

۱- درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده‌ی این مثلث کوچک‌تر از اندازه‌ی هریک از ساق‌های آن است.

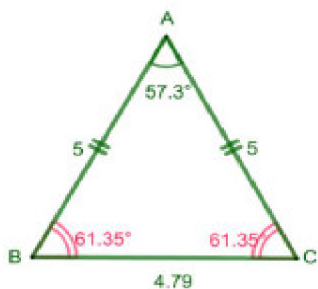
ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی‌متر است.

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ت) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

« پاسخ »

الف) همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با $57/3$ درجه است. بنابراین با توجه به این که مثلث متساوی الساقین است، بنابراین اندازه‌ی هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می‌توان به دست آورد:



$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 57/3^\circ}{2} = 61/35^\circ$$

هم‌چنین می‌دانیم در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است پس طول قاعده کوچک‌تر از طول ساق‌ها خواهد بود. پس عبارت فوق درست است.

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi \simeq 3/14 \text{ cm}$$

ب) این عبارت درست است زیرا:

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: زیرا $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ بنابراین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد، زیرا بیش‌تر از π رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه 216 درجه در ربع سوم است.

$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{1080^\circ}{5} = 216^\circ$$

ت) این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است پس:

$$\text{رادیان } \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \quad \text{رادیان } \frac{7\pi}{36} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{1260^\circ}{36} = 35^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$120^\circ + 20^\circ + 35^\circ = 175^\circ < 180^\circ$$

$$180^\circ$$

راه دوم: می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \Rightarrow \text{رادیان } \frac{35\pi}{36} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}}$$

$$\frac{6300^\circ}{36} = 175^\circ < 180^\circ$$

$$\pi 180^\circ$$

یا همان رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

۲- دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

« پاسخ »

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

نکته: l و r هم واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می‌آید.

۳- زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه چند درجه است؟

« پاسخ »

$$\frac{\pi}{20} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi = 180^\circ} \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$$

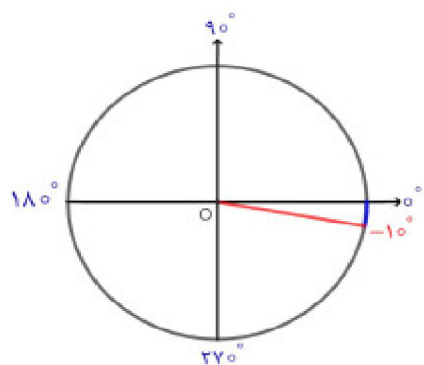
راه اول:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{20} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{20} \Rightarrow D = 9^\circ$$

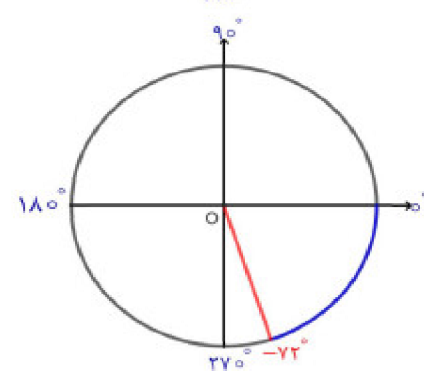
راه دوم:

۴- هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

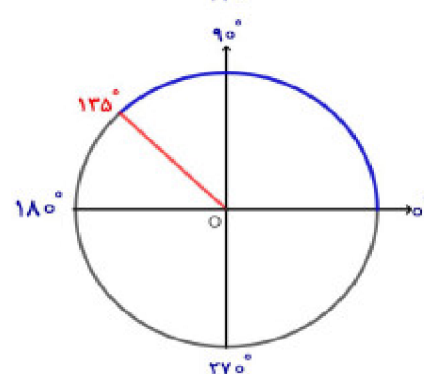
« پاسخ »



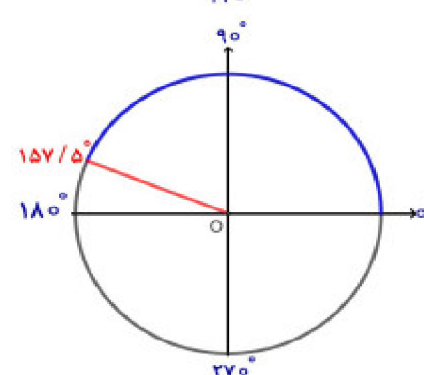
$$\text{رادیان } \frac{-\pi}{18} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = 180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$$



