح را حذف کرد بنابراین داریم:

$$f(x) = a[a] + ۳[x] + ۲۱ = (a + ۳)[x] + ۲۱ \Rightarrow a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

۳۶- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \to ۰} \left(\frac{x^۲}{\cos x}\right)$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۰} \left(\frac{x^۲}{\cos x}\right) = \frac{۰^۲}{\cos(۰)} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

۳۷- آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۳x - ۱}{x} & x < ۱ \\ x^۲ + ۱ & x > ۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \frac{۳(۱) - ۱}{۱} = ۲ \quad ۰/۵ \\ &\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۱^۲ + ۱ = ۲ \quad ۰/۵ \end{aligned}\right\}$$ ⇒ حد چپ = حد راست ۰/۲۵ ⇒ تابع f در $x = ۱$ حد دارد ۰/۲۵

۳۸- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{(x - ۱)(x + ۲)} =$$

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - x}{(x + ۲)(x - ۱)\left(x + \sqrt{x}\right)}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to ۱} \frac{x\ (x - ۱)}{(x + ۲)(x - ۱)\left(x + \sqrt{x}\right)}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{+۱}{۶}}_{۰/۲۵}$$

۳۹- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^{۲} + x - ۱}{۳x^{۲} + ۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{x^{۲}[x] - ۸}{x - ۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x^{۲} - ۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲ - \sqrt{x}}{۳ - \sqrt{۲x+۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x} - \sqrt{۱-x}}{x^{۲} + x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - ۱}$

« پاسخ »

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^{۲} + x - ۱}{۳x^{۲} + ۳x} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{\cancel{(x+۱)}(۲x-۱)}{۳x\cancel{(x+۱)}} = \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x-۱}{۳x} = \dfrac{-۳}{-۳} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{x^{۲}[x] - ۸}{x - ۲} = \lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{۲x^{۲} - ۸}{x - ۲} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{۲\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}} = ۸$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x^{۲} - ۴} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x^{۲} - ۴} \times \dfrac{\sqrt{x+۲} + ۲}{\sqrt{x+۲} + ۲} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\cancel{x-۴}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} \times \dfrac{۱}{\sqrt{x+۲} + ۲}$

$= \dfrac{۱}{۱۶}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲ - \sqrt{x}}{۳ - \sqrt{۲x+۱}} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲ - \sqrt{x}}{۳ - \sqrt{۲x+۱}} \times \dfrac{۲ + \sqrt{x}}{۲ + \sqrt{x}} \times \dfrac{۳ + \sqrt{۲x+۱}}{۳ + \sqrt{۲x+۱}}$

$= \lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{\cancel{(۴-x)}\left(۳ + \sqrt{۲x+۱}\right)}{۲\cancel{(۴-x)}\left(۲ + \sqrt{x}\right)} = \dfrac{۶}{۸} = \dfrac{۳}{۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x} - \sqrt{۱-x}}{x^{۲} + x} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱ + x - \sqrt{۱ - x}}}{^{۲} + x} \times \dfrac{\sqrt{۱ + x} + \sqrt{۱ - x}}{\sqrt{۱+x} + \sqrt{۱ - x}}$

$= \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}(x+۱)\left(\sqrt{۱+x(۱-x)}\right)} = \dfrac{۲}{۲} = ۱$

ج) $\lim \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ldots} = \lim \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ldots} \times \dfrac{x + \sqrt{x}}{\ldots} \times \dfrac{x+۱}{\ldots} = \lim \dfrac{x\cancel{(x-۱)}\left(\sqrt{x}+۱\right)}{\ldots}$

۴۰- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$A)\ \lim_{x \to ۵} \frac{۳x^۲ - ۱۳x - ۱۰}{x^۲ - ۶x + ۵}$$

$$B)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin x}{\cos^۲ x}$$

« **پاسخ** »

$$A)\ \lim_{x \to ۵} \frac{۳x^۲ - ۱۳x - ۱۰}{x^۲ - ۶x + ۵} = \lim_{x \to ۵} \frac{(۳x + ۲)(x - ۵)}{(x - ۱)(x - ۵)} = \frac{۳(۵) + ۲}{۵ - ۱} = \frac{۱۷}{۴}$$

$$B)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin x}{\cos^۲ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin x}{(۱ - \sin x)(۱ + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱ + \sin x} = \frac{۱}{۲}$$

