

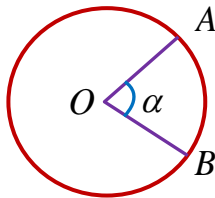
سؤالات و پاسخ تشریحی سؤالات فصل ۱ هندسه ۲

۱- ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره محدود است را قطاع دایره می نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ و مساحت قطاع برابر

است با: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$

حل:

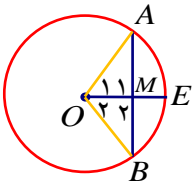
با استفاده از خواص نسبت تناسب می توان نوشت:



$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi R}{L} \Rightarrow L = \frac{2\pi R \alpha}{360} = \frac{\pi R}{180} \alpha$$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{S'} \Rightarrow S' = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

۲- ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل کند بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند (فرض و حکم را بنویسید).



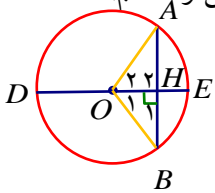
فرض: $\widehat{AE} = \widehat{BE}$ حکم: $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$ و $AM = BM$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم:

$$\left. \begin{matrix} OA = OB = R \\ \widehat{AE} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OM = OM \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ض. ض.}} \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ AM = BM \end{cases} \xrightarrow{\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$$

۳- ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند. (با ذکر فرض و حکم)

حل:



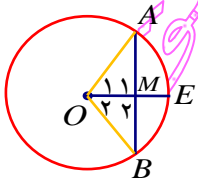
فرض: $DE \perp AB$ حکم: $\widehat{AE} = \widehat{BE}$ و $AH = BH$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم:

$$\left. \begin{matrix} OA = OB = R \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BE} \end{cases}$$

۴- ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وتری از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند بر آن وتر عمود است. (با ذکر فرض و حکم)

فرض: $AM = BM$ حکم: $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$

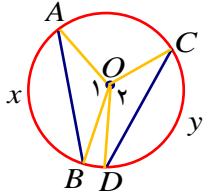


از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم:

$$\left. \begin{matrix} OA = OB = R \\ AM = BM \\ OM = OM \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{M_1 + M_2 = 180^\circ} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$

۵ - ثابت کنید در یک دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی ، با هم برابرند . (با ذکر فرض و حکم)
حل:

فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{Ax}B = \widehat{Cy}D$

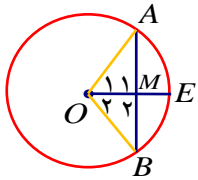


از نقطه O ، مرکز دایره پاره خط هایی به ۴ نقطه A, C, B, D وصل می کنیم در این صورت داریم:

$$\left. \begin{matrix} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ AB = CD \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{Ax}B = \widehat{Cy}D$$

۶ - در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

می دانیم در هر دایره، خطی که از مرکز دایره به یک وتر عمود شود، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می کند پس داریم:



$$\hat{AE} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \Rightarrow \text{زاویه مرکزی } \hat{O}_1 = 30^\circ$$

از طرفی می دانیم در مثل قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است بنابراین می توان نوشت:

$$AM = \frac{OA}{2} \xrightarrow{AM=5} OA = 10$$

$$\triangle OAM: \hat{M}_1 = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} (OM)^2 = (OA)^2 - (AM)^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow OM = 5\sqrt{3}$$

۷ - ثابت کنید اندازه زاویه محاطی نصف کمان مقابل به آن است.
حل:

مسئله را در سه مرحله حل می کنیم: فرض: زاویه \hat{A} محاطی است. حکم: زاویه \hat{A} نصف کمان مقابل به آن است

(الف) اگر یک ضلع زاویه محاطی ، قطری از دایره باشد: از نقطه O ، به C وصل می کنیم در این

$$\triangle OAC: OA = OC = R \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

از طرفی زاویه \hat{BOC} ، زاویه خارجی مثلث OAC می باشد پس می توان نوشت:

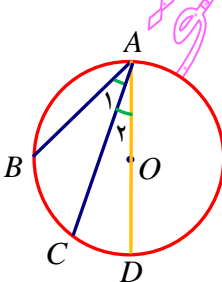
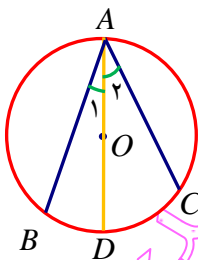
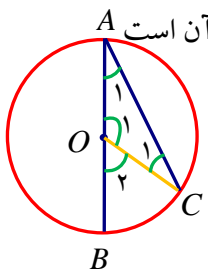
$$\hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 2\hat{A}_1 \xrightarrow{\hat{O}_2 = \widehat{BC}} 2\hat{A}_1 = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(ب) اگر دو ضلع زاویه محاطی ، در دو طرف نقطه O واقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. طبق قسمت (الف) داریم:

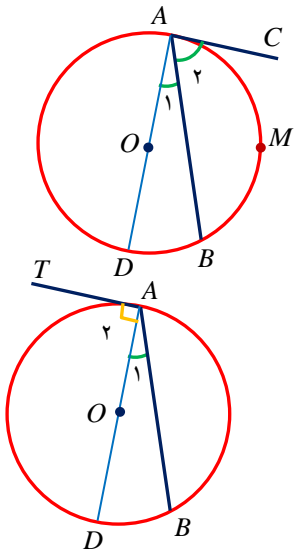
$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(ج) اگر دو ضلع زاویه محاطی ، در یک طرف نقطه O واقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند در این صورت با توجه به (الف) داریم:

$$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2} \text{ و } \widehat{BAD} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \widehat{BAD} - \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



۸- ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان رو به روی آن است.



حل: فرض: \widehat{BAC} زاویه ظلی است. حکم: $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AMB}}{2}$

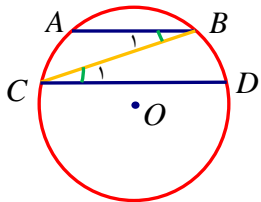
الف) \widehat{BAT} زاویه تند (حاده) باشد: قطر AD را رسم می کنیم، پس می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DAC} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \widehat{DAB} = \frac{\widehat{DB}}{2} \end{aligned} \right\} \widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{\widehat{AD}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

ب) \widehat{BAT} زاویه باز (منفرجه) باشد: قطر AD را رسم می کنیم، در این صورت داریم:

$$\widehat{TAB} = \widehat{A} + \widehat{A} = 90^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ + \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{ADB}}{2}$$

۹- ثابت کنید دو وتر (غیر متقاطع در دو دایره) از یک دایره موازی اند اگر و فقط اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند.