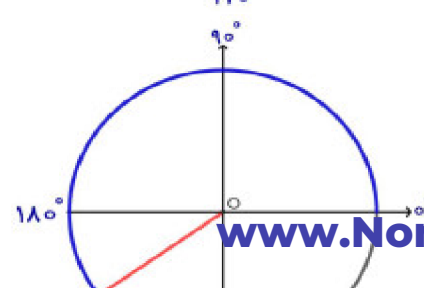
$$\text{رادیان } \frac{-2\pi}{5} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = 180^\circ} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = 180^\circ} \frac{540^\circ}{4} = 135^\circ$$



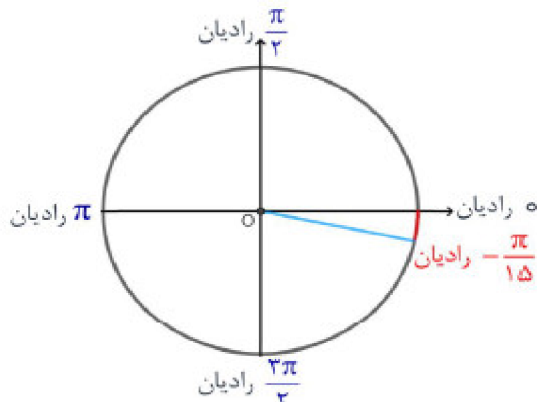
$$\text{رادیان } \frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = 180^\circ} \frac{1260^\circ}{8} = 157.5^\circ$$



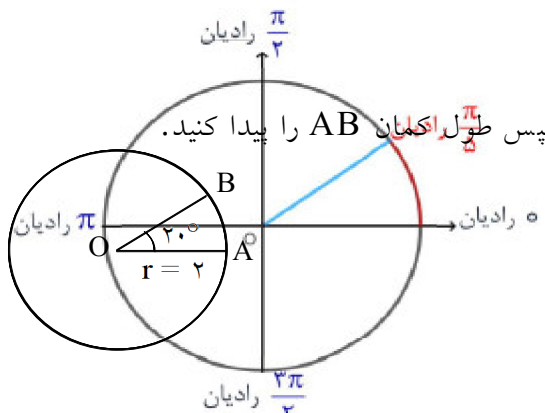
$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = 180^\circ} \frac{1080^\circ}{5} = 216^\circ$$

۵- هریک از زاویه‌های ۱۲° ، ۳۶° ، ۷۲° ، ۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

« پاسخ »



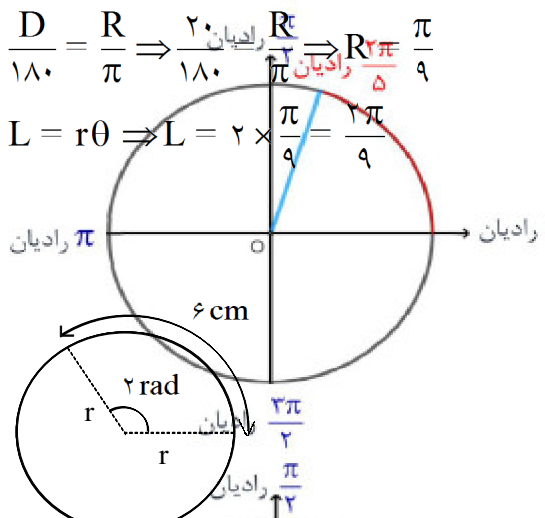
$$-12^\circ \xrightarrow{\times \text{رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } -\frac{\pi}{15}$$



۶- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را برحسب رادیان به دست آورید. سپس طول کمان AB را پیدا کنید.

$$36^\circ \xrightarrow{\times \text{رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } \frac{\pi}{5}$$

« پاسخ »

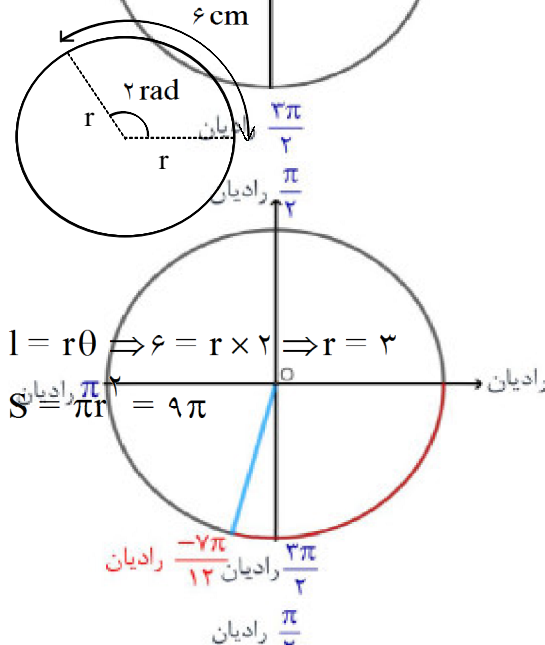


$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{20}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{20\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$$

$$L = r\theta \Rightarrow L = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$$

$$72^\circ \xrightarrow{\times \text{رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } \frac{2\pi}{5}$$

