تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	سریال ۳۹۱۷۶۳
موضوع		علیرضا فیضیان

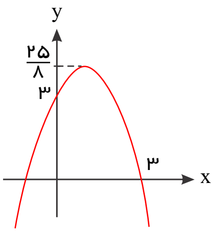
۱. اگر α و β ریشه‌های $x^{۲}-(m+۳)x+۸=۰$ باشند، مقدار m کدام باشد تا α و β و $\alpha+\beta$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟

۱) $m=۹$ یا $m=-۳$ ۲) $m=-۹$ یا $m=۳$ ۳) $m=۹$ یا $m=۳$ ۴) $m=-۹$ یا $m=-۳$

۲. اگر بین مقادیری که تابع $f(x)=x^{۲}+(۴m-۱)x+۱$ را صفر می‌کند، رابطه‌ی $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=x'-x''$ برقرار باشد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $\{\frac{۳}{۴}\}$ ۲) $\{-\frac{۱}{۲}\}$ ۳) $\{\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\{۲\}$

۳. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است، a کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۴. نقطهٔ A روی خط $y=۲x-۱$ طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $B(۰,-۱)$ و $C(۲,۳)$ برابر $\sqrt{۴۵}$ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۵. دایره‌ای به مساحت ۹π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $۳x-۴y=۱$ و $۸y+nx=m$ مماس است. مقدار $m+۳n$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲۰ ۲) ۴۰ ۳) -۶۰ ۴) ۸۰

۶. در مثلث ABC با رئوس $A(۱,۱)$، $B(۲,-۱)$ و $C(۶,۲)$، فاصلهٔ ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) ۲٫۱ ۲) ۲٫۴ ۳) ۲٫۷ ۴) ۳

۷. اگر در معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}-(m+۱)x+m=۰$, $m>۰$ و یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۸. در مربع $ABCD$، مختصات رأس A به صورت $A(۳,۲)$ است و ضلع BC روی خط $y=kx+۱$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع ۵ باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۹. مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha,۲\alpha)$ تا دو نقطهٔ مبدأ مختصات و $M(۲,۴)$، برابر $۲\sqrt{۵}$ است. دقیق‌ترین محدودهٔ α کدام است؟

۱) $\alpha\in\mathbb{R}$ ۲) $\alpha\leq ۰$ ۳) $\alpha>۲$ ۴) $\alpha\in[۰,۲]$

۱۰. خطوط $y=۲$، $y=۵$ و $۳x-۴y+۱۱=۰$ منطبق بر سه ضلع یک لوزی هستند. کدام‌یک از نقاط زیر می‌تواند یکی از رئوس این لوزی باشد؟

۱) $(-۶,۲)$ ۲) $(۴,۵)$ ۳) $(۸,۲)$ ۴) $(-۱,۵)$

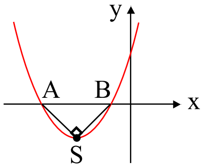
۱۱. مثلث ABC با رئوس $A(-۱,۲)$، $B(۳,۲m+۱)$ و $C(-۲,-۲)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳۴}$

۱۲. به ازای چه مقدار از a، مینیمم تابع $y = ax^۲ - ۴x + a$، برابر ۲ است؟

۱) $۱-\sqrt{۵}$ ۲) $۱+\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۵}-۱$

۱۳. نمودار تابع $y = ۵x^۲ + ۱۲x + a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABS در رأس S قائمه باشد، مقدار a کدام است؟ (S رأس سهمی است.)



۱) ۷ ۲) ۶
۳) ۵ ۴) ۴

۱۴. اگر $x=-۱$ تنها صفر تابع $f(x) = \frac{ax^۲ + ۲x - ۱}{۹x^۲ + ax + b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۵ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۳ + ۱۴\beta$ کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۴۲ ۳) ۷۲ ۴) -۲۷

۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(۲x-۳) = ۴$ باشند، کدام معادله دارای ریشه‌های $\frac{۲}{\beta} - ۱$ و $\frac{۲}{\alpha} - ۱$ می‌باشد؟

۱) $۲x^۲ + ۷x - ۱ = ۰$ ۲) $۲x^۲ + ۵x - ۱ = ۰$
۳) $۲x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$ ۴) $۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$

۱۷. اگر معادله‌ی $۱ = \frac{x+a}{x^۲-۴} + \frac{x}{x-۲}$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -۲۰