۴۱- حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{۲x^۲ + x - ۱}{۳x^۲ + ۳x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{\sqrt{x + ۲} - ۲}{x^۲ - ۴}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۲ - ۲\cos ۲x}{x\sin x}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{۲x^۲ + x - ۱}{۳x^۲ + ۳x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{(x + ۱)(۲x - ۱)}{۳x(x + ۱)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{۲x - ۱}{۳x} = \dfrac{-۳}{-۳} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{\sqrt{x + ۲} - ۲}{x^۲ - ۴} \times \dfrac{\sqrt{x + ۲} + ۲}{\sqrt{x + ۲} + ۲} = \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{x + ۲ - ۴}{\left(x^۲ - ۴\right)\left(\sqrt{x + ۲} + ۲\right)}$

$= \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{x - ۲}{(x - ۲)(x + ۲)\left(\sqrt{x + ۲} + ۲\right)} = \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{۱}{(x + ۲)\left(\sqrt{x + ۲} + ۲\right)} = \dfrac{۱}{۱۶}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۲ - ۲\cos ۲x}{x\sin x} = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۴\sin^۲ x}{x\sin x} = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۴\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to ۰} ۴ \times \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sin x}{x} = ۴ \times ۱ = ۴$

$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = ۱ - \sin^۲ x - \sin^۲ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

۴۲- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{|x|}{x^۲ - ۳x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۵^-} (۳ - [x])[x]$

ج) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۳x - \sqrt{x} - ۲}{x - ۱}$

د) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱ - \cos ۶x}{x^۲}$

« پاسخ »

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{|x|}{x^۲ - ۳x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x - ۳)} = \dfrac{۱}{-۳} \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} \dfrac{-x}{x(x - ۳)} = \dfrac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{|x|}{x^۲ - ۳x} =$ حد ندارد

ب) $\lim\limits_{x \to ۵^-} (۳ - [x])[x] = (۳ - ۴) \times ۴ = -۴$

ج) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۳x - \sqrt{x} - ۲}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۳x - ۳ - \sqrt{x} + ۱}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۳\cancel{(x - ۱)}}{\cancel{(x - ۱)}} - \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱}$

$= ۳ - \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \dfrac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = ۳ - \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\cancel{(x - ۱)}}{\cancel{(x - ۱)}\left(\sqrt{x} + ۱\right)} = ۳ - \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{۵}{۲}$

د) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱ - \cos ۶x}{x^۲} = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۲\sin^۲ ۳x}{x^۲} = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۲\sin ۳x \, \sin ۳x}{x \times x} = ۲ \times ۳ \times ۳ = ۱۸$

۴۳- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{|x-۳|}{x^۲ - ۵x + ۶}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{|x+۳| - |۳x-۱۱|}{x^۲ - ۴}$

« **پاسخ** »

الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۳^+} \frac{\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x-۲)} = \lim\limits_{x \to ۳^+} \frac{۱}{x-۲} = ۱ \\ \lim\limits_{x \to ۳^-} \frac{-\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x-۲)} = \lim\limits_{x \to ۳^-} \frac{-۱}{x-۲} = -۱ \end{array} \right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۳} \frac{|x-۳|}{x^۲ - ۵x + ۶} = \text{حد ندارد}$$

ب)

$$\lim\limits_{x \to ۲} \frac{(x+۳) + (۳x-۱۱)}{x^۲ - ۴} = \lim\limits_{x \to ۲} \frac{۴\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

۴۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{\left|x^{۲} - ۷x + ۱۲\right|}{x^{۲} - ۱۶}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{|x + ۵| - |۱۱ - ۹x|}{x^{۳} - ۸}$

« **پاسخ** »

الف) بهتر است برای تعیین علامت $x^{۲} - ۷x + ۱۲$ در همسایگی $x = ۴$ از جدول تعیین علامت استفاده کنید.

x		۳	۴^-	۴	۴^+
$x^{۲} - ۷x + ۱۲$	+	•	-	•	+

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۴^+} \dfrac{\left(x^{۲} - ۷x + ۱۲\right)}{x^{۲} - ۱۶} = \lim\limits_{x \to ۴^+} \dfrac{\cancel{(x - ۴)}(x - ۳)}{\cancel{(x - ۴)}(x + ۴)} = \lim\limits_{x \to ۴^+} \dfrac{x - ۳}{x + ۴} = \dfrac{۱}{۸} \\[2em] \lim\limits_{x \to ۴^-} \dfrac{-\left(x^{۲} - ۷x + ۱۲\right)}{x^{۲} - ۱۶} = \lim\limits_{x \to ۴^-} \dfrac{-\cancel{(x - ۴)}(x - ۳)}{\cancel{(x - ۴)}(x + ۴)} = \lim\limits_{x \to ۴^-} \dfrac{-(x - ۳)}{x + ۴} = -\dfrac{۱}{۸} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{\left|x^{۲} - ۷x + ۱۲\right|}{x^{۲} - ۱۶} = \text{حد ندارد}$$