۷- مساحت دایره مقابل چه قدر است؟

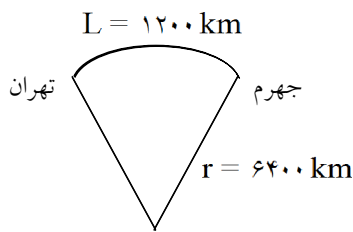


$$l = r\theta \Rightarrow 6 = r \times 2 \Rightarrow r = 3$$

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$

$$-105^\circ \xrightarrow{\times \text{رادیان } \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } -\frac{7\pi}{12}$$

« پاسخ »

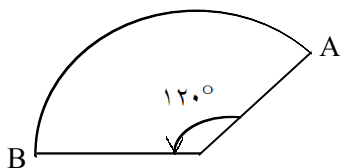


۸- اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره‌ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید. (زاویه برحسب رادیان باشد.)

« پاسخ »

$$L = 1200 \text{ km} \quad r = 6400 \text{ km} \quad \theta = ?$$

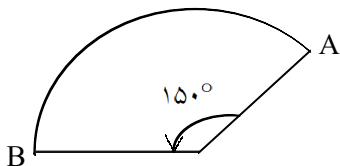
$$L = r\theta \Rightarrow 1200 = 6400\theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$



۹- متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره به نقطه‌ی B می‌رود. اگر شعاع دایره ۱۸ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{18} \Rightarrow L = 12\pi$$



۱۰- متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره به نقطه‌ی B می‌رود. اگر شعاع دایره ۲۴ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\theta = 150^\circ \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{L}{24} \Rightarrow L = 20\pi$$

۱۱- در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

زاویه بر حسب درجه	۰°	۳۰°		۱۲۰°		
زاویه بر حسب رادیان	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۳}$

« پاسخ »

رابطه بین زاویه بر حسب درجه و رادیان به صورت زیر است. (D: درجه و R: رادیان)

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{۳۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۱۸۰ \cdot R = ۳۰ \cdot \pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{۶}$$

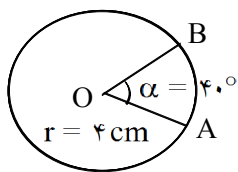
$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{\pi}{۳}}{\pi} \Rightarrow D = ۱۸۰ \times \frac{۱}{۳} \Rightarrow D = ۶۰^\circ$$

$$\frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۱۸۰ \cdot R = ۱۲۰ \cdot \pi \Rightarrow R = \frac{۱۲۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰ \times ۵}{۴} = ۲۲۵^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۷\pi}{۳}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰ \times ۷}{۳} = ۴۲۰^\circ$$

زاویه بر حسب درجه	۰°	۳۰°	۶۰°	۱۲۰°	۲۲۵°	۴۲۰°
زاویه بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۳}$

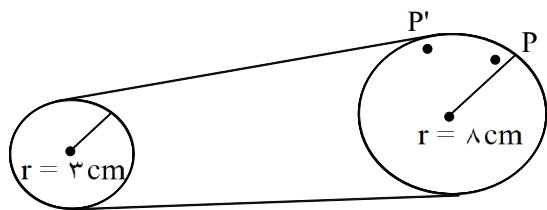


۱۲- در شکل مقابل اندازهی زاویه α را بر حسب رادیان به دست آورید، سپس طول کمان \widehat{AB} را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$\frac{۴۰}{(بر حسب رادیان) \alpha} = \frac{۱۸۰}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{۴۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۹} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۹} = \frac{\widehat{AB}}{۴} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{۸\pi}{۹} \text{ cm}$$



۱۳- در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های ۸ cm و ۳ cm را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

« پاسخ »

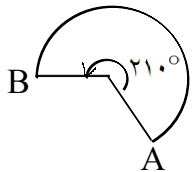
$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = \frac{\pi}{3} \times 8 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

در قرقره بزرگ‌تر داریم:

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقره کوچک‌تر نیز $\frac{8\pi}{3}$ cm حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{3} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad}$$

۱۴- متحرکی از نقطه A روی دایره به نقطه B می‌رود. اگر شعاع دایره ۱۵ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.



« پاسخ »

$$\theta = 210^\circ \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = \frac{l}{15} \Rightarrow l = \frac{35\pi}{2}$$

۱۵- متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲ متر، مسافتی به اندازه‌ی ۶ متر را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند. زاویه‌ی طی شده توسط متحرک را برحسب درجه و رادیان به دست آورید.