۱۸. معادله‌ی $\sqrt{۱-x} + ۱ = \sqrt{\sqrt{x+۳} - x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر نقطهٔ $A(۰,۶)$ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(۴,۷)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۰. به ازای چه حدودی از a تابع درجه دوم $f(x) = (a-۱)x^۲ - ۲\sqrt{۳}x + (a+۱)$، از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

۱) $a \geq ۲$ ۲) $۱ \leq a \leq ۲$ ۳) R ۴) $a > ۱$

تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	سریال ۳۹۱۷۶۳
موضوع		علیرضا فیضیان

۱.گزینه ۲ نکته‌ی ۱: اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است؛ یعنی:

$$b=\frac{a+c}{۲}$$

نکته‌ی ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

α، β و $\alpha+\beta$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\beta=\frac{\alpha+(\alpha+\beta)}{۲}\Rightarrow ۲\beta=۲\alpha+\beta\Rightarrow\beta=۲\alpha$$

از طرفی چون α و β ریشه‌های $x^۲-(m+۳)x+۸=۰$ هستند، داریم:

$$\begin{cases}P=\alpha\beta=۸\\ S=\alpha+\beta=m+۳\end{cases}$$

$$\alpha+\beta=m+۳\xrightarrow{\beta=۲\alpha}۳\alpha=m+۳\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{m+۳}{۳}\\ \beta=\frac{۲}{۳}(m+۳)\end{cases}\quad(*)$$

$$\alpha\beta=۸\xrightarrow{(*)}\frac{۲}{۹}(m+۳)^۲=۸\Rightarrow(m+۳)^۲=۳۶\Rightarrow m+۳=\pm۶\Rightarrow m=۳\ ya\ m=-۹$$

۲.گزینه ۲ اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ باشند، در این صورت طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x'-x'')^۲=(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^۲\Rightarrow x'^۲+x''^۲-۲x'x''=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}$$

$$\Rightarrow(S^۲-۲P)-۲P=S+۲\sqrt{P}\Rightarrow S^۲-۴P-S-۲\sqrt{P}=۰\qquad(۱)$$

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow S=۱-۴m\ ,\ P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=۱\xrightarrow{(۱)}(۱-۴m)^۲-۴-(۱-۴m)-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶m^۲-۴m-۶=۰\Rightarrow ۸m^۲-۲m-۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲},m=\frac{۳}{۴}$$

اما اگر $m=\frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $x'=x''=-۱$ که غیرقابل‌قبول‌اند پس $m=-\frac{۱}{۲}$

۳.گزینه ۳

$$f(۰)=۳\Rightarrow c=۳\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+۳$$

یکی از ریشه‌ها $x=۳$ است، پس $f(۳)=۰$ می‌باشد.

$$۹a+۳b+۳=۰\xrightarrow{+۳}۳a+b+۱=۰$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{۲۵}{۸}$ است.

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-\frac{b^۲-۴a(۳)}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-b^۲+۱۲a=\frac{۲۵}{۲}a\xrightarrow{\times۲}-۲b^۲+۲۴a=۲۵a\Rightarrow a=-۲b^۲$$

به‌جای a در معادله‌ی $۳a+b+۱=۰$ مقدار $-۲b^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$۳(-۲b^۲)+b+۱=۰\Rightarrow-۶b^۲+b+۱=۰\Rightarrow ۶b^۲-b-۱=۰$$

$$b=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۲(۶)}=\frac{۱\pm۵}{۱۲}\begin{cases}\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۴}{۱۲}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

چون $a<۰$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{۲a})$ هم مثبت است پس باید $b>۰$ باشد و $b=-\frac{۱}{۳}$ قابل قبول نیست.

$$b=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-2b^{2}=-2(\frac{1}{2})^{2}=\frac{-1}{2}$$

۴.گزینه ۴ مختصات A را به‌صورت $(x,2x-1)$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{45}\Rightarrow\sqrt{x^{2}+(2x-1+1)^{2}}+\sqrt{(x-2)^{2}+(2x-1-3)^{2}}=\sqrt{45}$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}|x|+\sqrt{5}|x-2|=3\sqrt{5}\Rightarrow|x|+|x-2|=3$$

$$x\geq 2: x+x-2=3\Rightarrow x=2.5\Rightarrow A_1(2.5,4)$$

$0<x<2: x-x+2=3\Rightarrow 2=3$ غ‌ق‌ق

$$x\leq 0: -x-x+2=3\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A_2(-0.5,-2)$$

$$OA_1=\sqrt{6.25+16}=\sqrt{22.25}=\frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$OA_2=\sqrt{0.25+4}=\sqrt{4.25}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

۵.گزینه ۲ مساحت دایره برابر 9π است، پس شعاع آن برابر $r=3$ است.