حل:

فرض: $AB \parallel CD$ حکم: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$$AB \parallel CD, BC \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

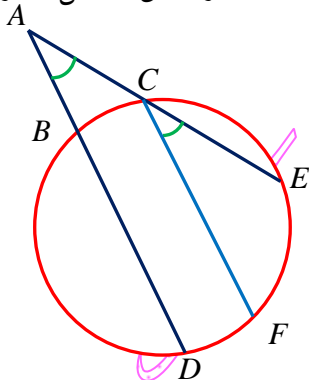
بلعکس: فرض: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ حکم: $AB \parallel CD$

برای اثبات عکس رابطه فوق کافی است مراحل انجام شده را به صورت معکوس انجام دهیم.

$$AB \parallel CD, BC \text{ مورب} \Leftarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \Leftarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Leftarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

می توانستیم در همان رابطه اول از \Leftrightarrow استفاده کنیم.

۱۰- ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد امتداد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع های آن زاویه محدوداند.



حل:

فرض: BD و CE وترهایی از دایره هستند که یکدیگر را در نقطه A خارج از دایره قطع می کنند.

$$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \text{ حکم:}$$

پاره خط CF را موازی BD رسم می کنیم در این صورت داریم:

$$CF \parallel BD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DF} \quad (۱)$$

$$AD \parallel CF, \text{ مورب } AE \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{FCE} \stackrel{\text{مخاطی}}{=} \stackrel{\text{زاویه}}{=} \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{1}{2}(DE - DF) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(DE - BC)$$

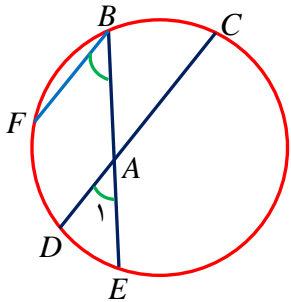
۱۱- ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع های آن زاویه محدوداند.

حل:

فرض: BE و CD وترهایی از دایره هستند که یکدیگر را در نقطه A درون دایره قطع می کنند.

$$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \text{ حکم:}$$

پاره خط BF را موازی DC رسم می کنیم در این صورت داریم:



$$BF \parallel CD \Rightarrow \widehat{FD} = \widehat{BC} \quad (1)$$

$$BF \parallel CD, \text{ مورب } BE \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{FBE} \stackrel{\text{مخاطی}}{=} \stackrel{\text{زاویه}}{=} \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

۱۲- ثابت کنید زاویه بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه A و B بر یک دایره برابر قدر مطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه های A و B است.

حل:

BE را موازی MA رسم می کنیم در این صورت می توان نوشت:

$$MA \parallel BE \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AFE} \quad (1)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم:

$$MA \parallel BE, \text{ مورب } AB \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{ABE}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{\widehat{AFE}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEF}$$

بنا بر این می توان نوشت:

$$MA \parallel BE, \text{ مورب } MB \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{B} \stackrel{\text{زاویه ظلی}}{=}$$

$$\frac{\widehat{BCE}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{AEB} - \widehat{AFE}) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(\widehat{AEB} - \widehat{ADB})$$

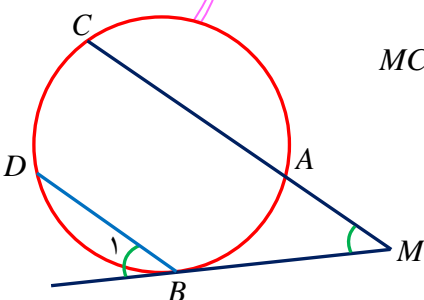
$$\widehat{BMC} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \text{ ۱۳- در شکل زیر ثابت کنید:}$$

حل:

BD را موازی MC رسم می کنیم، در این صورت داریم:

$$MC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \quad (1)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم:

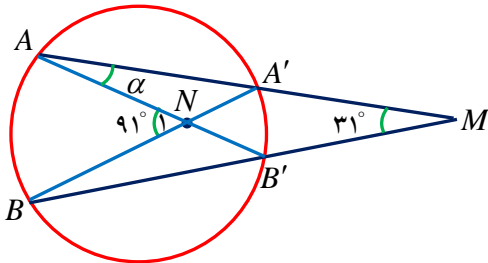


$$MC \parallel BD, \text{ مورب } MB \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{B}$$

$$\text{زاویه ظلی} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{CD}}{2} \stackrel{1)}{=} \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

۱۴- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

حل:



$$\widehat{N}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{A'B'} = 182^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{A'B'} = 62^\circ$$

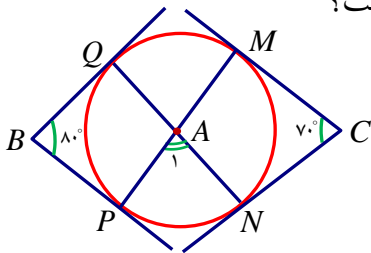
در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \widehat{AB} + \widehat{A'B'} = 182^\circ \\ \widehat{AB} - \widehat{A'B'} = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AB} = 122^\circ, \widehat{A'B'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

۱۵- در شکل زیر اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه \hat{A} چند درجه است؟

حل:

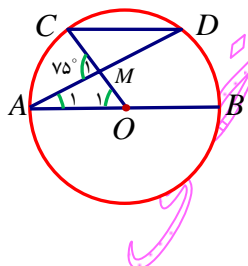


$$\widehat{C} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{QP} + \widehat{PN} - \widehat{MN}}{2} = 70^\circ \Rightarrow 360^\circ - 2\widehat{MN} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{MN} = 110^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{MN} + \widehat{NP} - \widehat{QP}}{2} = 80^\circ \Rightarrow 360^\circ - 2\widehat{QP} = 160^\circ \Rightarrow \widehat{QP} = 100^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{PN}}{2} = \frac{360^\circ - 100^\circ - 110^\circ}{2} = 75^\circ$$

۱۶- در دایره رسم شده مقابل، اندازه کمان CD را به دست آورید.



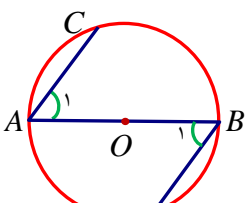
$$\left. \begin{aligned} CD \parallel AB &\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \\ \widehat{M}_1 &= \widehat{O}_1 + \widehat{A}_1 = 75^\circ \\ \widehat{O}_1 &= \widehat{AC} \\ \widehat{A}_1 &= \frac{\widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 75^\circ = \widehat{AC} + \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 50^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \widehat{AC} - \widehat{BD} = 80^\circ$$

۱۷- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$

حل:



$$AC \parallel DB, \text{ مورب } AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \stackrel{\text{مطبی زاویه}}{=} \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$$

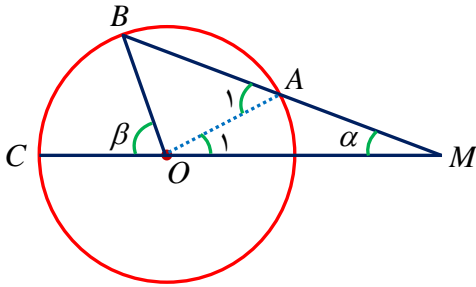
تذکر: می توان از B و C به O وصل کرد و با اثبات همنهشت بودن دو مثلث AOC و BOD اثبات را انجام داد.