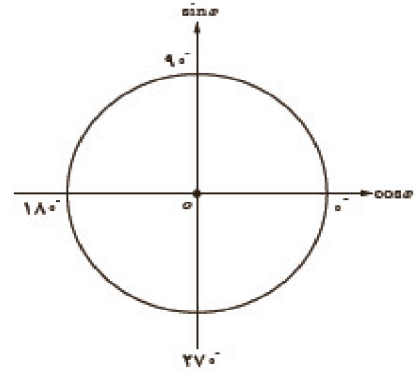
« پاسخ »

هر دو متر یک رادیان محسوب می‌شود (شعاع دایره ۲ متر است) پس متحرک ۳- رادیان طی کرده است.

$$\frac{-3}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{-540}{\pi} \text{ درجه}$$

۱۶- بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$
 ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$
 پ) $\operatorname{tg}(-1000^\circ) = \operatorname{tg} 8^\circ$
 ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$



« پاسخ »

- الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$
 $\sin 84^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin 12^\circ = \sin(180^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$
 ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$
 $\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(36^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$
 پ) $\operatorname{tg}(-1000^\circ) = \operatorname{tg} 8^\circ$
 $\operatorname{tg}(-1000^\circ) = -\operatorname{tg} 1000^\circ = -\operatorname{tg}(3 \times 36^\circ - 8^\circ) = -(-\operatorname{tg} 8^\circ) = \operatorname{tg} 8^\circ$
 ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$
 $\sin 875^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم‌انتهای هستند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اختلاف هر دو زاویه‌ی ارائه شده در هر قسمت مضربی از 2π رادیان یا 360° است:

$$875^\circ - 155^\circ = 720^\circ = 2 \times 360^\circ$$

۱۷- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

الف) $\text{tg } ۱۳۵^\circ + \text{Cotg } ۱۲۰^\circ =$

ب) $\text{Cos}(-۲۱۰^\circ) + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ) =$

پ) $\text{Sin } ۶۳۰^\circ + \text{tg}(-۵۴۰^\circ) =$

ت) $\text{Cos}(-۷۲۰^\circ) + \text{Cotg}(-۶۰۰^\circ) + \text{tg } ۷۲۰^\circ - \text{tg}(-۶۰۰^\circ) =$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) =$

ج) $\frac{\text{Sin } \frac{۳\pi}{۴} - \text{Cos } \frac{۵\pi}{۶}}{\text{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \text{tg}\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} =$

« پاسخ »

الف) $\text{tg } ۱۳۵^\circ + \text{Cotg } ۱۲۰^\circ = \text{tg}(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) + \text{Cotg}(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\text{tg } ۴۵^\circ + (-\text{Cotg } ۶۰^\circ)$

$= -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\text{Cos}(-۲۱۰^\circ) + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ) = \text{Cos } ۲۱۰^\circ + \text{Cotg}(۲۴۰^\circ)$

$= \text{Cos}(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \text{Cotg}(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\text{Cos } ۳۰^\circ + \text{Cotg } ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پ) $\text{Sin } ۶۳۰^\circ + \text{tg}(-۵۴۰^\circ) = \text{Sin } ۶۳۰^\circ - \text{tg } ۵۴۰^\circ = \text{Sin}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ) - \text{tg}(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ)$

$= -\text{Sin } ۹۰^\circ - \text{tg } ۱۸۰^\circ = -۱ + ۰ = -۱$

ت) $\text{Cos}(-۷۲۰^\circ) + \text{Cotg}(-۶۰۰^\circ) + \text{tg } ۷۲۰^\circ - \text{tg}(-۶۰۰^\circ) =$

$= \text{Cos } ۷۲۰^\circ - \text{Cotg } ۶۰۰^\circ + \text{tg } ۷۲۰^\circ + \text{tg } ۶۰۰^\circ$

$= \text{Cos}(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) - \text{Cotg}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ) + \text{tg}(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) + \text{tg}(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ)$

$= \text{Cos } ۰^\circ - (-\text{Cotg } ۱۲۰^\circ) + \text{tg } ۰^\circ - \text{tg } ۱۲۰^\circ$

$= \text{Cos } ۰^\circ + \text{Cotg}(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \text{tg } ۰^\circ - \text{tg}(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$

$= \text{Cos } ۰^\circ - \text{Cotg } ۶۰^\circ + \text{tg } ۰^\circ + \text{tg } ۶۰^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \text{Sin}\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right) - \text{Cos}\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right)$

$= \text{Sin } \frac{\pi}{۳} - \text{Cos } \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}$

ج) $\frac{\text{Sin } \frac{۳\pi}{۴} - \text{Cos } \frac{۵\pi}{۶}}{\text{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \text{tg}\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} = \frac{\text{Sin } \frac{۳\pi}{۴} - \text{Cos } \frac{۵\pi}{۶}}{\text{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \text{tg}\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} = \frac{\text{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) - \text{Cos}\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right)}{-\text{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) - \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right)}$