طرفین معادلهٔ $3x-4y=1$ را در -2 ضرب می‌کنیم:

$$8y-6x=-2$$

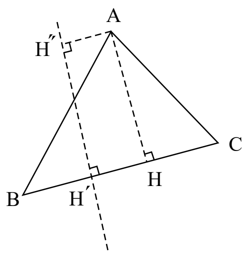
دو خط $8y-6x=-2$ و $8y+nx=m$ موازی‌اند، پس $n=-6$. فاصلهٔ دو خط موازی باید برابر قطر دایره یعنی ۶ باشد:

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{64+36}}=6\Rightarrow|m+2|=60\Rightarrow\begin{cases}m=58\\m=-62\end{cases}$$

$$m+3n=58+(-18)=40$$

$$m+3n=-62+(-18)=-80$$

۶.گزینه ۱ طبق شکل مقابل فاصله ارتفاع رأس A تا عمود منصف BC همان فاصلهٔ نقطهٔ A تا عمود منصف BC است، پس معادلهٔ عمودمنصف BC را یافته و فاصلهٔ A را تا این خط به‌دست می‌آوریم:



$$B(2,-1)\,,C(6,2)\rightarrow H'=\frac{B+C}{2}\Rightarrow H'(4,\frac{1}{2})$$

$$mBC=\frac{yC-yB}{xC-xB}=\frac{2-(-1)}{6-2}=\frac{3}{4}\Rightarrow \text{شیب عمود منصف}=-\frac{4}{3}$$

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}(x-4)\xrightarrow{\times 6}6y-3=-8x+32\Rightarrow 8x+6y-35=0$$

$$A=(1,1)\Rightarrow AH''=\frac{|8+6-35|}{\sqrt{64+36}}=\frac{21}{10}=2.1$$

۷.گزینه ۱ یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است، پس:

$$x_2=2x_1+3\,,\ S=x_1+x_2=m+1\Rightarrow x_1+2x_1+3=m+1$$

$$\Rightarrow 3(x_1+1)=m+1\Rightarrow x_1=\frac{m}{3}-\frac{2}{3}\Rightarrow x_2=2(\frac{m}{3}-\frac{2}{3})+3$$

$$\Rightarrow x_۲ = \frac{۲m}{۳} + \frac{۵}{۳} \ , \ P = x_۱ \cdot x_۲ = m \Rightarrow (\frac{m}{۳} - \frac{۲}{۳})(\frac{۲m}{۳} + \frac{۵}{۳}) = m$$

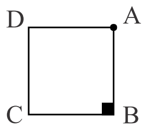
$$\Rightarrow \frac{۲m^۲}{۹} + \frac{۵m}{۹} - \frac{۴m}{۹} - \frac{۱۰}{۹} = m \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}} ۲m^۲ + m - ۱۰ = ۹m$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۸m - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} m^۲ - ۴m - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \quad \text{غ ق ق} \ (m > ۰) \\ m = ۵ \end{cases}$$

۸.گزینه ۳ نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با: $AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ از خط $y - kx - ۱ = ۰$ برابر طول ضلع مربع است. از آنجا که مساحت مربع برابر ۵ است، طول ضلع مربع برابر $\sqrt{۵}$ است، پس با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:



$$\sqrt{۵} = \frac{|۲ - ۳k - ۱|}{\sqrt{k^۲ + ۱}} \Rightarrow \sqrt{۵} \times \sqrt{k^۲ + ۱} = |-۳k + ۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵(k^۲ + ۱) = (-۳k + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۵k^۲ + ۵ = ۹k^۲ - ۶k + ۱ \Rightarrow ۴k^۲ - ۶k - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲k^۲ - ۳k - ۲ = ۰$$

راه حل اول: ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = (-۳)^۲ - ۴(۲)(-۲) = ۲۵ \Rightarrow k_{۱,۲} = \frac{۳ \pm \sqrt{۲۵}}{۴} \Rightarrow k_۱ = ۲ \quad \text{یا} \quad k_۲ = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $k_۱ + k_۲ = ۲ + (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$

راه حل دوم:

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

با توجه به نکته، چون معادلهٔ حاصل دارای دو ریشه است ($\Delta > ۰$)، پس مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر $-\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}$ است.

