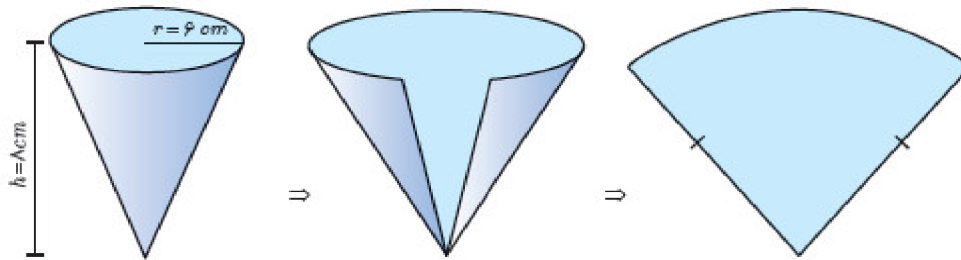
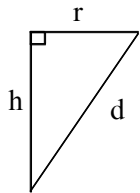
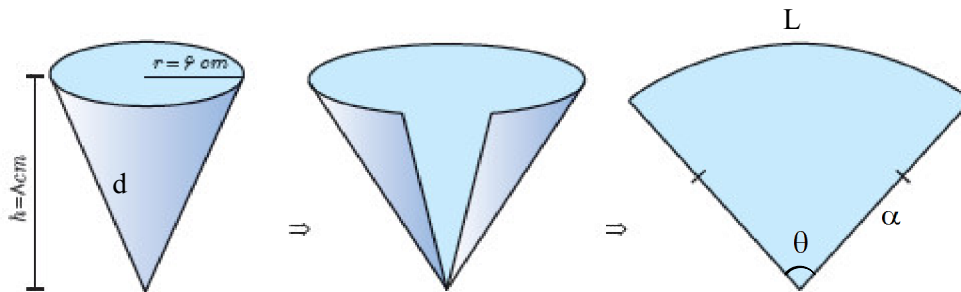


۱- شکل فضایی و نی شکل گسترده‌ی یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه‌ی زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



« پاسخ »



$$d^2 = r^2 + h^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow d = 10$$

طول کمان = محیط قاعده‌ی مخروط = $2\pi r = 12\pi$

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi \text{ Rad}$$



۲- طول برف‌پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi \simeq 3/14$)

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

« پاسخ »

$$\text{الف) } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24} \quad \theta = \frac{L}{r}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$$

۳- در دایره‌ای به محیط ۱۶π طول کمان مقابل به زاویه ۱۵۰ درجه را بیابید.

« پاسخ »

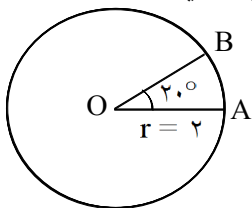
ابتدا باید زاویه را بر حسب رادیان حساب کنیم.

$$\theta = ۱۵۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\text{محیط} = ۱۶\pi \Rightarrow ۱۶\pi = ۲\pi R \Rightarrow R = \frac{۱۶\pi}{۲\pi} = ۸$$

$$R = ۸ \Rightarrow L = R\theta \Rightarrow L = ۸ \times \frac{۵\pi}{۶} = \frac{۲۰\pi}{۳}$$

۴- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را بر حسب رادیان به دست آورید. سپس طول کمان AB را پیدا کنید.



« پاسخ »

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۹}$$

$$L = r\theta \Rightarrow L = ۲ \times \frac{\pi}{۹} = \frac{۲\pi}{۹}$$

۵- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

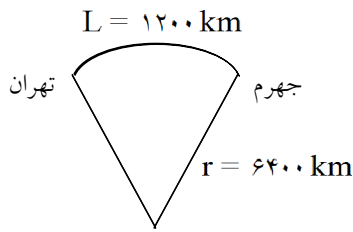
الف) مرکز دایره‌ی محاطی مثلث، محل تلاقی نیمسازهای مثلث است.

ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = -۲x^۲ + ۸x - ۵$ برابر ۲ است.

پ) در دایره‌ای به شعاع ۱۰، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ برابر $۰/۸$ رادیان است.

« پاسخ »

الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵)

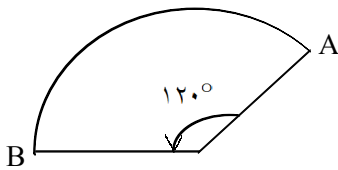


۶- اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره‌ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید. (زاویه برحسب رادیان باشد.)

