

نسبت های مثلثاتی و توابع مثلثاتی:

تمرین:

۱- اندازه زاویه های زیر را برحسب رادیان بنویسید.

الف) 135° (ب) 705° (ج) 2565°

۲- زاویه های زیر را برحسب درجه بنویسید.

الف) 2 رادیان (ب) $\frac{9\pi}{2}$ رادیان (ج) $\frac{24\pi}{5}$ رادیان

۳- در دایره ای به شعاع 1 cm طول کمان روبرو به زاویه 2 رادیان چقدر است؟

۴- اگر نقطه ی $P\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ روی دایره مثلثاتی و انتهای کمان زاویه θ باشد. مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را به دست آورید.

۵- در هر مورد زیر، حدود x از بازه $[0, 2\pi]$ را طوری بیابید نامساوی برقرار باشد.

الف) $\sin x > \frac{1}{2}$ (ب) $\sin x < -\frac{1}{2}$ (ج) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۶- حاصل عبارت $\sqrt{1-2\sin x \cos x}$ وقتی $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ باشد را بیابید.

۷- به ازای چه مقدار x از بازه $[0, 2\pi]$ تساوی $\sin x = \cos(40^\circ + x)$ برقرار است؟

۸- اگر $\sin\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان در ناحیه چهارم باشد. حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $\sin(3\pi - \theta)$ (ب) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ (ج) $\tan\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right)$

۹- حاصل عبارت های زیر را حساب کنید.

الف) $A = \cot(330^\circ) \cdot \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)$

ب) $B = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \cot\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$

ج) $C = \frac{\sin^2(140^\circ) + \cos(300^\circ)}{\tan(135^\circ) + \cot^2(-150^\circ)}$

د) $D = \sin(200^\circ) + 2\sin(160^\circ) - \cos(70^\circ) + 3\sin(340^\circ) - 4\cos(110^\circ) - \cos(70^\circ)$

ه) $E = \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)$

و) $F = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)$

۱۰- اگر $\cos \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه چهارم باشد. مقدار عددی عبارت $H = \frac{1 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right)}{3 \tan(-5\pi - \theta) + \tan\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)}$ را بیابید.

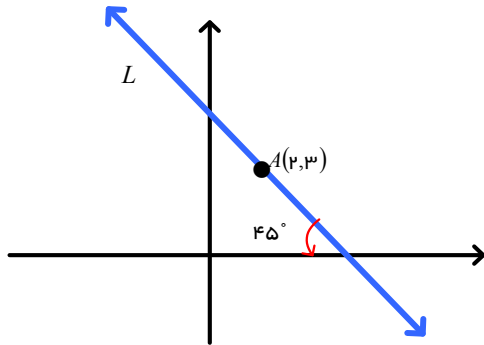
۱۱- اگر $\tan \theta = 2$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد. حاصل عبارت $G = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \sin^3(5\pi + \theta)}{\sin^2\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right)}$ را بیابید.

۱۲- اگر $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ باشد. حاصل عبارت $I = \frac{3 \sin(75^\circ) + 2 \sin(105^\circ)}{\cos(165^\circ) - \cos(285^\circ)}$ را محاسبه کنید.

۱۳- اگر $\tan 35^\circ = \frac{5}{7}$ باشد. حاصل عبارت $K = \frac{2 \sin(125^\circ) - \sin(235^\circ)}{\cos(395^\circ) + \sin(575^\circ)}$ را محاسبه کنید.

۱۴- اگر $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه اول باشد. حاصل $\sin(\theta - \pi)$ را بنویسید.

۱۵- معادله خط مقابل را بنویسید.



۱۶- خط گذرنده از نقاط $A(0, 1)$ و $B(2\sqrt{3}, -1)$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه ای می سازد؟

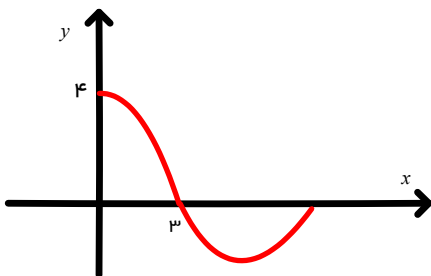
۱۷- اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد. حدود m را بیابید.

۱۸- جواب های معادله $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ در بازه $[-5\pi, 7\pi]$ را بیابید.