۱۸- دایره C(O,R) مفروض است از نقطه M خارج از دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و MA=R : نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

کرده است و MA=R : نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

حل:

برهان: از A به O وصل می کنیم



$$\triangle OAM: OA = MA = R \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{M} = \alpha$$

$$\text{خارجی زاویه } \hat{A}_1 = \hat{O}_1 + \hat{M} = 2\alpha$$

$$\triangle OAB: OA = OB = R \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 = 2\alpha$$

$$\text{خارجی زاویه } \beta = \hat{B} + \hat{M} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۱۹- ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نا برابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیک تر است و بالعکس. (فرض و حکم را بنویسید)

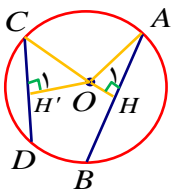
حکم را بنویسید

اثبات طرف اول: فرض: $AB > CD$: حکم: $OH < OH'$

از نقطه O، به وترهای AB و CD عمود می کنیم تا آنها را در نقاط H و H' قطع کند. از O به دو

نقطه A و C نیز وصل می دانیم طبق قضیه، پاره خطی که از مرکز دایره به یک وتر عمود می شود

، آن را نصف می کند پس داریم:



$$\left(OH \perp AB \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2}, \quad OH' \perp CD \Rightarrow CH' = DH' = \frac{CD}{2} \right)$$

$$\triangle OAH: (OA)^2 = (OH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow (AH)^2 = (OA)^2 - (OH)^2$$

$$\triangle OCH': (OC)^2 = (OH')^2 + (CH')^2 \Rightarrow (CH')^2 = (OC)^2 - (OH')^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CH' \Rightarrow (AH)^2 > (CH')^2 \xrightarrow{\begin{cases} (AH)^2 = (OA)^2 - (OH)^2 \\ (CH')^2 = (OC)^2 - (OH')^2 \end{cases}}$$

$$(OA)^2 - (OH)^2 > (OC)^2 - (OH')^2 \xrightarrow{AO=OC=R} -(OH)^2 > -(OH')^2$$

$$\Rightarrow (OH)^2 < (OH')^2 \Rightarrow OH < OH'$$

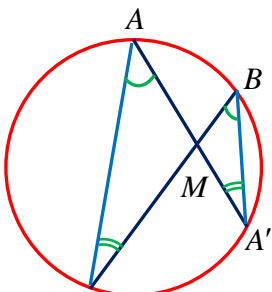
اثبات طرف دوم: برای اثبات عکس قضیه، کافی است مراحل اثبات قبلی را به طور عکس انجام دهیم.

تذکر: برای اثبات عکس قضیه می توان به جای \Rightarrow از \Leftrightarrow استفاده کرد.

۲۰- از نقطه M واقع در داخل دایره C) دو وتر دلخواه AA', BB' رسم شده اند. ثابت کنید: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$

حل:

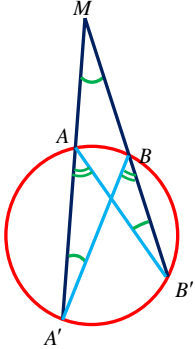
برهان: از A به B' و از B به A' وصل می کنیم



$$\left. \begin{aligned} B'\hat{A}A' = A'\hat{B}B' = \frac{\widehat{A'B'}}{2} \\ BB'A = BA'A = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle AMB' = \triangle BMA' \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$$

$$\Rightarrow MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

۲۱- امتداد دو وتر دلخواه AA' , BB' در نقطه M خارج دایره یکدیگر را قطع می کنند ثابت کنید: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$



حل:

برهان: از A به B' و از B به A' وصل می کنیم

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} = \hat{M} \\ BB'A = BA'A = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle AMB' = \triangle BMA' \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$$

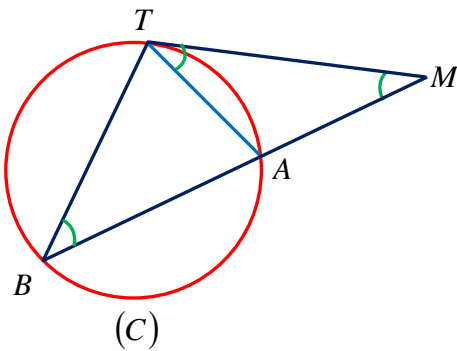
$$\Rightarrow MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

۲۲- ثابت کنید اگر از یک نقطه یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم مربع اندازه مماس برابر با حاصل

ضرب اندازه های دو قطعه قاطع است.

حل:

از T به A و B وصل می کنیم.



$$\left. \begin{aligned} \hat{MTA} = \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle MTA \approx \triangle MTB \Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$MT^2 = MA \cdot MB$$

۲۳- چگونه می توان از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ مماس بر آن رسم کرد.

حل:

دایره ای به قطر OM رسم می کنیم تا دایره $C(O, R)$ را در T و T' قطع

کند، MT و MT' مماس های مورد نظر هستند. زیرا در مثلث OTM ،

TN میانه وارد بر OM است و داریم:

$$ON = R' \xrightarrow{OM=2R'} ON = \frac{1}{2} OM$$

و چون میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع است، مثلث در رأس T قائمه است و در نتیجه MT مماس بر دایره است.

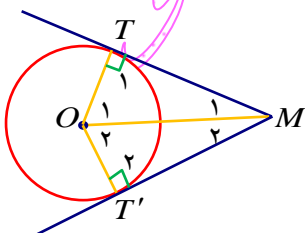
۲۴- هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و نقاط T و T' نقاط تماس باشند ثابت کنید

اولاً طول دو مماس با یکدیگر برابرند و ثانیاً نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

حل:

فرض: MT و MT' بر دایره C در نقاط T و T' مماسند

$$\text{حکم: } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ و } MT = MT'$$

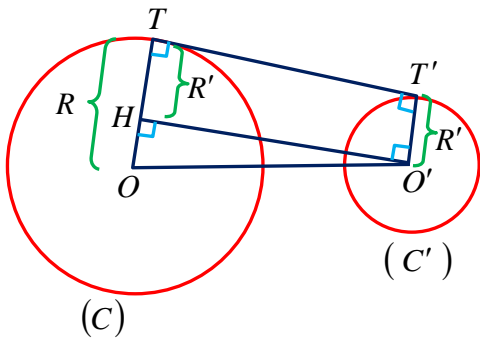


می دانیم پاره خطی که از مرکز یک دایره به نقطه تماس از یک خط مماس وصل شود، بر خط مماس عمود است بنابراین می توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} OT = OT' = R \\ \hat{T}_1 = \hat{T}'_1 = 90^\circ \\ OM = OM \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OTM \cong \triangle OT'M \Rightarrow MT = MT', \hat{M}_1 = \hat{M}'_1$$

۲۵- طول مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را به دست آورید.