۹.گزینه ۴ نکته: $\sqrt{u^۲} = |u|$

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$

طبق فرض، مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha, ۲\alpha)$ تا نقطهٔ $O(۰,۰)$ و $M(۲,۴)$، برابر $۲\sqrt{۵}$ است، بنابراین با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$OA + AM = \sqrt{\alpha^۲ + ۴\alpha^۲} + \sqrt{(\alpha - ۲)^۲ + (۲\alpha - ۴)^۲} = \sqrt{۵\alpha^۲} + \sqrt{۵(\alpha - ۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۵} \times \sqrt{a^۲} + \sqrt{۵} \times \sqrt{(\alpha - ۲)^۲} \Rightarrow \sqrt{۵}(|\alpha| + |\alpha - ۲|) = ۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow |\alpha| + |\alpha - ۲| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq ۲ : ۲\alpha - ۲ = ۲ \Rightarrow \alpha = ۲ \\ ۰ \leq \alpha \leq ۲ : \alpha + ۲ - \alpha = ۲ \ \checkmark \qquad \text{همواره برقرار} \\ \alpha \leq ۰ : -\alpha + ۲ - \alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = ۰ \end{cases}$$

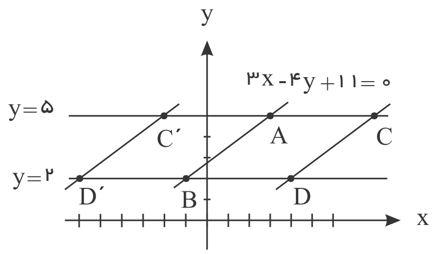
بنابراین دقیق‌ترین محدودهٔ α عبارت است از: $[۰,۲]$

۱۰.گزینه ۱ نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$

دو خط $y = ۲$ و $y = ۵$ موازی هستند. محل تلاقی این دو خط با خط $۳x - ۴y + ۱۱ = ۰$ را که دو رأس لوزی هستند، پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳x - ۴y + ۱۱ = ۰ \\ y = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۲۰ + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow A(۳,۵)$$

$$\begin{cases} ۳x - ۴y + ۱۱ = ۰ \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۸ + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B(-۱,۲)$$

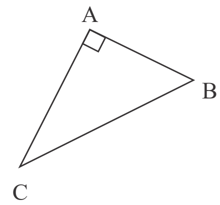


فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B طول ضلع لوزی می‌باشد، که برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

دو رأس دیگر می‌توانند سمت راست یا چپ ضلع AB باشند، اگر سمت راست باشند، با توجه به اینکه طول ضلع لوزی برابر ۵ است، مختصات آن‌ها به‌صورت $C(۳+۵,۵)$ و $D(-۱+۵,۲)$؛ یعنی $C(۸,۵)$ و $D(۴,۲)$ است و اگر سمت چپ باشند، مختصات آن‌ها به‌صورت $C'(۳-۵,۵)$ و $D'(-۱-۵,۲)$؛ یعنی $C'(-۲,۵)$ و $D'(-۶,۲)$ است. فقط نقطهٔ $(-۶,۲)$ در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۱۱. گزینه ۳ از آن‌جا که مثلث در رأس A قائمه است، داریم:



$$mAB=\frac{۲m+۱-۲}{۳-(-۱)}=\frac{۲m-۱}{۴}$$

$$mAC=\frac{-۲-۲}{-۲-(-۱)}=۴$$

$$AB\perp AC\Rightarrow mAB\times mAC=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۱}{۴}\times ۴=-۱\Rightarrow ۲m-۱=-۱\Rightarrow m=۰$$

معادلهٔ ضلع BC را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}B(۳,۱)\\C(-۲,-۲)\end{cases}\Rightarrow mBC=\frac{-۲-۱}{-۲-۳}=\frac{۳}{۵}$$

$$BC: y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۳)\Rightarrow ۵y-۵=۳x-۹\Rightarrow ۳x-۵y-۴=۰$$

طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC است.

$$AH=\frac{|۳(-۱)-۵(۲)-۴|}{\sqrt{۳^۲+(-۵)^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\Rightarrow AH=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\times\frac{\sqrt{۳۴}}{\sqrt{۳۴}}=\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

۱۲. گزینه ۲ طبق فرض مسئله داریم:

طول نقطه مینیمم$=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲a}=\frac{۴}{۲a}=\frac{۲}{a}$

$$y=ax^۲-۴x+a\Rightarrow ۲=a(\frac{۲}{a})^۲-۴(\frac{۲}{a})+a\Rightarrow ۲=\frac{۴}{a}-\frac{۸}{a}+a\xrightarrow{\times a}۲a=۴-۸+a^۲\Rightarrow a^۲-۲a-۴=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=۴+۱۶=۲۰\rightarrow a=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۱\pm\sqrt{۵}$$

نکته: باتوجه به اینکه سهمی دارای نقطه‌ی می‌نیمم است. پس ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد. یعنی $a>۰$ است.