« پاسخ »

$$L = 1200 \text{ km} \quad r = 6400 \text{ km} \quad \theta = ?$$

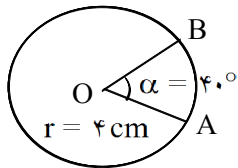
$$L = r\theta \Rightarrow 1200 = 6400\theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$



۷- متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره به نقطه‌ی B می‌رود. اگر شعاع دایره ۱۸ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{18} \Rightarrow L = 12\pi$$

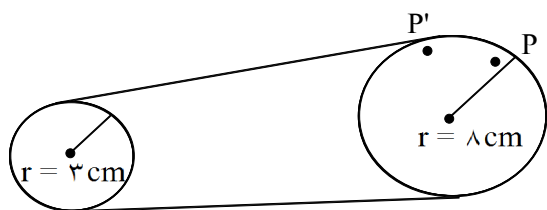


۸- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه α را برحسب رادیان به دست آورید، سپس طول کمان AB را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$\frac{40}{\alpha} = \frac{180}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{4} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{8\pi}{9} \text{ cm}$$



۹- در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های ۸ cm و ۳ cm را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

« پاسخ »

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = \frac{\pi}{3} \times 8 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

در قرقره بزرگ‌تر داریم:

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقره کوچک‌تر نیز $\frac{8\pi}{3}$ cm حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{3} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad}$$

۱۰- متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲ متر، مسافتی به اندازه‌ی ۶ متر را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند. زاویه‌ی طی شده توسط متحرک را برحسب درجه و رادیان به دست آورید.

« پاسخ »

هر دو متر یک رادیان محسوب می‌شود (شعاع دایره ۲ متر است) پس متحرک ۳- رادیان طی کرده است.

$$\frac{-3}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{-540}{\pi}$$

زاویه برحسب درجه

۱۱- زاویه ۲۲۵ درجه را به رادیان بنویسید.

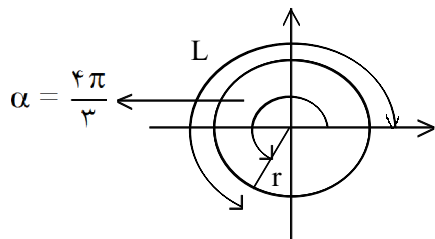
« پاسخ »

$$\frac{225}{180} = \frac{\text{Rad}}{\pi} \Rightarrow \text{Rad} = \frac{5\pi}{4}$$

۱۲- طول کمان دایره‌ای به زاویه‌ی مرکزی $\frac{\pi}{3}$ رادیان، برابر با $\frac{4\pi}{3}$ واحد طول است. قطر دایره را بیابید.

« پاسخ »

در رابطه‌ی $\alpha = \frac{L}{r}$ ، مقادیر رادیان $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $L = \frac{4\pi}{3}$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا r به دست آید:



$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{r}$$

$$\Rightarrow r = 4$$

در نتیجه، قطر دایره برابر $d = 2r = 8$ است.

الف) $\text{Sin}(۳۰۰^\circ) =$

ب) $\text{Cotg}(۷۵۰^\circ) =$

پ) $\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{۶}\right) =$

ت) $\text{Cos}\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right) =$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) =$

ج) $\text{tg}(-۸۴۰^\circ) =$

چ) $\text{tg}(-۱۵۰^\circ) =$

ح) $\text{Cos}\left(\frac{۹\pi}{۴}\right) =$

خ) $\text{tg}\left(\frac{۱۰\pi}{۳}\right) =$

« پاسخ »

الف) $\text{Sin}(۳۰۰^\circ) = \text{Sin}\left(۲\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\text{Cotg}(۷۵۰^\circ) = \text{Cotg}\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \text{Cotg}\left(۴\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \text{Cotg}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳}$

پ) $\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ت) $\text{Cos}\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \text{Cos}\left(۶\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \text{Sin}\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\text{tg}(-۸۴۰^\circ) = -\text{tg}(۸۴۰^\circ) = -\text{tg}\left(۵\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \sqrt{۳}$

چ) $\text{tg}(-۱۵۰^\circ) = -\text{tg}(۱۵۰^\circ) = -\text{tg}\left(۲\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ح) $\text{Cos}\left(\frac{۹\pi}{۴}\right) = \text{Cos}\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

خ) $\text{tg}\left(\frac{۱۰\pi}{۳}\right) = \text{Cos}\left(۳\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = -\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۲}$

۱۴- حاصل $\cos(315^\circ) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ را بیابید.