$= \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \frac{-۴ - \sqrt{۶}}{۱۰}$

۱۸- حاصل $\cos(315^\circ) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$\cos(315^\circ) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos 45 + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۱۹- اگر $\text{tg} 20^\circ = 0/36$ باشد، مقدار عددی عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos(-200^\circ)}{\cos 110^\circ - \sin(-70^\circ)}$$

« **پاسخ** »

$$\begin{aligned} \frac{\sin(180 - 20) - \cos(180 + 20)}{\cos(90 + 20) + \sin(90 - 20)} &= \frac{\sin 20 + \cos 20}{-\sin 20 + \cos 20} \xrightarrow{\div \cos 20} \frac{\text{tg} 20 + 1}{-\text{tg} 20 + 1} \\ &\quad (0/5) \quad \quad \quad (0/75) \quad \quad \quad (0/25) \\ &= \frac{1/36}{0/64} = \frac{17}{8} \quad (0/25) \end{aligned}$$

۲۰- مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

ت) $\text{tg}(-150^\circ)$

پ) $\text{Cotg}(750^\circ)$

ب) $\cos \frac{9\pi}{4}$

الف) $\sin \frac{5\pi}{4}$

« **پاسخ** »

$$\text{الف) } \sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب) } \cos \frac{9\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پ) } \text{Cotg}(750^\circ) = \text{Cotg}(720^\circ + 30^\circ) = \text{Cotg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{Cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\text{ت) } \text{tg}(-150^\circ) = -\text{tg} 150^\circ = -\text{t}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} &= \frac{\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{-1 - 1}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

۲۲- بر حسب θ بنویسید.

الف) $\operatorname{Sin}\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right)$ (ب) $\operatorname{tg}(10\pi + \theta)$ (ج) $\operatorname{Cos}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (د) $\operatorname{Cotg}(93\pi - \theta)$

« پاسخ »

الف) $\operatorname{Sin}\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{Cos}\theta$

ب) $\operatorname{tg}(10\pi + \theta) = \operatorname{tg}\theta$

ج) $\operatorname{Cos}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{Sin}\theta$

د) $\operatorname{Cotg}(93\pi - \theta) = -\operatorname{Cotg}\theta$

۲۳- مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin\left(-\frac{41\pi}{4}\right)$ (ب) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ (پ) $\operatorname{tg}\left(\frac{29\pi}{3}\right)$ (ت) $\operatorname{Cotg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \sin\left(-\frac{41\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{-40\pi - \pi}{4}\right) = \sin\left(-10\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب) } \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پ) } \operatorname{tg}\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{30\pi - \pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{ت) } \operatorname{Cotg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{-15\pi + \pi}{3}\right) = \operatorname{Cotg}\left(-5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۴- اگر $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ (ب) $f\left(\frac{19\pi}{6}\right)$

« پاسخ »

$$\text{الف) } f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{10\pi + \pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

$$\text{ب) } f\left(\frac{19\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{19\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{20\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right)$$

$$= 2\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

۲۵- فرض کنید $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ مختصات نقطه‌ی انتهایی کمان θ روی دایره‌ی مثلثاتی است. در این صورت مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \frac{\cos(\pi - \theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \operatorname{tg}(\pi + \theta)}{\sqrt{5} \cos(2\pi - \theta)}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \theta &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{(-\cos \theta)(+\cos \theta) - \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{5} \cos \theta} = \frac{-\cos^2 \theta - \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{5} \cos \theta} = \frac{-\frac{1}{5} + 2}{-1} = \frac{-9}{5}$$

۲۶- اگر $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{1 + 2m}{1 - 3m}$ آن‌گاه حدود m کدام است؟

« پاسخ »

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1 + 2m}{1 - 3m} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -1 < \frac{2 + 4m}{1 - 3m} < 1 &\Rightarrow \frac{4 + 16m^2 + 16m}{1 - 6m + 9m^2} < 1 \\ \Rightarrow 7m^2 + 22m + 3 < 0 &\Rightarrow -3 < m < -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

۲۷- اگر $\tan 23^\circ = a$ باشد حاصل $\frac{3 \sin 157^\circ + 2 \cos 113^\circ}{\sin 293^\circ - \cos 67^\circ}$ را بر حسب a بیابید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} ? &= \frac{3 \sin(180^\circ - 23^\circ) + 2 \cos(90^\circ + 23^\circ)}{\sin(270^\circ + 23^\circ) - \cos(90^\circ - 23^\circ)} = \frac{3 \sin 23^\circ - 2 \sin 23^\circ}{-\cos 23^\circ - \sin 23^\circ} \\ &= \frac{-\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ + \sin 23^\circ} = \frac{-\tan 23^\circ}{1 + \tan 23^\circ} = \frac{-a}{1 + a} \end{aligned}$$