ب)

$$\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{(x + ۵) + (۱۱ - ۹x)}{x^{۳} - ۸} = \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{-۸\cancel{(x - ۲)}}{\cancel{(x - ۲)}\left(x^{۲} + ۲x + ۴\right)} = \dfrac{-۸}{۱۲} = -\dfrac{۲}{۳}$$

۴۵- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{|x-۲|}{x^{۲}-۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} (x+[x])۲x$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{x^{۲}-۴}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}{\sin x-\cos x}$

« **پاسخ** »

الف
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{|x-۲|}{x^{۲}-۴} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۱}{x+۲} = \dfrac{۱}{۴} \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{|x-۲|}{x^{۲}-۴} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-۱}{x+۲} = \dfrac{-۱}{۴} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{|x-۲|}{x^{۲}-۴} =$ حد ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} (x+[x])۲x = (۲+۱)\times ۴ = ۱۲$

ج) $$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{x^{۲}-۴} \times \dfrac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}} = \lim \dfrac{x^{۲}-x-۲}{(x^{۲}-۴)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}$$

$$= \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\cancel{(x-۲)}(x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)} \overset{x\to ۲}{=} \dfrac{۳}{۴\times ۴} = \dfrac{۳}{۱۶}$$

د) $$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}{\sin x-\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin x \cos\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۴}\cos x}{\sin x-\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cancel{(\sin x-\cos x)}}{\cancel{\sin x-\cos x}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۶- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۵^+} (۳[x]+۱)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x^۲-۱}{x^۲-x}$

د) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos^۲ x}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۳}} = \dfrac{۲}{\sqrt{۴}} = \dfrac{۲}{۲} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x \to ۵^+} ۳[x]+۱ = ۳(۵)+۱ = ۱۶$

ج) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x^۲-۱}{x^۲-x} = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{x\cancel{(x-۱)}} = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x+۱}{x} = \dfrac{۱+۱}{۱} = ۲$

د) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos^۲ x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{۱-\sin^۲ x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\cancel{۱-\sin x}}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱}{۱+\sin x} = \dfrac{۱}{۱+۱} = \dfrac{۱}{۲}$

۴۷- حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{x^{۲}+x-۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin ۵x}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{x^{۲}+x-۶}\times\dfrac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}$ ۰/۲۵ $= \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^{۲}-x-۲}{(x^{۲}+x-۶)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}$ ۰/۲۵

$= \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\cancel{(x-۲)}(x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x+۳)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}$ ۰/۲۵ $= \dfrac{۳}{۲۰}$ ۰/۲۵

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sqrt{۲\sin^{۲} x}}{\sin ۵x}$ ۰/۲۵ $= \lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sqrt{۲}\,|\sin x|}{\sin ۵x}$ ۰/۲۵ $= \lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sqrt{۲}\,x\,\dfrac{\sin x}{x}}{۵x\,\dfrac{\sin ۵x}{۵x}}$ ۰/۲۵

$= \lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sqrt{۲}\,x}{۵x} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۰/۲۵

۴۸- حد مقابل را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin x\ \sin ۲x\ \sin ۳x}{x^{۳}}$

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin x\ \sin ۲x\ \sin ۳x}{x\times x\times x} = ۱\times ۲\times ۳ = ۶$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۴۹- حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to ۹} \frac{۹ - x}{\sqrt{x} - ۳}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۹} \frac{(۹ - x)\left(\sqrt{x} + ۳\right)}{x - ۹} = \lim_{x \to ۹} \frac{\left(\sqrt{x} + ۳\right)}{-۱} = \underbrace{-۶}_{۰/۲۵}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵۰- حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ - x - ۶}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳) \; ۰/۲۵}{(x-۳)(x+۲) \; ۰/۲۵} = \lim_{x \to ۳} \frac{x+۳}{x+۲} = \frac{۶}{۵} \; ۰/۵$$

۵۱- حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + \sin^۲ ۳x}{۲x^۲}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۰ \; ۰/۲۵} \frac{۱}{۲} + \frac{\frac{\sin^۲ ۳x}{۹x^۲} \times ۹x^۲ \; ۰/۲۵}{۲x^۲ \; ۰/۲۵} = ۵ \; ۰/۲۵$$

۵۲- حد زیر را درصورت وجود تعیین کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)}{۲x - \pi}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)}{۲x - \pi} = \lim_{t \to ۰} \frac{\sin(-t)}{۲\left(\frac{\pi}{۲} + t\right) - \pi} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\sin t}{۲t} = -\frac{۱}{۲}$$

$$t = x - \frac{\pi}{۲} \to ۰ \quad , \quad x = \frac{\pi}{۲} + t$$

۵۳- در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x = ۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۱ \\ a & x = ۱ \\ -x + ۲ & x > ۱ \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ a & x = ۱ \end{cases}$