« پاسخ »

$$\cos(315^\circ) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos 45 + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۱۵- مقدار عددی عبارت $\cos(-150^\circ)\cos 420^\circ + \sin 330^\circ\sin 300^\circ$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) \Rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) \Rightarrow \cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) \Rightarrow \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) \Rightarrow \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-150^\circ)\cos 420^\circ + \sin 330^\circ\sin 300^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

۱۶- اگر $\tan 20^\circ = 0.4$ باشد، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - 2\cos(-200^\circ)}{\cos 110^\circ - \sin(-70^\circ)}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - 2\cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ + 2\cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج}} \frac{\cos 20^\circ \div}{\cos 20^\circ \div}$$

$$\frac{\tan 20^\circ + 2}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{2/4}{0.6} = 4 \quad (0/25)$$

(0/25)

۱۷- مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ (ب) $\cos(225)$ (ج) $\operatorname{tg}\left(\frac{14\pi}{3}\right)$ (د) $\operatorname{Cotg}\left(\frac{19\pi}{6}\right)$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-6\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cos(225) = \cos(180 + 45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ج) } \operatorname{tg}\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{15\pi - \pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{د) } \operatorname{Cotg}\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{18\pi + \pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

۱۸- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} &= \frac{\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{-1 - 1}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

۱۹- اگر $f(x) = -4\sin(\sqrt{x}) - 1$ باشد، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -4\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) - 1 = -4\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -4\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1 = -4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

۲۰- اگر $f(x) = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ب) $f\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

« پاسخ »

الف) $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 3 \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(\frac{7\pi - 3\pi}{12}\right) = 3 \cos\left(\frac{4\pi}{12}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 $= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ب) $f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos(2\pi) = 3 \times 1 = 3$

۲۱- مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(240^\circ)$ ب) $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right)$ ج) $\operatorname{tg}(300^\circ)$ د) $\operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

« پاسخ »

الف) $\sin(240^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{30\pi - \pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = +\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ج) $\operatorname{tg}(300^\circ) = \operatorname{tg}(2 \times 180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$

د) $\operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

۲۲- حاصل $\cos(-240^\circ) + 2 \operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) - \sin^2 135^\circ$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$\cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{4} = -1$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 135^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos(-240^\circ) + 2 \operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) - \sin^2 135^\circ = -\frac{1}{2} + 2(-1) - \frac{1}{2} = -3$

۲۳- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$A = 2 \cos(-45^\circ) \times \operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{Cotg} 240^\circ \times \sin(-225^\circ)$$

« پاسخ »

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(\underbrace{180^\circ - 60^\circ}_{\text{ربع دوم}}) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{Cotg} 240^\circ = \operatorname{Cotg}(\underbrace{180^\circ + 60^\circ}_{\text{ربع سوم}}) = \operatorname{Cotg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(-225^\circ) = -\sin 225^\circ = -\sin(\underbrace{180^\circ + 45^\circ}_{\text{ربع سوم}}) = -(-\sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{-5\sqrt{6}}{6}$$

$$24- \text{حاصل} \frac{(a^2 - b^2) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cot(\pi + \alpha)} + \frac{(a^2 + b^2) \cot(\pi - \alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \text{ را بیابید.}$$

« پاسخ »

$$? = \frac{(a^2 - b^2) \cot \alpha}{\cot \alpha} + \frac{(a^2 + b^2) (-\cot \alpha)}{(-\cot \alpha)}$$

$$= a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2$$

۲۵- هرگاه $\cotg 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل کسر $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$p = \frac{3\sin(90^\circ - 15^\circ) + 2\sin(90^\circ + 15^\circ)}{\cos(180^\circ - 15^\circ) - \cos(270^\circ - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{5\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$$

$$= \frac{5\cotg 15^\circ}{-\cotg 15^\circ + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-(2 + \sqrt{3}) + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5(2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})}{(-1 - \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{1 - 3} = \frac{-5}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

۲۶- عبارت مقابل را برحسب نسبت‌های مثلثاتی a بنویسید.

$$\operatorname{tg}(a + 54^\circ)$$

« پاسخ »

$$\operatorname{tg}(a + 54^\circ) = \operatorname{tg}(36^\circ + 18^\circ + a) = \operatorname{tg}(18^\circ + a) = \operatorname{tga}$$

