

تابع و انواع تابع :

تمرین :

۱- دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x^2-2x}}$

ب) $y = \sqrt{([x]+2)(3-[x])}$

ج) $y = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$

د) $y = \sqrt{|x|-x}$

هـ) $y = \sqrt{-x^r(x^r-4)^r}$

و) $y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$

ز) $y = \frac{2x+1}{x^r-5|x|+6}$

ح) $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

ع) $y = \begin{cases} -x & , x \in Q \\ x & , x \notin Q \end{cases}$

ت) $y = \frac{1}{x-[x]}$

۲- اگر دامنه تابع $y = \frac{x+2}{ax^r+2x+a}$ برابر با R باشد . حدود a را بیابید .

۳- به ازای چه مقدار a و b دامنه تابع $y = \frac{x}{2x^r-(a+3)x-2b+1}$ برابر با $R - \{3\}$ می باشد ؟

۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y = \frac{2-x}{x+2}$

ب) $y = \left| \frac{x}{x-2} \right|$

ج) $y = \frac{2|x|}{|x|+1}$

د) $y = x[x]$ و $-2 \leq x < 2$

هـ) $y = [x] + |x|$ و $-2 \leq x < 2$

خ) $y = -\sqrt{-x}$

ت) $y = \sqrt{2-x} + 1$

ث) $y = \sqrt{|x|}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x^r+1 & , x > 0 \\ \sqrt{-x} & , x \leq 0 \end{cases}$

ی) $g(x) = \begin{cases} x-1 & , x > 1 \\ 1-x^r & , -1 \leq x \leq 1 \\ -x-1 & , x < -1 \end{cases}$

م) $y = x([x] + [-x])$

س) $y = [\sqrt{x}]$

ق) $y = [x^3]$

۵- در هر مورد تساوی دو تابع را بررسی کنید .

الف) $f(x) = \sqrt{1-x^r}$ و $g(x) = (\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1})$

ب) $f(x) = \sqrt{x^r-x}$ و $g(x) = (\sqrt{x})(\sqrt{x-1})$

ج) $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \neq -1 \\ x + 1 & , x = -1 \end{cases}$

۶- به ازای چه مقدار k ، دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} & , x \neq -\frac{1}{2} \\ k^2 - 4k + 1 & , x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ برابرند؟

۷- اگر $[x^2 + x] = -1$ باشد. حاصل $A = [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ را حساب کنید.

۸- فرض کنید n عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد. حاصل $\sqrt{4n^2 - 3n + 1} - 2\sqrt{n^2 - 2n}$ را حساب کنید.

۹- اگر $g(x) = x^2 + x - 2$ باشد. مجموعه جواب معادله $g([x] + [-x]) = -2$ را تعیین کنید.

۱۰- معادله های زیر را حل کنید.

ب) $[x + [x + [x + 3]]] = 15$

ج) $[x]^2 + 3[x] = 4$

الف) $[2x - 1] = -2$

د) $\left[2x - \frac{3}{2}\right] = 1$

ه) $[x^2 - 1] = 3$

و) $\left[\frac{1 - 4x}{3}\right] = -2$

۱۱- نامعادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{[x - 2]}{[x]^2 + 1} \geq 0$

ب) $([x] - 3)([x^2] - 1) \leq 0$

ج) $[x] + [-x] + [2x] \leq 1$

۱۲- در کدام رابطه زیر y تابعی از x است؟

الف) $2xy + 1 = 3x - y$

ب) $|y| = 4 - |x|$

ج) $[y] = x$

د) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

ه) $|y| + x^2 = 2x - 1$

۱۳- مساحت سطح زیر نمودار تابع $y = [x] - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ با محور x ها در بازه $[0, 3]$ را حساب کنید.

۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x \neq 2 \\ x - 2 & , x = 2 \end{cases}$ یک تابع ثابت باشد. مقدار a و b را بیابید

۱۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , a \leq x < -1 \\ 2a - x & , x \leq -1 \end{cases}$ یک تابع باشد. مقدار $f(f(-2))$ را حساب کنید.

۱۶- به ازای چه مقدار m مجموعه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ یک تابع می باشد؟

۱۷- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - a}}{x^2 - ax + 1}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. حدود a را بیابید.

وارون تابع

تمرین:

۱- اگر رابطه $f = \{(3,2), (a,5), (3, a^2 - a), (b,2), (-1,4)\}$ یک تابع یک به یک باشد. مقدار a و b را بیابید.

۲- کدام تابع زیر یک به یک است؟ چرا؟

الف) $f(x) = x + |x|$ ب) $f(x) = x - |x|$ ج) $f(x) = x + [x]$

د) $f(x) = x - [x]$ هـ) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ و) $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$

ز) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$ ط) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ ح) $f(x) = [x^2 - 2x]$

۳- ضابطه ی تابع معکوس، تابع $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در بازه ای که معکوس پذیر است به دست آورید.

۴- اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد. حاصل $g^{-1}(16)$ را بنویسید.

۵- نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ (با دامنه $x > -1$) و نمودار تابع معکوس آن را به دست آورید.

۶- نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ و نمودار تابع معکوس آن را بنویسید.

۷- ضابطه ی تابع معکوس (وارون) توابع زیر را بیابید. سپس دامنه و برد تابع های f و f^{-1} را بنویسید.

الف) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ب) $f(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$ د) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

هـ) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - x^2}, & x \neq 0, x^2 \neq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ و) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ز) $f(x) = x|x|$ ح) $f(x) = x + [x]$

ق) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

۸- نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = -x^3$ با تابع معکوس آن را بیابید.