پ) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} & ۰ < x < ۱ \\ [x] + a & x \geq ۱ \end{cases}$

ت) $k(x) = ([x] - a)[x]$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = ۲(۱) - ۱ = ۱$

$\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = -(۱) + ۲ = ۱$

$f(۱) = a \Rightarrow a = ۱$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} g(x) = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{(x - ۱)(x + ۲)}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} (x + ۲) = ۲$

$g(۱) = a \Rightarrow a = ۲$

پ) $\lim\limits_{x \to ۱^+} h(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} [x] + a = ۱ + a$

$\lim\limits_{x \to ۱^-} h(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \dfrac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{۱}{\sqrt{x} + ۱} = \dfrac{۱}{۲}$

$h(۱) = ۱ + a \Rightarrow ۱ + a = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\dfrac{۱}{۲}$

ت) $\lim\limits_{x \to ۱^+} k(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$

$\lim\limits_{x \to ۱^-} k(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)[۰] = ۰$

$k(۱) = (۱ - a)(۱) = ۱ - a \Rightarrow ۱ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱$

۵۴- a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۳x & x < ۱ \\ -a + ۳ & x = ۱ \\ \dfrac{b + ۲}{۲\sqrt{x + ۳}} & x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ پیوسته باشد.

« **پاسخ** »

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۳x & x < ۱ \\ -a + ۳ & x = ۱ \\ \dfrac{b + ۲}{۲\sqrt{x + ۳}} & x > ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = -۲ \Rightarrow -a + ۳ = -۲ \Rightarrow a = ۵$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = -۲ \Rightarrow \frac{b + ۲}{۲\sqrt{۱ + ۳}} = -۲ \Rightarrow b = -۱۰$$

۵۵- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x - [x] & x < ۰ \\ a & x = ۰ \\ \sqrt{x + ۱} + b & x > ۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۰$ پیوسته باشد.

([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = -[۰^-] = ۱ \quad (۰/۲۵) \qquad \lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۱ + b \quad (۰/۲۵) \qquad f(۰) = a \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰ \end{cases} \quad (۰/۵)$$

۵۶- در تابع زیر a را طوری تعیین کنید که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

« **پاسخ** »

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

$$k(۱) = (۱ - a)[۱] = ۱ - a$$

$$\lim_{x \to (۱)^+} k(x) = \lim_{x \to (۱)^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\lim_{x \to (۱)^-} k(x) = \lim_{x \to (۱)^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)(۰) = ۰$$

چون $k(۱) = \lim_{x \to (۱)^-} k(x) = \lim_{x \to (۱)^+} k(x) \Rightarrow ۱ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱$

۵۷- مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x = -۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + [x]}{|x|} & x < -۱ \\ ۳x + b & x > -۱ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^+} ۳x + b = -۳ + b$$

$$\lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = \lim_{,x \to (-۱)^-} \frac{x^۲ + [x]}{|x|} = \frac{۱ - ۲}{۱} = -۱ \Rightarrow -۳ + b = -۱ \Rightarrow b = ۲$$

۵۸- اگر تابع f با ضابطه‌ی زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} + ax & x > ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ b[x] - ۳ & x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$x = ۲$ شرط پیوستگی در : $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = f(۲)$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} + ax = \lim_{x \to ۲^+} \frac{\cancel{(x - ۲)}(x + ۲)}{\cancel{(x - ۲)}} + ax = ۴ + ۲a$$

$$f(۲) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} b[x] - ۳ = b - ۳$$

$$b - ۳ = ۳ \Rightarrow b = ۶$$

$$۴ + ۲a = ۳ \Rightarrow ۲a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۵۹- اگر تابع f با ضابطه زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد، مقادیر a , b را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} a[-x] + bx^{۲} & x > ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ b[x] - ۱ & x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$x = ۲$ شرط پیوستگی در : $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = f(۲)$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} a[-x] + bx^{۲} = -۳a + ۴b$$

$$f(۲) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} b[x] - ۱ = b - ۱$$

$$b - ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۴$$

$$-۳a + ۴b = ۳ \xrightarrow{b = ۴} -۳a + ۱۶ = ۳ \Rightarrow -۳a = -۱۳ \Rightarrow a = \frac{۱۳}{۳}$$

۶۰- در تابع مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)= \begin{cases} a\ |x|+۱ & x\leq ۱ \\ x^{۲}+۲ax+۲ & x>۱ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} x^{۲}+۲ax+۲ = ۱+۲a+۲۲ = ۳+۲a = f(۱)\ ۰/۵ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} a\ |x|+۱=a+۱\ ۰/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳+۲a = a+۱ \Rightarrow a=-۲\ ۰/۲۵$$