۲۷- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \cos(\alpha + \pi), \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

« پاسخ »

$$\text{به ترتیب از چپ به راست: } -\sin\alpha, -\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha$$

۲۸- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$۱) \operatorname{tg}(90^\circ + \theta) = \dots$$

$$۴) \cos(36^\circ - 25^\circ) = \cos \dots$$

$$۲) \operatorname{tg}(180^\circ - 75^\circ) = -\operatorname{tg} \dots$$

$$۵) \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos \dots$$

$$۳) \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin \dots$$

« پاسخ »

$$۶) -\operatorname{Cotg}\theta$$

$$۷) \cos 25^\circ$$

$$۸) -\operatorname{tg} 75^\circ$$

$$۹) \cos 15^\circ$$

$$۱۰) -\sin 60^\circ$$

۲۹- درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

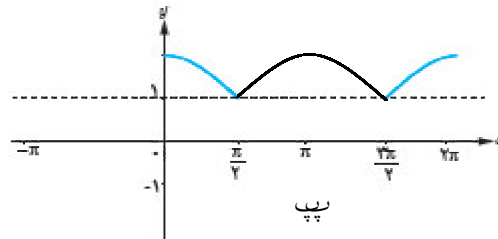
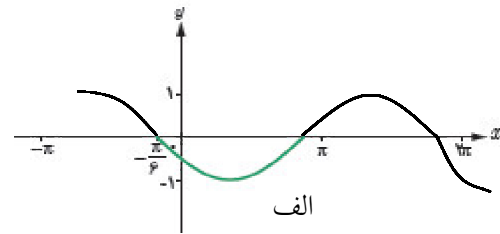
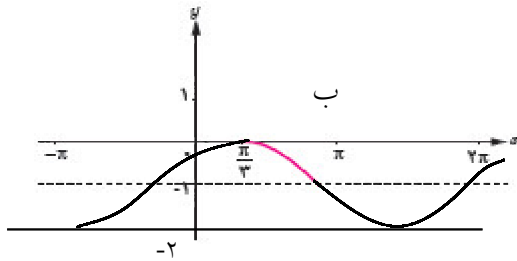
$$\sin(-135^\circ) = \sin(-45^\circ) \cos(-90^\circ) + \cos(-45^\circ) \sin(-90^\circ)$$

« پاسخ »

$$\text{سمت راست} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{سمت چپ} = \sin(-135) = -\sin 135 = -\sin(90 + 45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۰- با توجه به نمودارهای زیر، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟



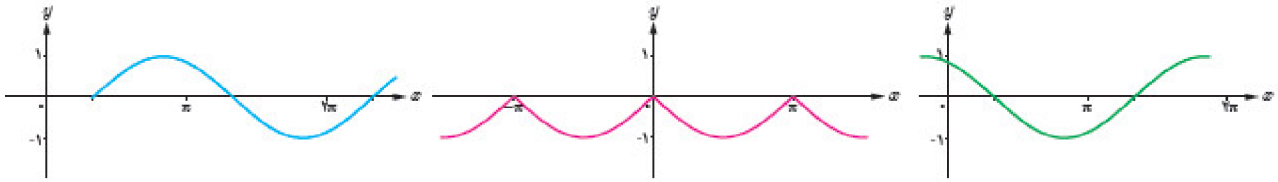
« پاسخ »

نمودار پ

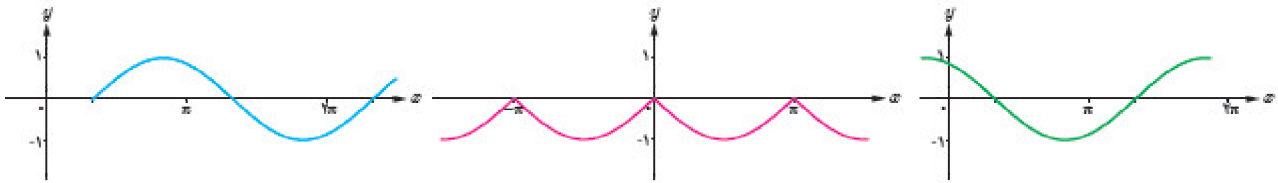
$$\left(\frac{\pi}{3}, \pi, ??\right)$$

۳۱- توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = -|\sin x|$ (ب) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (پ) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



« پاسخ »