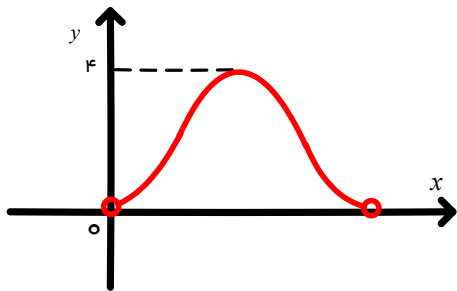
۱۹- خط $y = 2$ نمودار تابع $y = 3 \sin(2x)$ را در بازه $[0, 6\pi]$ در چند نقطه قطع می کند؟

۲۰- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 4 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + b$ به شکل مقابل است.

مقدار a و b و دوره تناوب تابع را بیابید. ($a > 0$)



۲۱- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = a + b\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. مقدار a و b را بیابید



۲۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۲۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2 - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

ج) $y = [\cos x]$

هـ) $f(x) = \sin x + |\sin x|$ ، $x \in [0, 2\pi]$

ز) $y = 2\sin x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1$

ب) $y = 2\sin(3x) - 1$

د) $y = |3\sin(2x)|$

و) $y = 1 - 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

ح) $y = 2 - \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} + 2x\right)\right)$

۲۴- کمترین مقدار تابع $f(x) = a\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) + b$ روی محور x ها قرار دارد. اگر نمودار تابع f خط $y = x + 2$ را در

نقطه ای به طول یک قطع کند. مقدار a و b را بیابید

۲۵- دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$

ج) $y = \cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

هـ) $y = \sqrt{\sin x}$

ب) $y = \sin(2x) + \cos\sqrt{2x - \pi}$

د) $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

و) $y = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2}$

۲۶- برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 8\sin^2 x - 3$

ج) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

هـ) $y = |3\sin x - 4|$

ب) $y = 3\cos\left(5x - \frac{\pi}{8}\right) - 1$

د) $y = 4\sin^2 x - 12\sin x + 9$

و) $y = 4\cos x - \sin^2 x$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه ها:

تمرین:

۱- نمودار تابع $f(x) = \sin x - \cos x$ را رسم کنید.

۲- حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

الف) $A = \cos 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 80^\circ \sin 50^\circ$

ب) $B = (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)(\cos 10^\circ + \sin 10^\circ) - \sin 80^\circ$

ج) $C = \cos 165^\circ \cos 105^\circ$

د) $D = \sin(\sqrt{1/5}^\circ) \sin(9\sqrt{1/5}^\circ) \cos(15^\circ)$

ه) $E = \frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$

۳- اگر $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 4x$ را بیابید.

۴- اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 2x$ را بیابید.

۵- اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $\sin 2\alpha$ را بیابید.

۶- اگر $\tan \beta = \frac{1}{3}$ و $\tan \alpha = 2$ باشد مقدار $\tan(2\alpha - \beta)$ را بیابید.

۷- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ را بیابید.

۸- فرض کنید $f(x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ باشد مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ را حساب کنید.

۹- اگر $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و $\sin \beta = \frac{12}{13}$ که α زاویه حاده و β زاویه منفرجه باشد حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $\sin(\alpha - \beta) =$

ب) $\sin(\alpha - \beta) =$

ج) $\cos(\alpha + \beta) =$

د) $\cos(\alpha - \beta) =$

ه) $\tan(\alpha - \beta) =$

و) $\tan(\alpha - \beta) =$

ز) $\sin 2\alpha =$

ط) $\cos 2\beta =$

ی) $\tan 2\alpha =$

۱۰- عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $A = \frac{\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x}{\sin 3x - \sin 2x \cdot \cos x}$

ب) $B = \frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$

ج) $C = \sin(\sqrt{1/5}^\circ) \cos(\sqrt{1/5}^\circ) \cos(15^\circ)$

د) $D = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$

۱۱- اگر $\sin 6^\circ = a$ باشد حاصل $\sin 78^\circ$ را بر حسب a بنویسید.

۱۲- مقدار عددی عبارت $A = \frac{\tan 10^\circ \tan 70^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ}$ را حساب کنید.

۱۳- درستی تساوی های زیر را بررسی کنید .

الف) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

ب) $\cos 4x = \frac{4 \cos 2x}{\tan x + \cot x}$

ج) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

د) $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$

ه) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

و) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

ز) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

ی) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

ک) $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

۱۴- ثابت کنید برای هر مثلث دلخواه ABC داریم: $\sin\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \cos\left(\frac{\angle B + \angle C}{2}\right)$

۱۵- ثابت کنید به ازای هر x همواره داریم: $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$