۲۸- در صورتی که $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت زیر:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

« پاسخ »

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha = -\left(-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\right) = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg}(a - 5\pi) \operatorname{Cotg}(a + 7\pi) - \operatorname{Cos}(6\pi - a) \operatorname{Cos}(a - 6\pi) = \sin^2 a$$

۲۹- ثابت کنید:

« پاسخ »

$$\text{سمت چپ} = -\operatorname{tg}(5\pi - a) \operatorname{Cotg}(7\pi + a) - \operatorname{Cos}(6\pi - a) \operatorname{Cos}(6\pi - a)$$

$$= -(-\operatorname{tga}) \operatorname{Cotga} - \operatorname{Cosa} \operatorname{Cosa} = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

۳۰- هرگاه $\operatorname{Cotg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل کسر $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} p &= \frac{3\sin(90^\circ - 15^\circ) + 2\sin(90^\circ + 15^\circ)}{\cos(180^\circ - 15^\circ) - \cos(270^\circ - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{5\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} \\ &= \frac{5\operatorname{Cotg} 15^\circ}{-\operatorname{Cotg} 15^\circ + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-(2 + \sqrt{3}) + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{5(2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})}{(-1 - \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{1 - 3} = \frac{-5}{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

۳۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos(\alpha + \pi), \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

« پاسخ »

به ترتیب از چپ به راست: $-\sin \alpha, -\cos \alpha, \sin \alpha, -\sin \alpha$

۳۲- نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

(۲) $y = 2\cos x + 1$, $[-2\pi, 2\pi]$

(۱) $y = \frac{1}{2}\sin x$, $[0, 2\pi]$

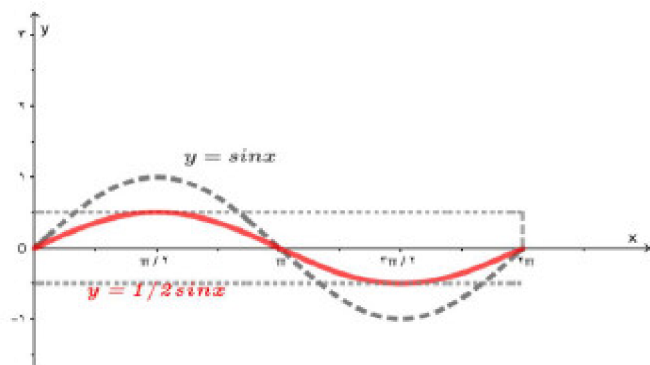
(۴) $y = -1 + \cos x$, $[-4\pi, 4\pi]$

(۳) $y = 1 - \sin x$, $[-2\pi, 2\pi]$

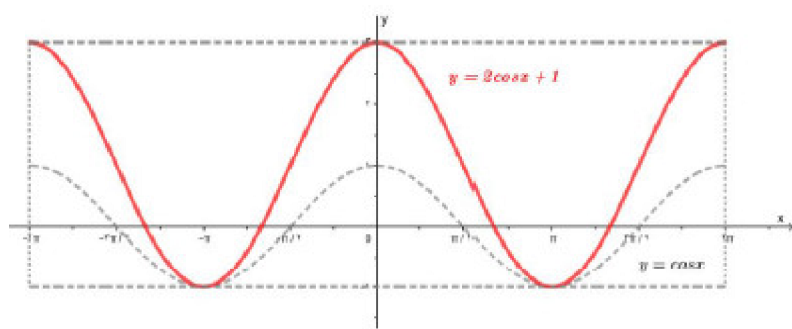
(۶) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $[2\pi, 4\pi]$

(۵) $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $[0, 2\pi]$

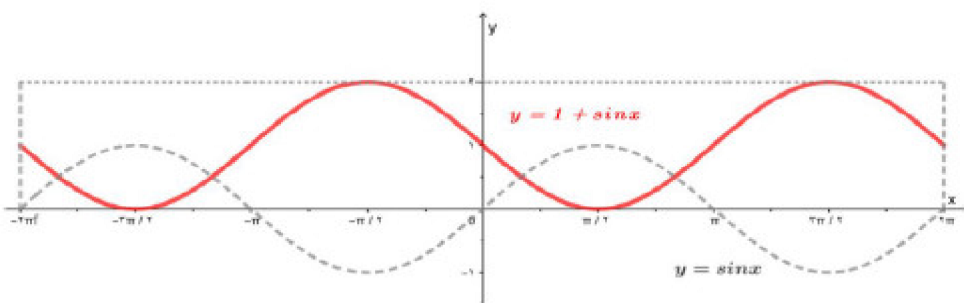
« پاسخ »