۳۲- در تابع $f(x) = 3\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + 1$ مقدار تابع به ازای $x = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + 1 \Rightarrow f(x) = 3\cos(x) + 1 \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = 3\cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) + 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = 3\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = -3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = -3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$$

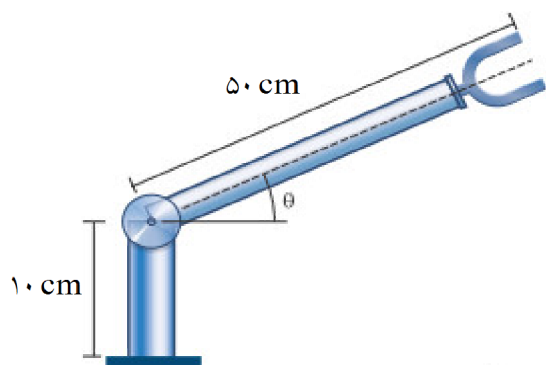
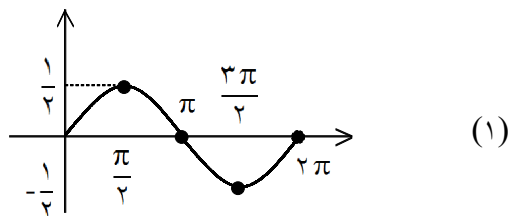
۳۳- مقدار $y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

« پاسخ »

$$y = 4\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}$$

۳۴- نمودار تابع $y = \frac{1}{2} \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

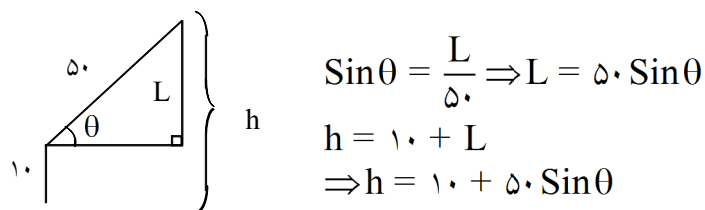
« پاسخ »



۳۵- در روبات زیر ارتفاع نوک گیره از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدلسازی کنید و سپس اگر فاصله نوک گیره تا سطح زمین ۳۵ cm باشد، θ را حساب کنید.

$$\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

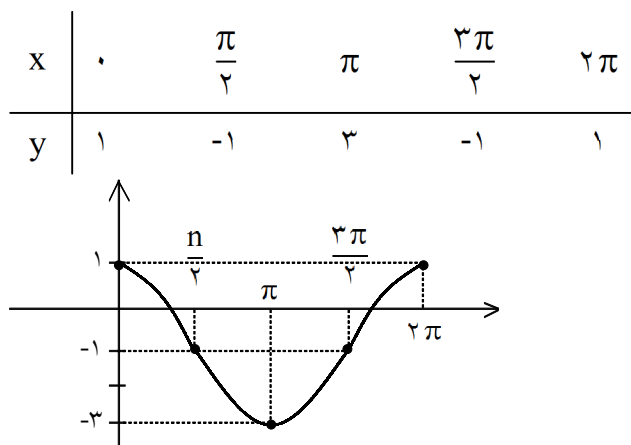
« پاسخ »



$$h = 35 \Rightarrow 35 = 10 + 50 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

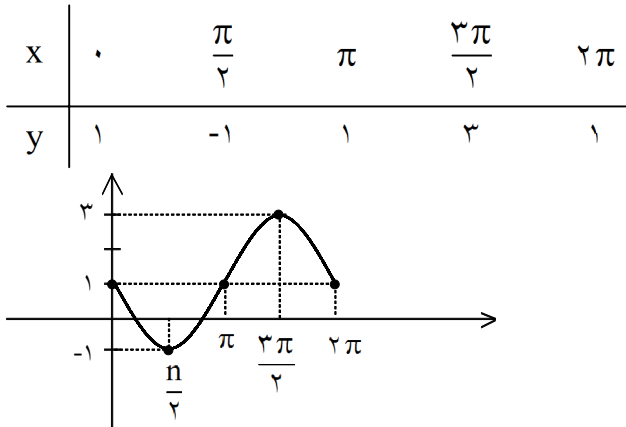
۳۶- نمودار تابع $y = 2 \cos x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

« پاسخ »



۳۷- نمودار تابع $y = 1 - 2\sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

« پاسخ »



۳۸- با فرض $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos^2 x = \frac{2+m}{1-m}$ آن‌گاه حدود m کدام است؟