حل:



از O' خطی موازی TT' رسم می کنیم در این صورت چهار ضلعی $OHTT'$ یک مستطیل است زیرا دارای چهار زاویه قائمه می باشد.

پس: $O'H = TT'$

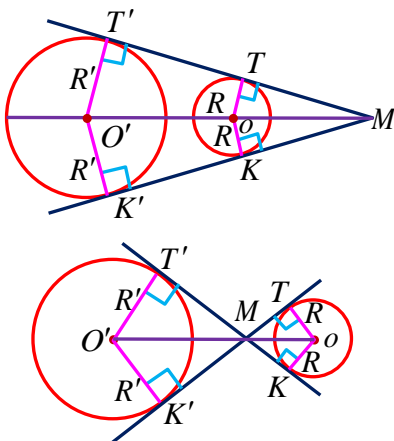
$$\triangle OHO' : OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2}$$

$$\xrightarrow[\substack{OO'=d \\ OH=R-R'}]{} O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

$$TT' = O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

۲۶- ثابت کنید اگر دو مماس مشترک m و n در نقطه M متقاطع باشند، نقطه M روی خط OO' است.

حل:



می دانیم اگر از نقطه M خارج از دایره $C(O, R)$ مماس های MT و MK را رسم کنیم، نیم خط OM نیمساز TMK است. همچنین هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

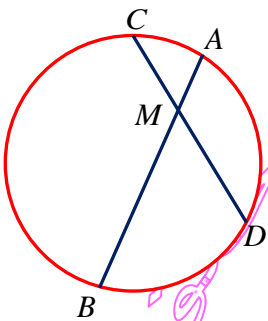
$$OT = OK = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز زاویه } M \text{ است}$$

$$O'T' = O'K' = R' \Rightarrow O' \text{ روی نیمساز زاویه } M \text{ است}$$

OO' روی نیمساز زاویه M است.

۲۷- در دایره $C(O, R)$ وتر AB وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آنگاه وتر CD وتر AB را با چه نسبتی قطع می کند.

حل:

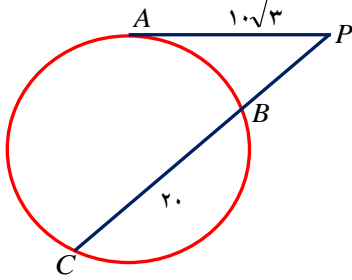


$$\frac{MC}{MD} = \frac{1}{2} \xrightarrow{MD=9-MC} 2MC = 9 - MC \Rightarrow MC = 3 \Rightarrow MD = 6$$

$$MC \cdot MD = MA \cdot MB \Rightarrow 3 \times 6 = MA \times (11 - MA) \Rightarrow MA^2 - 11MA + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (MA - 9)(MA - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} MA = 9 \xrightarrow{MB=11-MA} MB = 2 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{9}{2} \\ MA = 2 \xrightarrow{MB=11-MA} MB = 9 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

۲۸- از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانیده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC=20$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

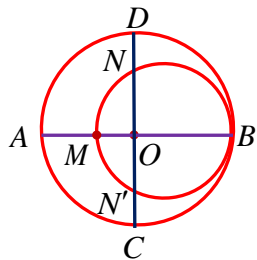


حل:

$$PA^2 = PB \times PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = PB(PB+20) \Rightarrow PB^2 + 20PB - 300 = 0$$

$$\Rightarrow (PB-10)(PB+30) = 0 \xrightarrow{PB>0} PB=10, PC=30$$

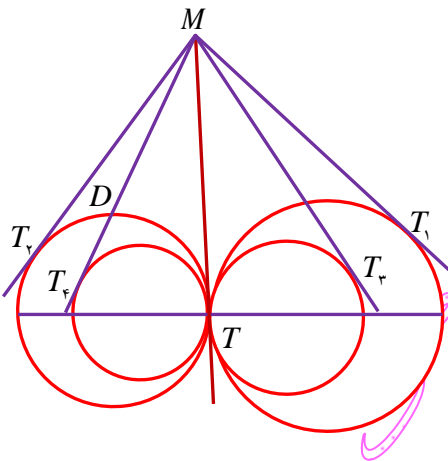
۲۹- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM=16$ و $ND=10$ شعاع دو دایره را پیدا کنید.



حل:

فرض کنیم شعاع دایره بزرگتر R و شعاع دایره کوچکتر R' باشد در این صورت داریم:
 $OM = R - AM = R - 16$
 می‌دانیم در یک دایره قطر عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می‌کند پس داریم:
 $MB \perp NN' \Rightarrow ON = ON' = R - 10$
 $ON \times ON' = OM \times OB \Rightarrow (R-10)^2 = (R-16)R \Rightarrow R = 25$
 $2R' = MB = AB - AM = 2R - 16 = 34 \Rightarrow R' = 17$

۳۰- مطابق شکل تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم ثابت کنید: $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

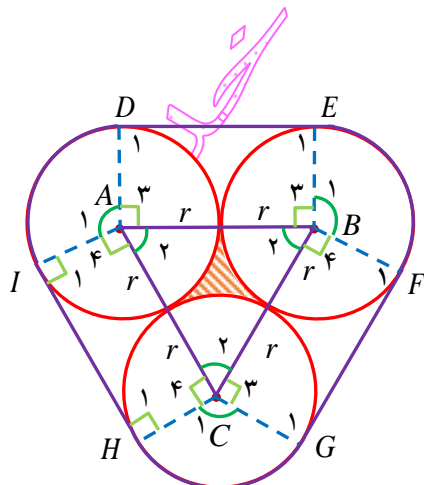


حل:

می‌دانیم اگر از یک نقطه بیرون دایره، دو مماس بر آن رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است. از طرفی MT بر تمام دایره‌ها مماس است پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} MT &= MT_1 \\ MT &= MT_2 \\ MT &= MT_3 \\ MT &= MT_4 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

۳۱- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است.



است.

