نمونه سوال (لگاریتم)

۱- حاصل عبارت $\log_5^{15} + \log_5^{30} - \log_5^{18}$ را بیابید.

۲- حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\log_8^{2\sqrt2}$

ب) $\log_{\sqrt[3]{16}}^{0.25}$

ج) $\log_{25}^{0.008}$

د) $\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \dots + \log\frac{99}{100}$

ه) $\frac{2}{2+\log_b^a} + \frac{1}{1+\log_a^{b^2}}$

۳- اگر $\log_3^2 = a$ باشد حاصل $\log_{18}^{24}$ را بیابید.

۴- اگر $\log^5 = a$ باشد حاصل $\log_{25}^{50}$ را بیابید.

۵- اگر $\log^2 = 0.30$ حاصل $\log^{50}$ را بیابید.

۶- اگر $\log^{25} = a$ حاصل $\log^8$ را بیابید.

۷- حاصل $[\log_2^{300}]$ برابر چه عددی است؟

۸- حاصل $[\log^{0.003}] + [\log^{41}]$ را بیابید؟

۹- اگر $\log^a = 3.784$ آنگاه عدد a^4 چند رقمی است.

۱۰- حاصل $4^{1+\log_2^3}$ را بیابید.

۱۱- حاصل $(0.1)^{1-\log^x}$ را بیابید.

۱۲- معادلات را حل کنید.

الف) $\log_2^{x-3} + \log_2^{x+1} = 5$

ب) $\log_3^{x^2-x+3} - \log_3^{2x-1} = 1$

ج) $\log_2^{x-4} + \log_2^{x-2} = 3$

د) $\log_3^{\sqrt3} + \log_{\sqrt3}^{3} = \log_9^x$

Scanned by CamScanner

۱۳. مجموع ریشه های معادله های زیر را بیابید.

الف) $2\log_2^{x+1} + \log_2^{2x} = 3$

ب) $\log_2^x + \log_x^4 = 3$

۱۴. حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی $\log_3^{\frac{x}{9}} \log_3^{x} - 3 = 0$ را بیابید.

۱۵. اگر $\log_x \sqrt{7} = -\frac{1}{2}$ آنگاه $\log_2 (x+\frac{1}{x})$ را بیابید.

۱۶. اگر $\log\frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد $\log_8 x$ را بیابید.

۱۷. اگر $\log_2(5x+1) + \log_2^x = 2$ باشد x را بیابید.

۱۸. اگر $\log(x^2-x+1) + \log(x+1) = 1$ باشد $\log_3^x$ را بیابید.

۱۹. لگاریتم عددی از لگاریتم عکس مجذور آن عدد، در پایه‌ی ۹ به اندازه‌ی ۴٫۵ واحد بیشتر است. آن عدد را بیابید.

۲۰. اگر $\log_a 20 = \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{6}$ باشد a را بیابید.

۲۱. ریشه های معادله‌ی $x^{\log_5 x} = 625$ را بیابید.

عابدی

(حل سوالات تمارین) (عابدی)

۱) $\log_5 \frac{15\times 30}{18} = \log_5 25 = 2$

۲)

الف) $\log_8 2\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3}\log_2 2 = \frac{1}{2}$

ب) $\log_{\sqrt[3]{16}} 0{,}25 = \log_{\sqrt[3]{2^4}} \frac{1}{4} = \log_{2^{\frac{4}{3}}} 2^{-2} = \frac{-2}{\frac{4}{3}}\log_2 2 = -\frac{3}{2}$

ج) $\log_{25} 0{,}008 = \log_{25} \frac{8}{1000} = \log_{25} \frac{1}{125} = \log_{5^2} 5^{-3} = -\frac{3}{2}$

د) $= \log \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{99}{100} = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$

ه) $\frac{2}{2+\log_b a} + \frac{1}{1+\frac{2}{\log_b a}} = \frac{2}{2+\log_b a} + \frac{1}{\frac{\log_b a + 2}{\log_b a}} =$

$= \frac{2}{2+\log_b a} + \frac{\log_b a}{2+\log_b a} = \frac{2+\log_b a}{2+\log_b a} = 1$

نکته:

$\log_a b^2 = 2\log_a b = \frac{2}{\log_b a}$

(۳)

$$\log_{۱۸}^{۲۴} = \frac{\log_{۳}^{۲۴}}{\log_{۳}^{۱۸}} = \frac{\log_{۳}^{۳\times۸}}{\log_{۳}^{۲\times۹}} = \frac{\log_{۳}^{۳} + \log_{۳}^{۸}}{\log_{۳}^{۲} + \log_{۳}^{۹}}$$

$$= \frac{۱ + ۳\log_{۳}^{۲}}{\log_{۳}^{۲} + ۲} = \frac{۱ + ۳a}{a + ۲}$$

نکته: $\log_{b}^{a} = \dfrac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$