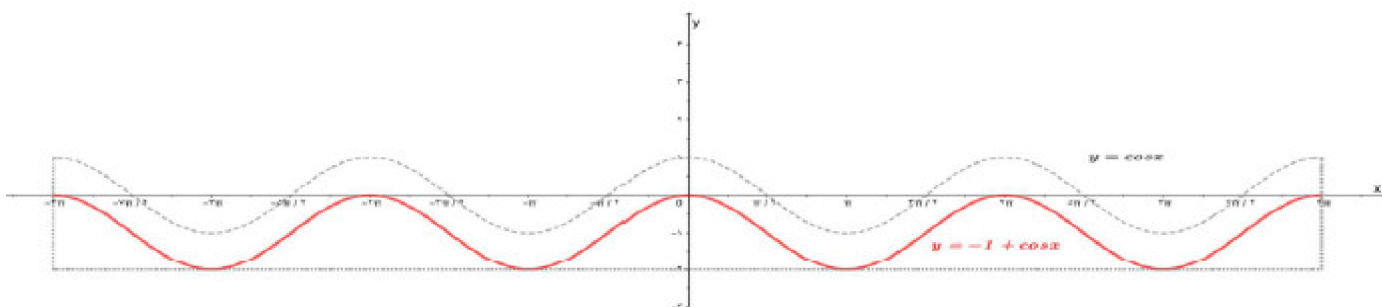
(۱)



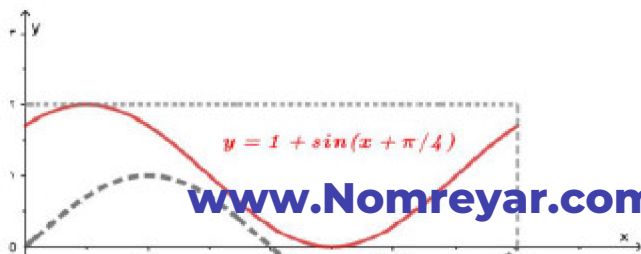
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

۳۳- در تابع $f(x) = -6 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1$ مقدار $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ را حساب کنید.

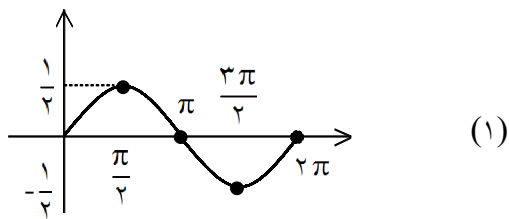
« پاسخ »

$$f(x) = -6 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1 = -6(-\sin x) - 1 \Rightarrow f(x) = 6 \sin(x) - 1$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 6 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 = 6 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -6 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 = -6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -4$$

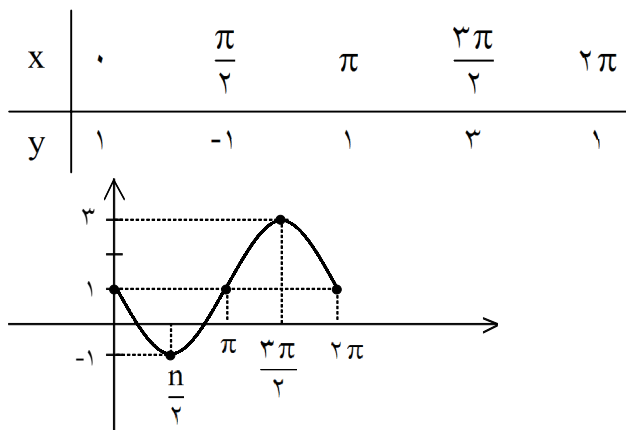
۳۴- نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

« پاسخ »



۳۵- نمودار تابع $y = 1 - 2 \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

« پاسخ »



۳۶- اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\text{Sin } 3x = \frac{m+1}{m}$ آن‌گاه حدود m را بیابید.