حل:

$$r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\triangle ABC: AB = BC = AC = 2r \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 360^\circ \xrightarrow{\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 90^\circ, \hat{A}_1 = 60^\circ} \hat{A}_1 = 120^\circ$$

به همین ترتیب $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 120^\circ$

اگر اندازه کمان ID بر حسب درجه را با نماد \widehat{ID} نمایش داده و طول کمان ID را با نماد

$|\widehat{ID}|$ نمایش دهیم داریم:

$$\frac{\widehat{ID}}{360^\circ} = \frac{|\widehat{ID}|}{2\pi r} \Rightarrow \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{|\widehat{ID}|}{2\pi r} \Rightarrow |\widehat{ID}| = \frac{2\pi r}{3}$$

به همین ترتیب $|\widehat{HG}| = |\widehat{EF}| = \frac{2\pi r}{3}$ و در نتیجه طول نخ برابر است با:

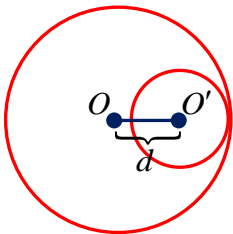
$$DE + |\widehat{EF}| + FG + |\widehat{HG}| + IH + |\widehat{ID}| = 2r + \frac{2\pi r}{3} + 2r + \frac{2\pi r}{3} + 2r + \frac{2\pi r}{3} = 6r + 2\pi r$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{قطعه } 60^\circ}}{\pi r^2} \Rightarrow S_{\text{قطعه } 60^\circ} = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$S_{\text{ناحیه محدود به سه دایره}} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\text{قطعه } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 3 \times \frac{\pi r^2}{6} = (\sqrt{3} - \pi)r^2$$

۳۲- طول خط مرکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر است و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

حل:

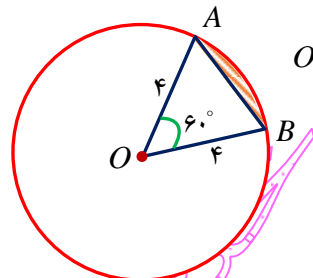


$$R - R' = 2, \quad \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow \underbrace{(R - R')}_2 (R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R - R' = 2 \\ R + R' = 8 \end{cases} \Rightarrow R = 5, \quad R' = 3$$

۳۳- مطابق شکل دایره به شعاع ۴ داریم، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

حل:



$$\triangle OAB: OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \xrightarrow{\hat{A} + \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ} \hat{A} = \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OAB \text{ متساوی الاضلاع است}$$

$$S_1 = S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(OA)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = 4\sqrt{3}$$

$$S_2 = \text{مساحت قطاع } OAB = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi \times 16 = \frac{8\pi}{3}$$

$$S_3 = \text{مساحت ناحیه سایه زده} = S_2 - S_1 = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

۳۴- یک چند ضلعی را محاطی گوئیم اگر و فقط اگر ... دایره ای ... وجود داشته باشد که ... از همه رئوس آن بگذرد...

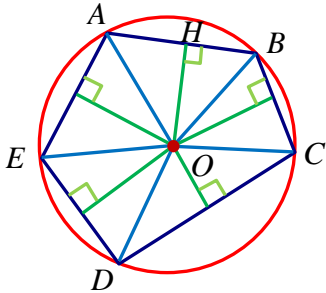
مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی ... نقطه همرسی نیمساز های زاویه های چند ضلعی ... است.

یک چند ضلعی را محیطی گوئیم اگر و فقط اگر ... دایره ای ... وجود داشته باشد که ... بر همه اضلاع آن مماس باشد...

مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی ... نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع آن چند ضلعی ... است.

۳۵- ثابت کنید مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع چند ضلعی است.

حل:



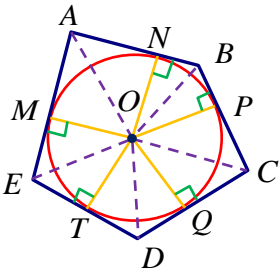
می دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و بالعکس.

$$OB = OA = R \Rightarrow \text{روی عمود منصف } AB \text{ است}$$

به همین ترتیب نقطه O بر روی عمود منصف تمام اضلاع چند ضلعی است و در نتیجه مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع چند ضلعی است.

۳۶- ثابت کنید مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی، نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی چند ضلعی است.

حل:



می دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس.

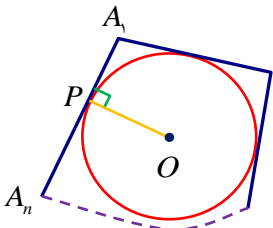
$$ON = OM = R \Rightarrow \text{روی نیمساز زاویه } \hat{A} \text{ است}$$

به همین ترتیب نقطه O بر روی نیمساز تمام زوایای داخلی چند ضلعی است و در نتیجه مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی چند ضلعی است.

۳۷- اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S = rP$.

حل:

اگر A_1 و A_2 و ... و A_n ، رئوس n ضلعی باشد داریم:



$$S = S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + \dots + S_{A_{n-1}OA_n} = \frac{1}{2}r \times A_1A_2 + \frac{1}{2}r \times A_2A_3 + \dots + \frac{1}{2}r \times A_{n-1}A_n$$

$$= \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2}r(2P) = rP$$

۳۸- ثابت کنید هر مثلث همواره محاطی است.

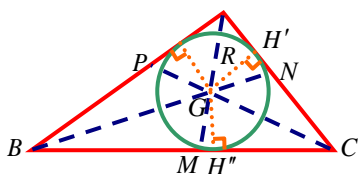
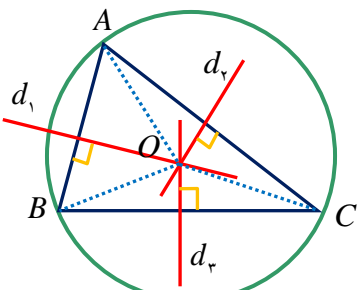
حل:

می دانیم عمود منصف های اضلاع یک مثلث همرسند، پس نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع مثلث تنها نقطه ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین اگر دایره ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه از یکی از رئوس مثلث رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس می گذرد، یعنی دایره محیطی مثلث است. نتیجه مثلث همواره محاطی است.

۳۹- ثابت کنید هر مثلث همواره محیطی است.

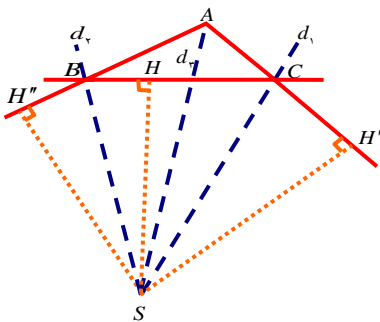
حل:

می دانیم نیمساز های زوایای داخلی یک مثلث همرسند، پس نقطه همرسی نیمساز های زوایای داخلی مثلث تنها نقطه ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین



اگر دایره ای به مرکز نقطه تلاقی سه نیمسازهای داخلی مثلث و به شعاع فاصله این نقطه از یکی از اضلاع مثلث رسم کنیم، این دایره بر هر سه ضلع مماس است، یعنی دایره محاطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محیطی است.

۴۰- در مثلث ABC ثابت کنید نیمساز زاویه \hat{A} با نیمسازهای خارجی دو زاویه \hat{B} و \hat{C} همسرند.