« پاسخ »

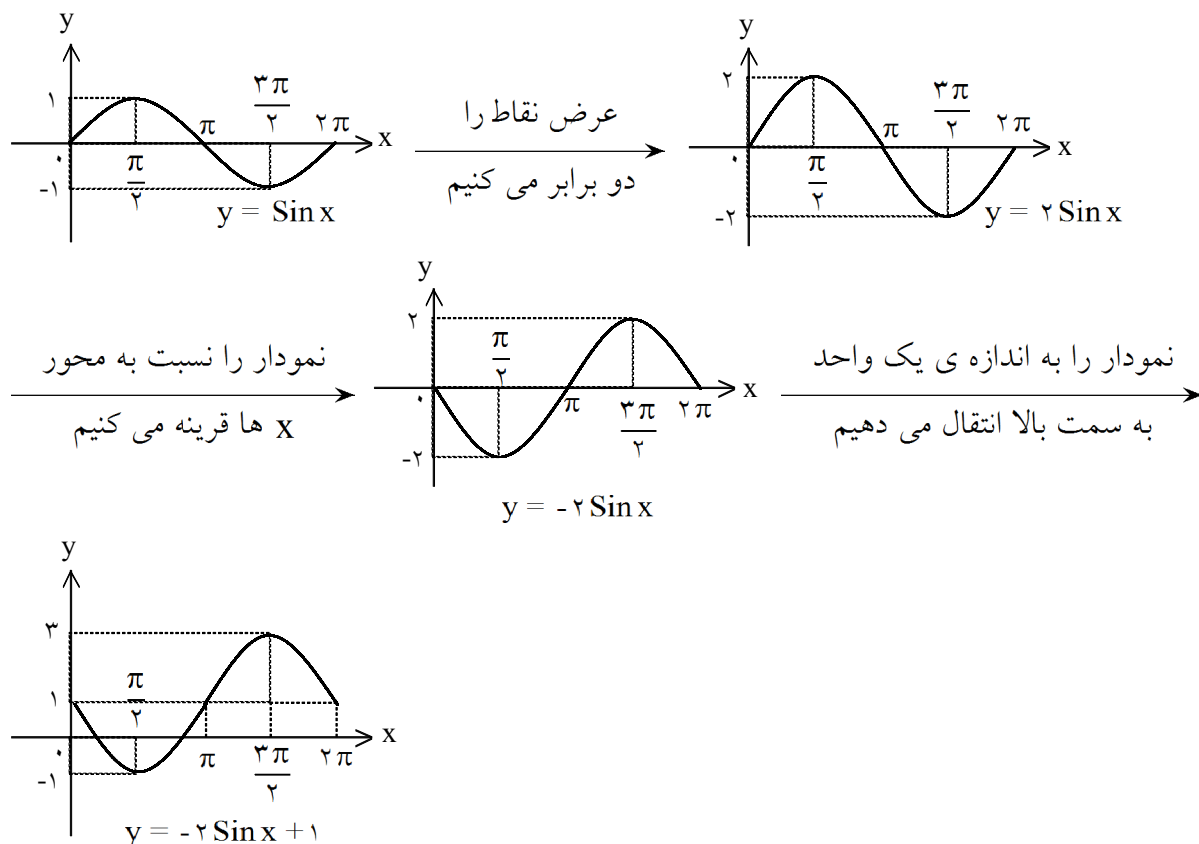
$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{2+m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+2m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 1 \\ \frac{2+m}{1-m} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{7}{5} < m < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب: } -\frac{7}{5} < m \leq -\frac{1}{2}$$

۳۹- نمودار تابع $y = -2\sin x + 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ و با استفاده از انتقال رسم کنید.