« پاسخ »

$$-\pi < 3x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq \text{Sin } 3x < 1$$

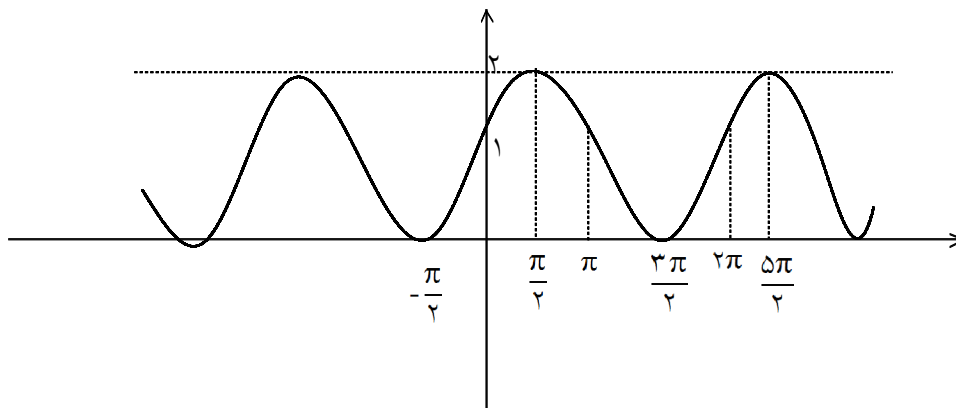
$$\Rightarrow -1 \leq \frac{m+1}{m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{2m+1}{m} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 0$$

$$\Rightarrow \text{جواب: } m \leq -\frac{1}{2}$$

۳۷- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \text{Sin } x$ یا $y = \text{Cos } x$ و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

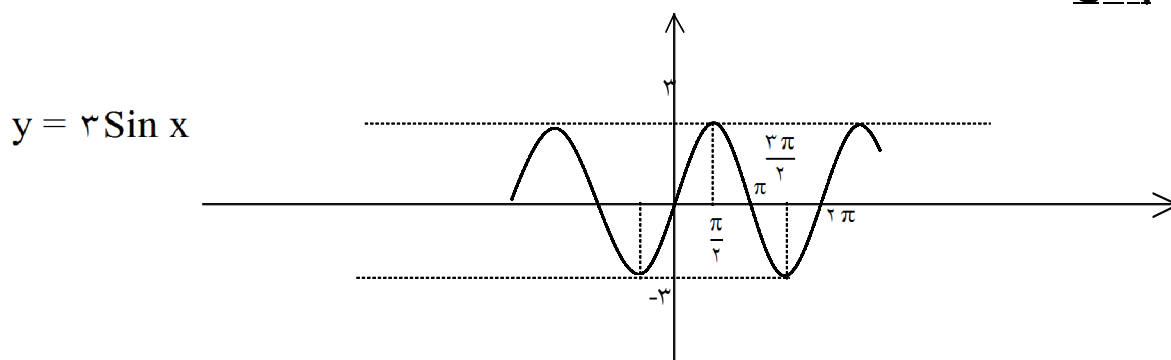
$$y = \text{Sin } x + 1$$

« پاسخ »



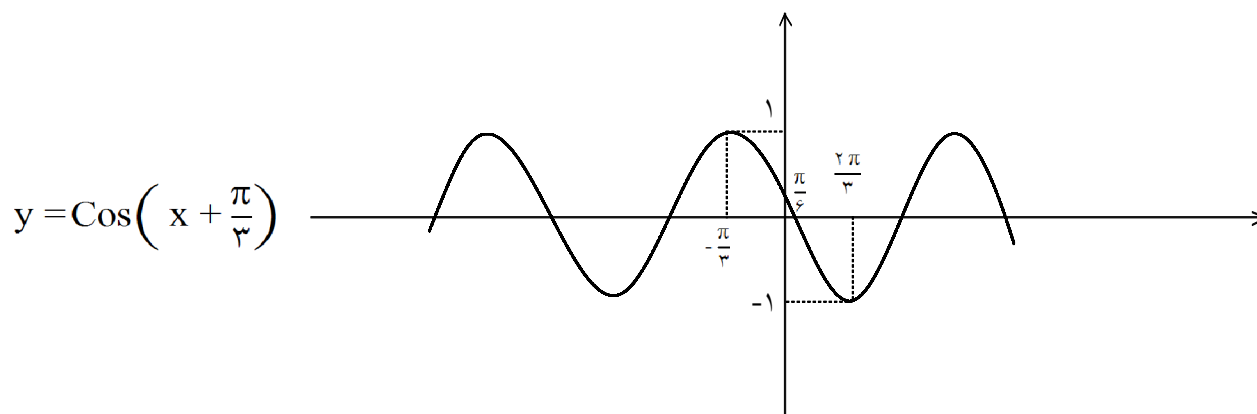
۳۸- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:
 $y = 3 \sin x$

« پاسخ »



۳۹- تابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:
 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

« پاسخ »



۴۰- با فرض $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos^2 x = \frac{2+m}{1-m}$ آن‌گاه حدود m کدام است؟

« پاسخ »

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{2+m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+2m}{1-m} \leq 1 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 1 \\ \frac{2+m}{1-m} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{7}{5} < m < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب : } -\frac{7}{5} < m \leq -\frac{1}{2}$$