(۴)

$$\log_{۲۵}^{۵۰} = \frac{\log ۵۰}{\log ۲۵} = \frac{\log ۵\times۱۰}{\log ۵^{۲}} = \frac{\log ۵ + \log ۱۰}{۲\log ۵}$$

$$= \frac{a + ۱}{۲a}$$

(۵)

$$\log ۵ = ۱ - \log^{۲} \simeq ۰/۷$$

$$\log ۵۰ = \log ۵\times۱۰ = \log ۵ + \log ۱۰ = ۰/۷ + ۱ = ۱/۷$$

(۶)

$$\log ۸ = \log ۲^{۳} = ۳\log ۲ = ۳\left(۱ - \frac{a}{۲}\right)$$

$$\log ۲۵ = a \rightarrow ۲\log ۵ = a \rightarrow \log ۵ = \frac{a}{۲}$$

$$\log ۲ = ۱ - \frac{a}{۲}$$

(۷) چون $2^9=512$ و $2^8=256$ پس $\leftarrow$ $8<\log_2 300<9$

$\rightarrow \quad [\log_2 300]=8$

(۸)

$0.001<0.003<0.01 \rightarrow 10^{-3}<0.003<10^{-2} \Rightarrow -3<\log 0.003<-2$

$\Rightarrow [\log 0.003]=-3$

$10<41<100 \rightarrow 10<41<10^2 \rightarrow 1<\log 41<2 \rightarrow [\log 41]=1$

$\Rightarrow [\log 0.003]+[\log 41]=-3+1=-2$

(۹) $\log a^4 = 4\log a = 4\times 3.784 = 15.136$

$15<\log a^4<16 \rightarrow \underbrace{10^{15}}_{\text{۱۶ رقمی}}<a^4<\underbrace{10^{16}}_{\text{۱۷ رقمی}}$ $\rightarrow$ a یک عدد ۱۶ رقمی است

(۱۰) $4^{1+\log_2 3} = 4\times 4^{\log_2 3} = 4\times 3^{\log_2 4} = 4\times 3^2 = 36$

نکته: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

(۱۱)

$$(۰/۰۱)^{۱-\log x} = \frac{۰/۰۱}{(۰/۰۱)^{\log x}} = \frac{۱}{۱۰۰x^{\log ۰/۰۱}} = \frac{۱}{۱۰۰x^{\log ۱۰^{-۲}}}$$

$$= \frac{۱}{۱۰۰x^{-۲}} = \frac{x^۲}{۱۰۰}$$

(۱۲)

الف) $\log_۲ (x-۳)(x+۱) = ۵ \to (x-۳)(x+۱)=۲^۵$

$x^۲-۲x-۳=۳۲ \to x^۲-۲x-۳۵=۰ \to \begin{cases} x=۷ \\ x=-۵ \end{cases}$ غ ق ق

ب) $\log_۳ \frac{x^۲-x+۳}{۲x-۱} = ۱ \to \frac{x^۲-x+۳}{۲x-۱} = ۳$

$x^۲-x+۳ = ۶x-۳ \to x^۲-۷x+۶=۰ \to \begin{cases} x=۱ \\ x=۶ \end{cases}$

ج) $\log_۲ (x-۴)(x-۶) = ۳ \to x^۲-۱۰x+۲۴=۸$

$\to x^۲-۱۰x+۱۶=۰ \to \begin{cases} x=۲ & \text{غ.ق.ق} \\ x=۸ \end{cases}$

د) $\log_۳ ۳^{\frac{۱}{۲}} + \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}} ۳ = \log_۹ x \to \frac{۱}{۲}+۲ = \log_۹ x \to \log_۹ x = \frac{۵}{۲}$

$۹^{\frac{۵}{۲}} = x \to x=(۳^۲)^{\frac{۵}{۲}} \to x=۳^۵$

(۱۳)

الف) $\log_{2}(x+1)^{2} + \log_{2} 2x = 3 \rightarrow \log_{2} (x+1)^{2}(2x) = 3$

$(x^{2}+2x+1)(2x) = 8 \rightarrow 2x^{3}+4x^{2}+2x = 8 \rightarrow x^{3}+2x^{2}+x-4 = 0$

برای حل این معادله‌ی درجه ۳ یکی از اعداد ± 1 و ± 2 و... را امتحان می‌کنیم

$x=1 \rightarrow 1+2+1-4 = 0 \rightarrow x=1$ ریشه معادله

برای پیدا کردن ریشه‌های دیگر عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$x^{3}+2x^{2}+x-4 \;\Big|\; x-1$

$x^{2}+3x+4 \rightarrow x^{2}+3x+4 = 0 \rightarrow \Delta < 0$ ریشه ندارد

پس تنها ریشه معادله $x=1$ است. و مجموع ریشه‌ها برابر ۱ است.