اعمال روی توابع

تمرین:

۱- اگر $f = \{(1,4), (0,2), (3,1), (5,0)\}$ و $g = \{(1,2), (3,3), (-1,4), (5,2)\}$ باشند. تابع های $f+g$ و $3f-2g$ را بنویسید.

۲- اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند.

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f \times g$ و $\frac{3f}{2g}$ و $\frac{f^2}{g-2}$ را بنویسید.

ب) ضابطه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f \times g$ و $\frac{3f}{2g}$ و $\frac{f^2}{g-2}$ را بنویسید.

۳- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ باشد.

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f \times g$ را بنویسید.

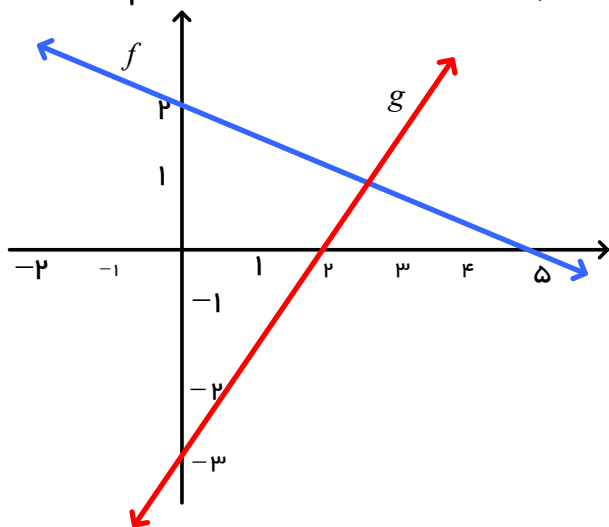
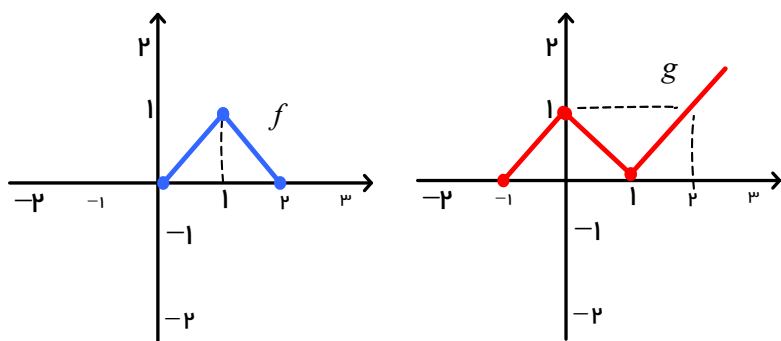
ب) ضابطه تابع های $f+g$ و $f \times g$ را بنویسید.

ج) نمودار تابع های $f+g$ و $f \times g$ را رسم کنید.

۴- در شکل زیر نمودار های دو تابع f و g داده شده است.

الف) ضابطه تابع های $f+g$ و $f \times g$ را بیابید.

ب) نمودار تابع های $f+g$ و $f \times g$ را رسم کنید.



۵- در شکل زیر نمودار های دو تابع f و g داده شده است.

الف) ضابطه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f \times g$ را بیابید.

ب) نمودار تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f \times g$ را رسم کنید

ترکیب توابع

تمرین :

۱- اگر $f = \{(1,2), (2,1), (3,0), (4,-1)\}$ و $g = \{(-1,2), (1,0), (2,1), (-2,1)\}$ باشند. تابع های fog و gof را به شکل زوج مرتب بنویسید.

۲- فرض کنید $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ باشد.

الف) دامنه تابع های fog و gof را به کمک تعریف محاسبه کنید. ب) ضابطه تابع های fog و gof را بنویسید.

۳- اگر $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = x^2 + x + 5$ باشد. معادله $gof(x) = 17$ را حل کنید.

۴- اگر $f(x) = x^3 + 3$ و $fog(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ باشد. ضابطه ی تابع $g(x)$ را بنویسید.

۵- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $fog(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشد. تابع $f(x)$ را بیابید.

۶- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ باشد. معادله ی $fog(x) = f(x)$ را حل کنید.

۷- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشد. مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $gof(x)$ و خط $y = 3$ را حساب کنید.

۸- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x$ باشد. نامعادله ی $gof(x) > 0$ را حل کنید.

۹- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $fog(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشد. ضابطه ی $g(f(x))$ را حساب کنید.

۱۰- اگر $f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(a,0)$ و $(0,a)$ باشد. ضابطه ی $fof(x)$ را بیابید.

۱۱- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد. مقدار $g(1)$ و $g(-\sqrt{2})$ را حساب کنید.

۱۲- دو تابع $f = \{(1,2), (2,3), (4,5), (3,4)\}$ و $g = \{(2,1), (3,2), (5,4)\}$ مفروضند. تابع $g^{-1}of^{-1}$ را بیابید.

۱۳- اگر $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ و $gof \in (4,1)$ و $fog \in (4,2)$ باشند.

مقادیر a و b را بیابید.

۱۴- اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد. حاصل $fog(\sqrt{2})$ را حساب کنید.

۱۵- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد حاصل $fog(1-\sqrt{2}) - gof(1-\sqrt{2})$ را بیابید.

۱۶- فرض کنید $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ باشد. مجموعه جواب معادله $g(f(x)) = -2$ را بنویسید.

۱۷- اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ باشد. برد تابع $gof(x)$ را بنویسید.

۱۸- فرض کنید $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$. دامنه تابع fog را بیابید.

۱۹- دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ را در نظر بگیرید.

اگر $g^{-1}(f(a)) = 2$ باشد. مقدار a را بیابید

۲۰- اگر $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$ باشد. نمودار تابع های $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ و $h(x) = f^{-1} \circ f(x)$ را رسم کنید.