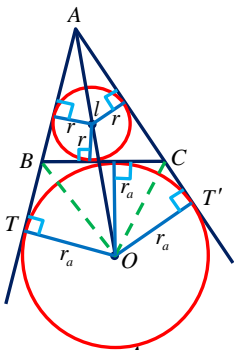
حل:

$$SH = SH' \iff \hat{C} \text{ نیمساز خارجی زاویه}$$

$$SH = SH'' \iff \hat{B} \text{ نیمساز خارجی زاویه}$$

در نتیجه $SH' = SH''$ ، یعنی نقطه S از دو ضلع زاویه \hat{A} به یک فاصله است پس نقطه S روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد.

۴۱- در شکل زیر اگر مساحت مثلث ABC را با S و محیط آن $2P$ باشد ثابت کنید $r_a = \frac{S}{P-a}$.



حل:

$$S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle ACO} - S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2}r_a \times AB + \frac{1}{2}r_a \times AC - \frac{1}{2}r_a \times BC$$

$$= \frac{1}{2}r_a \left(\frac{AB+AC+BC}{2} - \frac{BC}{1} \right) = r_a(P-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P-a}$$

۴۲- ثابت کنید یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر، زوایای مقابل مکمل باشند.

حل:

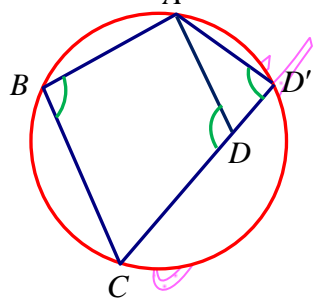
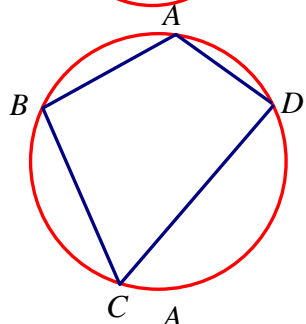
فرض: $ABCD$ محاطی است حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

فرض: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ حکم: چهار ضلعی $ABCD$ محاطی است.

بر سه نقطه A, B, C یک دایره می گذرد، می خواهیم ثابت کنیم که این دایره از نقطه D نیز می گذرد. برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم اگر این دایره از نقطه D نگذرد، پاره خط CD را از طرف D امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ای مانند D' قطع کند و از D' به A وصل می کنیم، چون چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است در این صورت می توان نوشت: $\hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ$ از طرفی طبق فرض داریم $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ بنابراین نتیجه می شود $D = D'$. اما می دانیم D زاویه خارجی مثلث ADD' است، پس $\hat{D} > \hat{D}'$. دو رابطه



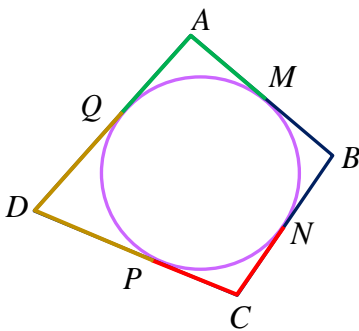
$D = D'$ و $\hat{D} > \hat{D}'$ با یکدیگر در تناقض هستند در نتیجه فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است.

۴۳- در یک چهار ضلعی محیطی مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر است.
حل:

فرض: $ABCD$ محیطی است حکم: $AB + CD = AD + BC$

می دانیم اگر از یک نقطه بیرون دایره دو مماس بر آن رسم کنیم، طول دو مماس با یکدیگر برابر است پس داریم:

$$AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + BN + NC + DQ = AQ + QD + BN + NC = AD + BC$$



۴۴- ثابت کنید یک چهار ضلعی در صورتی محیطی است که مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر باشد.

حل:

فرض: $AB + CD = AD + BC$ حکم: $ABCD$ محیطی است

نیمسازهای دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطه l قطع می کنند، پس داریم:

$$l \text{ روی نیمساز زاویه } \hat{B} \text{ است} \Leftrightarrow IM = IN$$

$$l \text{ روی نیمساز زاویه } \hat{C} \text{ است} \Leftrightarrow IN = IP$$

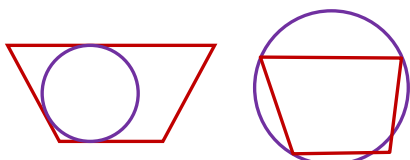
دایره ای به مرکز l و به شعاع $IM = IN = IP = R$ رسم می کنیم این دایره بر رئوس AB و BC و CD رسم می کنیم ادعا می کنیم این دایره AD نیز مماس است به برهان خلف فرض کنیم دایره بر AD مماس نباشد، AE را مماس بر دایره رسم می کنیم در نتیجه $ABCE$ محیطی است پس داریم:

$$AB + CE = BC + AE \Rightarrow \underbrace{AB + CD}_{\text{فرض } AD+BC} - DE = BC + AE$$

$$\Rightarrow AD + BC - DE = BC + AE \Rightarrow AD = AE + DE$$

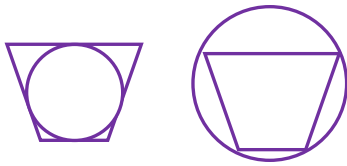
اما چنین چیزی امکان پذیر نیست چون در مثلث ADE مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴۵- محاطی یا محیطی بودن دوزنقه را بررسی کنید.



حل:

یک دوزنقه در حالت کلی نه محاطی است و نه محیطی است. اما در حالت خاص می تواند محاطی یا محیطی باشد.

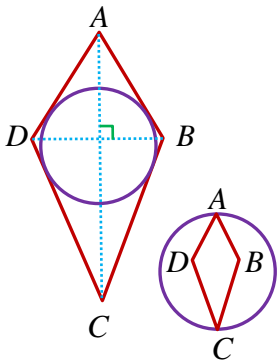


دوزنقه متساوی الساقین محاطی است زیرا زوایای مقابل در آن مکمل هستند. اما فقط در صورتی محیطی است که مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد

۴۶- محاطی یا محیطی بودن کایت را بررسی کنید.

حل:

می دانیم کایت دارای چهار ضلع است که دوه‌دو با هم مساوی‌اند و اضلاع مساوی، مجاور یکدیگرند. قطرهای همدیگر را با یک زاویه قائمه قطع می‌کنند و یکی از قطرهای دیگری را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند. (یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.) و زوایای مقابل برابرند.



کایت در حالت کلی محیطی است زیرا:

$$AD = AB \quad , \quad DC = BC \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AD} + \frac{DC}{BC} = AD + BC$$

اما محاطی نیست

مگر آنکه زوایای مقابل مکمل باشند که در این صورت کایت به مربع تبدیل می‌شود.

۴۷- محاطی یا محیطی بودن متوازی الاضلاع را بررسی کنید.