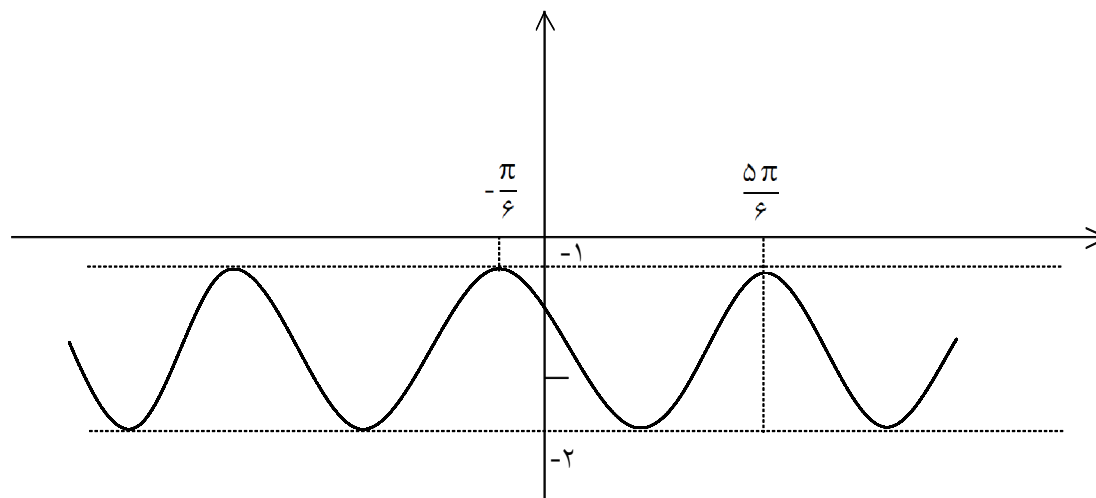
« پاسخ »



۴۰- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ و آنچه در مورد انتقال می دانید، رسم کنید:

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$$

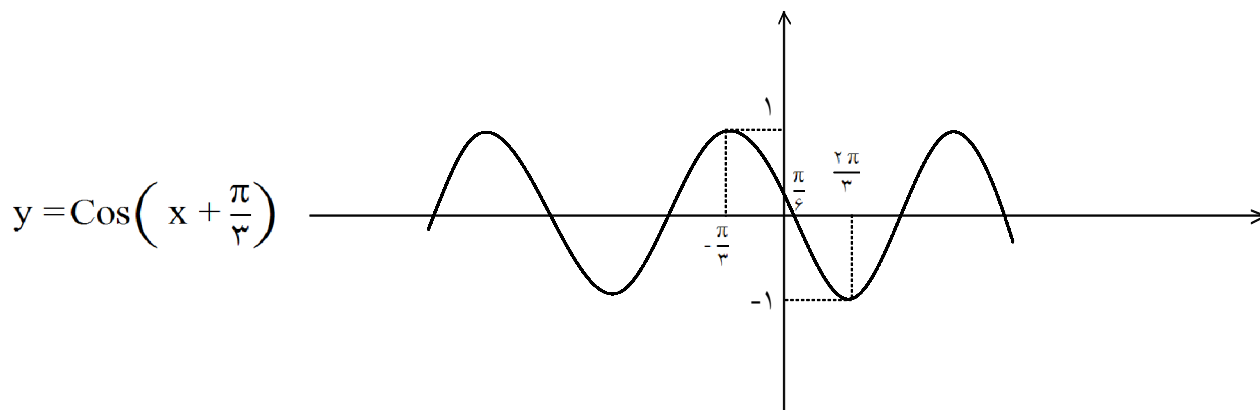
« پاسخ »



۴۱- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

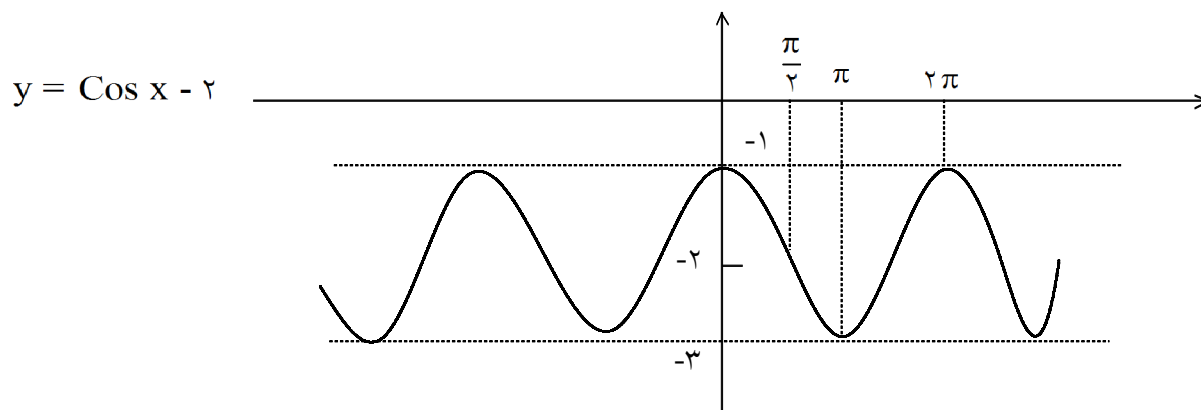
« پاسخ »



۴۲- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \cos x - 2$$

« پاسخ »



۴۳- فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد.

اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

« پاسخ »

$$\text{الف) } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13} \right) + \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{13} \right)$$

$$= \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{13} \right) = \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65}$$

$$\text{ب) } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

۴۴- حاصل را بیابید.

$$\frac{\cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} - \sin 20^\circ \quad \text{ب) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{5\pi}{12} \right) \quad \text{الف)}$$

« پاسخ »

الف) می‌دانیم:

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{2}{4} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

لذا:

$$\text{و } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{4} - \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{12} \right)}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin(10^\circ - 20^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = -\text{tg } 10^\circ \quad \text{ب)}$$

۴۵- مقدار $\sin 22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 45 = 1 - 2\sin^2 22/5$$

$$2\sin^2 22/5 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 22/5 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

۴۶- به کمک بسط $\cos(\alpha + \beta)$ نشان دهید:

« پاسخ »

$$-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = -\cos x + \sin x$$

۴۷- سینوس زاویه 105° را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\sin 105 = \sin(45 + 60) = \sin 45 \cos 60 + \cos 45 \sin 60 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$$

۴۸- درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

« پاسخ »

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \times 1 = \cos 2x$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(صفحات ۳۵ و ۳۶)

۴۹- زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه است و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (0/25),$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \underbrace{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}_{(0/25)} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (0/25)$$

۵۰- فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos 2\alpha = \underbrace{1 - 2\sin^2 \alpha}_{(0/25)} = \underbrace{1 - 2\left(\frac{16}{25}\right)}_{(0/25)} = \underbrace{-\frac{7}{25}}_{(0/25)}$$

۵۱- اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{5}{13}$ و α منفرجه و β حاده باشند، حاصل $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5} \quad (0/5), \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{12}{13} \quad (0/25)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{33}{65}$$

(0/25) (0/25) (0/25)

۵۲- فرض کنید $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α زاویه‌ی حاده باشد. حاصل $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \tan^2 \alpha \stackrel{(\cdot/25)}{=} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \stackrel{(\cdot/25)}{}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \stackrel{(\cdot/25)}{}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \stackrel{(\cdot/25)}{=} 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25} \stackrel{(\cdot/25)}{}$$

۵۳- اگر α زاویه‌ی حاده و β زاویه‌ی منفرجه باشد و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ و $\sin \beta = \frac{2}{5}$ آن‌گاه حاصل $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \stackrel{(\cdot/5)}{}$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \stackrel{(\cdot/5)}{}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right)$$

۵۴- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \stackrel{(\cdot/25)}{=} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \stackrel{(\cdot/25)}{=} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \stackrel{(\cdot/25)}{=} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} \\ &= \cos(2x) \stackrel{(\cdot/25)}{=} \end{aligned}$$

۵۵- درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$\frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin 2\alpha$$

« پاسخ »

طرف چپ :
$$\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha} = \frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{2}{\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

۵۶- عبارت زیر را ساده کنید.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

« پاسخ »

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

۵۷- فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و α حاده و β منفرجه باشد، عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\tan 2\beta$$

« پاسخ »

$$\sin \beta = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos \beta = \frac{-8}{17} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{-15}{8}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\frac{-15}{4}}{1 - \frac{225}{64}} = \frac{\frac{-15}{4}}{\frac{-161}{64}} = \frac{240}{161}$$

۵۸- درستی اتحاد $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.

« پاسخ »

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(۰/۵) (۰/۵)

$$= \sin x + \cos x$$

(۰/۲۵)

۵۹- اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ آن‌گاه ثابت کنید $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

« پاسخ »

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

۶۰- مقدار عددی عبارت $\frac{\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 50^\circ}{\cos 100^\circ}$ چه قدر است؟

« پاسخ »

$$\begin{aligned} ? &= \frac{\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 50^\circ}{\cos 100^\circ} = \frac{\sin 50^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cos 50^\circ}{-\sin 10^\circ} \\ &= \frac{\sin(30^\circ + 50^\circ)}{-\cos 30^\circ \sin 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80^\circ} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \tan 80^\circ \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

۶۱- ثابت کنید:

« پاسخ »

$$\cos \alpha = \cos \left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$