ب) $\log_{2} x + \log_{x} 4 = 3 \rightarrow \log_{2} x + \dfrac{1}{\log_{4} x} = 3 \rightarrow \log_{2} x + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_{2} x} = 3$

$\log_{2} x + \dfrac{2}{\log_{2} x} = 3$

$\boxed{\log_{x} 4 = \dfrac{1}{\log_{4} x}}$

فرض $\log_{2} x = a \rightarrow a + \dfrac{2}{a} = 3$

$\rightarrow a^{2}+2 = 3a \rightarrow a^{2}-3a+2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \rightarrow \log_{2} x = 1 \rightarrow x=2 \\ a=2 \rightarrow \log_{2} x = 2 \rightarrow x=4 \end{cases} \rightarrow \boxed{2+4=6}$

Scanned by CamScanner

۱۴

$$\log_۳ \frac{x}{۹} \log_۳ x - ۳ = ۰ \rightarrow \left(\log_۳ x - \log_۳ ۹\right) \log_۳ x - ۳ = ۰$$

$$\left(\log_۳ x - ۲\right) \log_۳ x - ۳ = ۰$$ فرض $\log_۳ x = a$

$$(a-۲)a - ۳ = ۰ \rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \rightarrow \begin{cases} a = -۱ \rightarrow \log_۳ x = -۱ \rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۳} \\ a = ۳ \rightarrow \log_۳ x = ۳ \rightarrow x_۲ = ۲۷ \end{cases}$$

$$x_۱ . x_۲ = \frac{۱}{۳} \times ۲۷ = ۹$$

۱۵

$$\log_x \sqrt{۷} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۷} \rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}} = ۷^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\rightarrow x^{-۱} = ۷ \rightarrow \frac{۱}{x} = ۷$$

$$\log_۲ \left(۱ + \frac{۱}{x}\right) = \log_۲ (۱+۷) = \log_۲ ۸ = ۳$$

۱۶

$$\log \frac{۲}{x}(x+۱) = ۱ \rightarrow \frac{۲(x+۱)}{x} = ۱۰^۱ \rightarrow ۲x + ۲ = ۱۰x$$

$$۸x = ۲ \rightarrow x = \frac{۱}{۴} \qquad \log_۸ x = \log_۸ \frac{۱}{۴} = \log_{۲^۳} ۲^{-۲} = -\frac{۲}{۳}$$

۱۷)

$$\log_2 (5x+1)x = 2 \to (5x+1)x = 2^2 \to 5x^2+x-4=0 \to \begin{cases} x=-1 & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases}$$

۱۸)

$$\log (x^2-x+1)(x+1) = 1 \to x^3+1 = 10^1 \to x^3 = 9 \to x = \sqrt[3]{9}$$

$$\log_3 x = \log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

نکته: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

۱۹)

$$\log_9 x = \log_9 \left(\frac{1}{x^2}\right) + 4.5 \to \log_9 x - \log_9 x^{-2} = \frac{9}{2}$$

$$\log_9 x - (-2)\log_9 x = \frac{9}{2} \to 3\log_9 x = \frac{9}{2}$$

$$\log_9 x = \frac{3}{2} \to x = 9^{\frac{3}{2}} \to 3^3 = 27$$

۲۰)

$$\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 a} - \frac{1}{6} \to \log_a 2 = \log_a 4 - \frac{1}{6}$$

$$\to \log_a 2 = \log_a 2^2 - \frac{1}{6} \to \log_a 2 = 2\log_a 2 - \frac{1}{6} \to \log_a 2 = \frac{1}{6}$$

$$a^{\frac{1}{6}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۶}} a = 2^6 = 64$$

Scanned by CamScanner

(۲۱) لگاریتم طرفین را در مبنای ۵ قرار میدهیم

$$x^{\log_5 x} = 625 \to x^{\log_5 x} = 5^4 \longrightarrow$$

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 5^4 \to (\log_5 x)(\log_5 x) = 4$$

$$\log_5 x = 2 \to x = 5^2 = 25$$

$$\log_5 x = -2 \to x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$