حل:

در حالت کلی، متوازی الاضلاع نه محاطی است و نه محیطی است.

در حالت خاص اگر متوازی الاضلاع، زاویه 90° داشته باشد یعنی به مستطیل تبدیل شود، محاطی خواهد بود و اگر اضلاع مجاور آن برابر باشند یعنی به لوزی تبدیل شود، محیطی خواهد بود.

۴۸- محاطی یا محیطی بودن مستطیل را بررسی کنید.

حل:

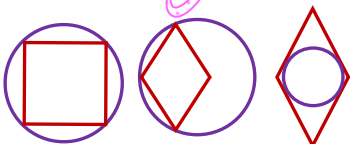
در حالت کلی، مستطیل محاطی است ولی محیطی نیست.

در حالت خاص اگر اضلاع مجاور مستطیل، برابر باشند یعنی به مربع تبدیل شود، محیطی خواهد بود.

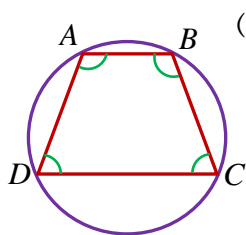
۴۹- محاطی یا محیطی بودن لوزی را بررسی کنید.

حل:

در حالت کلی، لوزی محیطی است زیرا مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است ولی محاطی نیست.



در حالت خاص اگر لوزی، زاویه 90° داشته باشد یعنی به مربع تبدیل شود، محاطی خواهد بود.



۵۰- ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد. (فرض و حکم را بنویسید)

حل:

فرض: $AD = BC$ حکم: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است

$$AD = BC \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}$$

$$ABCD \text{ ذوزنقه} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

و چون زوایای مقابل در آن مکمل هستند پس ذوزنقه متساوی الساقین محاطی است.

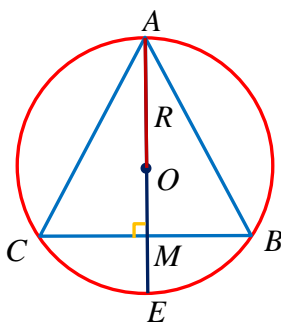
فرض: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است حکم: $AD = BC$

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - \hat{D} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow 2\hat{C} = 2\hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \hat{D} \Rightarrow AD = BC$$

۵۱- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

حل:



مرکز دایره محیطی یک مثلث، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث است. در مثلث متساوی الاضلاع عمود منصف اضلاع و میانه و ارتفاع وارد بر آن بر هم منطبق.

میانه‌های مثلث به نسبت ۲ به ۱ یکدیگر را قطع می‌کنند $\left(R = \frac{2}{3} AM\right)$. پس داریم:

$$R = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} h \Rightarrow h = \frac{3}{2} R \xrightarrow{h = \frac{\sqrt{3}}{2} a} \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{2} R \Rightarrow a = \sqrt{3} R$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} R)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

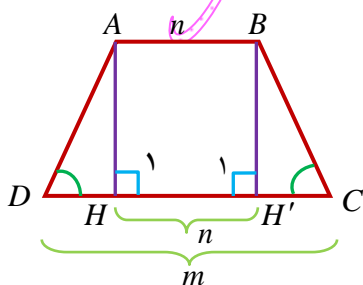
۵۲- یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده

ضرب در میانگین هندسی آنها.

حل:

چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است یعنی $AD = BC$

و چون ذوزنقه $ABCD$ محیطی است پس:



$$\frac{AB}{n} + \frac{DC}{m} = AD + \frac{BC}{AD} = 2AD \Rightarrow AD = \frac{m+n}{2}$$

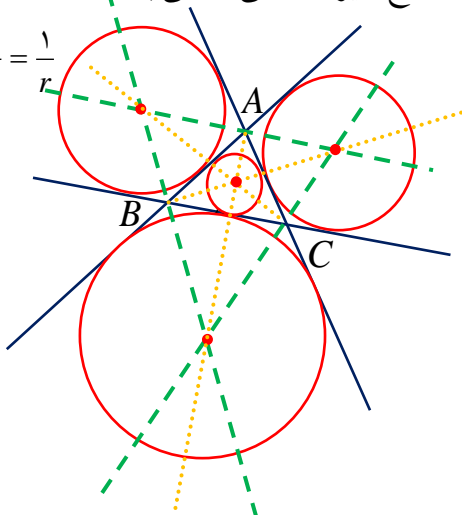
$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \\ AH = BH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \Rightarrow DH = CH' = \frac{m-n}{2}$$

$$\triangle ADH: AH^2 = AD^2 - DH^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + n^2 + 2mn - m^2 - n^2 + 2mn}{4} = mn$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \times AH = \frac{n+m}{2} \times \sqrt{mn}$$

۵۳- اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$



حل:

می دانیم: $r_c = \frac{S}{P-c}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_a = \frac{S}{P-a}$

$$S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{1}{2}r \times AB + \frac{1}{2}r \times BC + \frac{1}{2}r \times AC$$

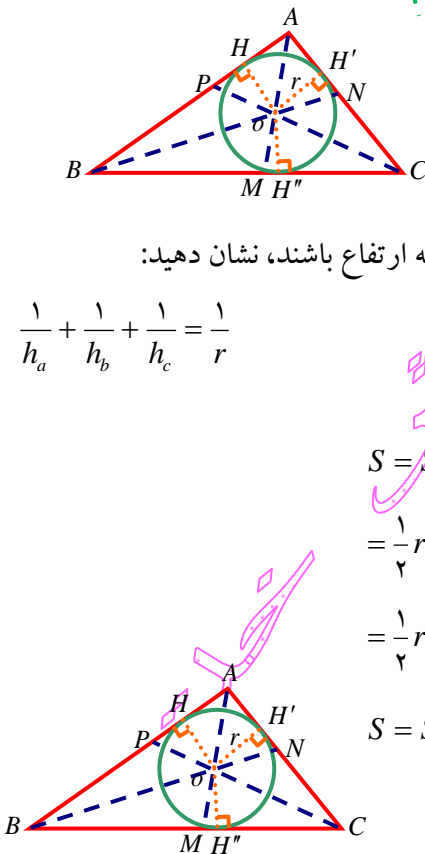
$$= \frac{1}{2}r \left(\underbrace{AB + BC + AC}_{\sqrt{P}} \right) = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{S}{P-a}} + \frac{1}{\frac{S}{P-b}} + \frac{1}{\frac{S}{P-c}} =$$

$$\frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{2P - (a+b+c)}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

۵۴- اگر r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC بوده و h_a, h_b, h_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$



حل:

$$S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{1}{2}r \times AB + \frac{1}{2}r \times BC + \frac{1}{2}r \times AC$$