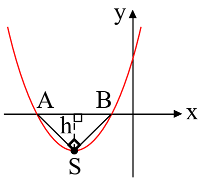
$a_۱=۱+\sqrt{۵}$ **ق ق**

$a_۲=۱-\sqrt{۵}$ **غ ق ق**

۱۳. گزینه ۱ نکته: در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$، مختصات رأس سهمی $S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\-\frac{\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ و تفاضل ریشه‌ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند.



چون S، رأس سهمی است، پس $SA=SB$ و در نتیجه $\overset{\Delta}{ABS}$ متساوی‌الساقین نیز می‌باشد. بنابراین ارتفاع وارد بر وتر AB، میانه هم هست. پس: $h=\frac{|AB|}{۲}$

$$\begin{cases}|AB| = |\text{تفاضل ریشه‌های سهمی}| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{۵}\\ h = |\text{عرض رأس سهمی}| = \left|\dfrac{-\Delta}{۲۰}\right|\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲۰}\right| = \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{\Delta}}{۵} \Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲}\right| = \sqrt{\Delta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\Delta^۲}{۴} = \Delta \Rightarrow \Delta^۲ - ۴\Delta = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{دوریشه‌ی متمایز دارد}]{\text{زیرا معادله}\ \ \Delta\neq ۰} \Delta = ۴ \Rightarrow \Delta = ۱۲^۲ - ۴(۵a) = ۱۴۴ - ۲۰a = ۴ \Rightarrow ۲۰a = ۱۴۰ \Rightarrow a = ۷$$

۱۴.گزینه ۲ **نکتهٔ ۱:** صفر یک تابع یعنی عددی که به‌ازای آن مقدار تابع برابر صفر باشد.

نکتهٔ ۲: در معادلات شامل عبارت‌های گویا، جوابی که مخرج کسرهای معادله را صفر کند، قابل قبول نیست.

$$\frac{ax^۲+۲x-۱}{۹x^۲+ax+b} = ۰ \Rightarrow ax^۲+۲x-۱ = ۰$$

$x=-۱$ صفر این معادله است، پس داریم:

$$a(-۱)^۲+۲(-۱)-۱ = ۰ \Rightarrow a-۲-۱ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

پس معادله به‌صورت $۳x^۲+۲x-۱=۰$ است. اگر $x=-۱$ بخواهد تنها صفر این معادله باشد، دو حالت وجود دارد:

حالت ۱:باید $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف $۳x^۲+۲x-۱=۰$ باشد که چون $\Delta = ۱۶$، امکان‌پذیر نیست.

حالت ۲: ریشهٔ دیگر معادله، ریشهٔ مخرج هم باشد و در نتیجه قابل قبول نباشد:

$$۳x^۲+۲x-۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ \Rightarrow x=-۱ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۱}{۳}$$

پس $x=\frac{۱}{۳}$ ریشهٔ مخرج است:

$$۹(\frac{۱}{۳})^۲+۳(\frac{۱}{۳})+b = ۰ \Rightarrow ۱+۱+b = ۰ \Rightarrow b = -۲$$

۱۵.گزینه ۱ **نکته:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، داریم: $S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a} \quad , \quad P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}$

چون α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۳x-۵=۰$ است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\alpha^۲-۳\alpha-۵=۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۳\alpha+۵ \Rightarrow \alpha^۳ = ۳\alpha^۲+۵\alpha \xlongequal{\alpha^۲=۳\alpha+۵} ۳(۳\alpha+۵)+۵\alpha = ۱۴\alpha+۱۵$$

با جایگذاری این مقدار داریم:

$$\alpha^۳+۱۴\beta = ۱۴\alpha+۱۵+۱۴\beta = ۱۴(\alpha+\beta)+۱۵ = ۱۴S+۱۵ = ۱۴\times۳+۱۵ = ۵۷$$