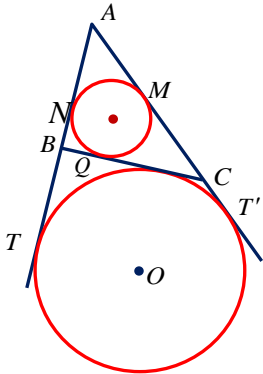
$$= \frac{1}{2}r \left(\underbrace{AB + BC + AC}_{\sqrt{P}} \right) = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

$$S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_a \times a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

به همین ترتیب $h_b = \frac{2S}{b}$ و $h_c = \frac{2S}{c}$ بنا براین می توان نوشت:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

۵۵- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخل مثلث ABC با اضلاع آن M, N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:



$$\begin{aligned} AM &= AN = P - a \\ BN &= BQ = P - b, \quad CM = CQ = P - c \\ AT &= AT' = P \end{aligned}$$

حل:

می دانیم اگر از یک نقطه بیرون از دایره دو مماس بر آن رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است یعنی داریم: $AM = AN$ ، $BN = BQ$ و $MC = QC$ و $AT = AT'$ در این صورت داریم:

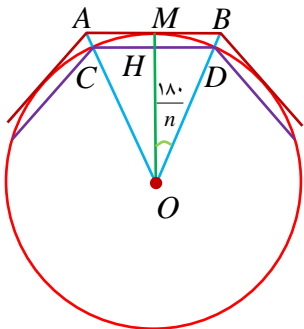
$$\begin{aligned} 2AN &= AN + AN = AN + AM = AB - NB + AC - MC = AB + AC - BQ - CQ \\ &= AB + AC - BC = AB + AC + BC - 2BC = 2P - 2a \Rightarrow AN = P - a \end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم: $BN = BQ = P - b$ ، $CM = CQ = P - c$

$$\begin{aligned} AT &= AB + BT = AB + BQ' \quad , \quad AT' = AC + CT' = AC + CQ' \\ \Rightarrow 2AT &= AT + AT' = AT + AT' = AB + BQ' + CQ' + AC = 2P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AT = P \xrightarrow{AT=AT'} AT = AT' = P$$

۵۶- یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر CD و AB اندازه های ضلع های n ضلعی های منتظم محیطی و محاطی باشند، آن گاه $AB = 2r \tan \frac{180}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{180}{n}$.



حل:

می دانیم خطی که از مرکز دایره، به وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می کند پس: $AM = MB = \frac{AB}{2}$ و $\hat{AOM} = \hat{BOM}$ و $\hat{CM} = \hat{DM}$

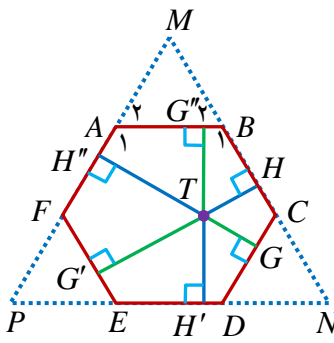
$$\left. \begin{aligned} \hat{AOM} &= \hat{BOM} \\ OM &= OM \\ \hat{AMO} &= \hat{BMO} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{رض ز}} \hat{AOM} \cong \hat{BOM} \Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2}$$

$$\hat{OMB}: \tan \hat{o} = \frac{MB}{OM} \Rightarrow \tan \frac{180}{n} = \frac{MB}{r} \Rightarrow MB = r \tan \frac{180}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} = r \tan \frac{180}{n} \Rightarrow AB = 2r \tan \frac{180}{n}$$

$$\hat{OHD}: \sin \hat{o} = \frac{HD}{OD} \Rightarrow \sin \frac{180}{n} = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = r \sin \frac{180}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{2} = r \sin \frac{180}{n} \Rightarrow CD = 2r \sin \frac{180}{n}$$



۵۷- شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دوسوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟

$$S_1 = S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = S_2$$

حل:

الف) هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم $= \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

هر زاویه خارجی شش ضلعی منتظم $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ بنابراین: $\hat{A}_r = \hat{B}_r = 60^\circ$

$$\triangle MAB: \Rightarrow \hat{M} + \hat{A}_r + \hat{B}_r = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}_r = \hat{B}_r = 60^\circ} \hat{M} = 60^\circ$$

به همین ترتیب: $\hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) با توجه به قسمت قبل: $AB = MA = MB = ND = NC = DC = PE = PF = FE = a$ و در نتیجه

$$S_{\triangle MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ و } MN = MP = NP = 3a$$

$$S_{ABCDEF} = S_{\triangle MNP} - 3S_{\triangle MAB} = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{2}{3}$$

پ) می دانیم مجموع فواصل یک نقطه دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مثلث

$$TH + TH' + TH'' = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a \text{ است. برابر ارتفاع مثلث است.}$$

$$S_1 = S_{\triangle TAF} + S_{\triangle TDE} + S_{\triangle TBC} = \frac{1}{2} TH'' \times \frac{AF}{a} + \frac{1}{2} TH' \times \frac{DE}{a} + \frac{1}{2} TH \times \frac{BC}{a}$$

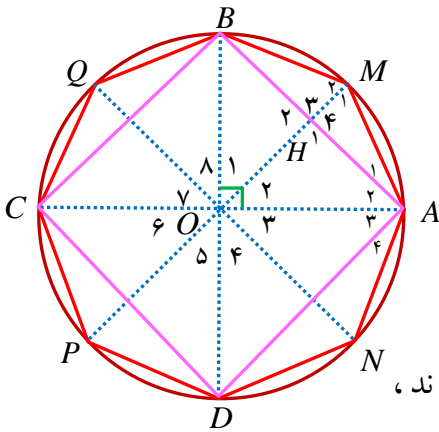
(ت)

$$= \frac{1}{2} a (TH'' + TH' + TH) = \frac{1}{2} a \times \frac{3\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\frac{S_1}{S_{MNP}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{1}{3}$$

$$S_{ABCDEF} = S_1 + S_2 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + S_2 \Rightarrow S_2 = S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

۵۸- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم، چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است، چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



حل:

در چهار ضلعی $ABCD$ از آنجاییکه قطرهای منصف یکدیگرند $(OA = OC = OB = OD = R)$ پس متوازی الاضلاع است، و چون قطرهای با هم برابرند، مستطیل است و چون قطرهای بر هم عمودند، مربع است.

$$AB = BC = CD = AD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{AD}$$

$$PM \perp AB \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{BM} \Rightarrow AM = BM$$

به همین ترتیب:

$$AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

$$\widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CP} = \widehat{PD} = \widehat{DN} = \widehat{NA} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BMA} = \frac{\widehat{BQA}}{2} = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

به همین ترتیب تمام زوایای داخلی هشت ضلعی $AMBQCPDN$ برابر 135° است چون در این هشت ضلعی، اضلاع برابر و زوایای نیز برابرند پس منتظم است.