۱۶.گزینه ۳

روش اول:

$$x(۲x-۳) = ۴ \to ۲x^۲-۳x-۴ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس شوند}} -۴x^۲-۳x+۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}\ (-۲)\ \text{برابر شوند}} -۴x^۲+(-۲)(-۳x)+(-۲)^۲(۲) = ۰ \to -۴x^۲+۶x+۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها افزوده شود}} -۴(x-۱)^۲+۶(x-۱)+۸ = ۰$$

$$\to -۴x^۲+۸x-۴+۶x-۶+۸ = ۰ \to -۴x^۲+۱۴x-۲ = ۰ \to +۲x^۲-۷x+۱ = ۰$$

روش دوم:

$$۲x^۲-۳x-۴ = ۰ \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$$

$$S = ۱-\frac{۲}{\alpha}+۱-\frac{۲}{\beta} = ۲-\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = ۲-\frac{۲(\frac{۳}{۲})}{-۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$P = (۱-\frac{۲}{\alpha})(۱-\frac{۲}{\beta}) = ۱-۲(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})+\frac{۴}{\alpha\beta} = ۱-۲\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}\right)+\frac{۴}{-۲} = ۱+\frac{۳}{۲}-۲ = \frac{۱}{۲} \to x^۲-Sx+P = ۰$$

$$\to x^۲-\frac{۷}{۲}x+\frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲-۷x+۱ = ۰$$

۱۷.گزینه ۴ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x(x+۲)+x+a}{x^۲-۴}=۱ \Rightarrow x^۲+۳x+a=x^۲-۴ \Rightarrow ۳x+a=-۴ \Rightarrow x=\frac{-۴-a}{۳}$$

برای این‌که ریشه بدست آمده قابل قبول نباشد باید مخرج کسر را صفر کند پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌اوریم:

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲ \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{-۴-a}{۳}} \begin{cases} \frac{-۴-a}{۳}=۲ \Rightarrow -۴-a=۶ \Rightarrow a=-۱۰ \\ \frac{-۴-a}{۳}=-۲ \Rightarrow -۴-a=-۶ \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a حاصلضرب مقادیر ممکن برای $=-۱۰\times ۲=-۲۰$

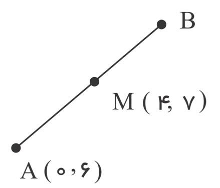
۱۸.گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+۳}-x=۱+۱-x+۲\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۳}=۲+۲\sqrt{۱-x} \Rightarrow x+۳=۴+۴-۴x+۸\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow ۵x-۵=۸\sqrt{۱-x} \Rightarrow ۲۵(x-۱)^۲=۶۴(۱-x) \Rightarrow ۲۵(x-۱)^۲+۶۴(x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(۲۵x-۲۵+۶۴)=۰ \Rightarrow (x-۱)\cdot(۲۵x+۳۹)=۰$$
$$\rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۳۹}{۲۵} \end{cases}$$

جواب $x=-\frac{۳۹}{۲۵}$ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب $x=۱$ است.

۱۹.گزینه ۴ اگر نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ M قرینه کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است. داریم:

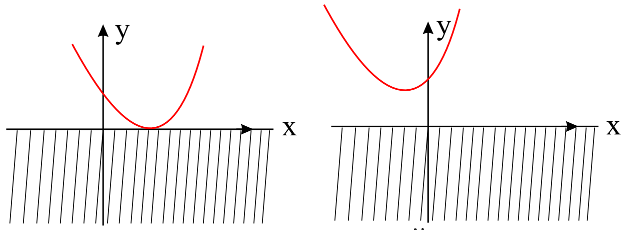
$$M\left| \begin{array}{l} xM=\frac{xA+xB}{۲} \Rightarrow xB=۲xM-xA \\ yM=\frac{yA+yB}{۲} \Rightarrow yB=۲yM-yA \end{array}\right.$$



در نتیجه مختصات نقطهٔ B به‌صورت زیر است:

$$B\left| \begin{array}{l} x=۲(۴)-۰=۸ \\ y=۲(۷)-۶=۸ \end{array}\right. \Rightarrow xB+yB=۸+۸=۱۶$$

۲۰.گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد.



توجه: برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید $\Delta\leq ۰$

$\Rightarrow a-۱>۰ \rightarrow a>۱ \qquad (۱)$ تابع باید مینیمم داشته باشد.

$$\Delta\leq ۰ \rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(-۲\sqrt{۳})^۲-۴(a-۱)(a+۱)\leq ۰$$
$$\Rightarrow ۱۲-۴a^۲+۴\leq ۰ \Rightarrow ۴a^۲\geq ۱۶ \Rightarrow a^۲\geq ۴ \Rightarrow |a|\geq ۲$$
$$\Rightarrow a\leq -۲ \text{ یا } a\geq ۲ \qquad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\bigcap(۲)} a\geq ۲$$