

معادله‌ی درجه‌ی دوم

درس ۱: معادله و مسائل توصیفی

۱. هر یک از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
 - (الف) مربع هر عددی، برابر است با همان عدد بعلاوه‌ی یک.
 - (ب) عددی را بیابید که پنج برابر آن، بعلاوه‌ی دو، برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.
 - (پ) عددی را بیابید که دو برابر آن بعلاوه‌ی عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.
 - (ت) عددی را بیابید که مربع آن، سه برابر خود همان عدد باشد.

درس ۲: معادله‌ی درجه‌ی دو و کاربردها

معادله‌ی درجه‌ی اول

۲. معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) 2x - 1 = 9 \quad ۲) 6x + 2 = 2x - 10 \quad ۳) x + 3 = 5x + 10 \quad ۴) \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{3}$$

۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه‌ی ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه، هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه، تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

۴. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس، دو برابر یک تکنسین و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه، ۳ مدیر، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه $55/5$ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک تکنسین در این کارخانه، ماهیانه چقدر است؟

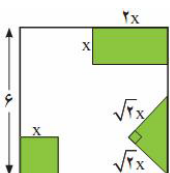
معادله‌ی درجه‌ی دوم

روش اول: تجزیه

۵. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 ۱) x^2 - 5x = 0 & ۲) x^2 = -7x & ۳) 2x^2 - 6x = 0 & ۴) (x+2)(x-3) = x-3 \\
 ۵) \frac{x^2}{3} = x & ۶) x^2 - 25 = 0 & ۷) x^2 = 81 & ۸) 4x^2 = 9 \\
 ۹) x^2 - 7 = 0 & ۱۰) 4x^2 - 25 = 0 & ۱۱) (x-3)^2 = 4 & ۱۲) 5t^2 = 20 \\
 ۱۳) 12x^2 - 8 = 0 & ۱۴) x^2 = 5 - x^2 & ۱۵) 2x^2 - 8x = 0 & ۱۶) x^4 - 2x^2 = 0 \\
 ۱۷) x^2 - 5x + 6 = 0 & ۱۸) x^2 + x - 20 = 0 & ۱۹) 9 - 6z + z^2 = 0 & ۲۰) 9x^2 + 3x - 2 = 0 \\
 ۲۱) x^2 - 6x + 9 = 0 & ۲۲) y^2 + 10y + 25 = 0 & ۲۳) x^2 + 4x + 4 = 0 & ۲۴) 14) 4k^2 - 12k + 8
 \end{array}$$

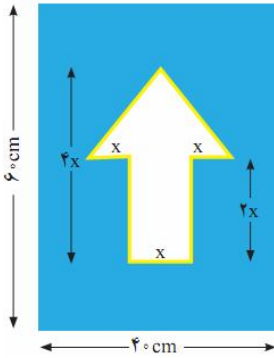
۶. از مربعی به ضلع $6cm$ ، سه شکل زیر بریده شده است. مساحت باقی‌مانده $24cm^2$ است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟



۷. برای ساخت تابلوی راهنمای ((یک طرفه)) روی یک پل، مطابق شکل زیر، از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه ۱cm^2 برچسب سفید، ۳۰ تومان و هزینهی ۱cm^2 برچسب آبی، ۱۰ تومان است. مجموع هزینهی برچسب‌های سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.

الف) اندازهی x چقدر است؟

ب) اگر در تابلوی راهنمایی، مطابق شکل زیر، از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینهی ۱cm^2 آن ۱۰۰ تومان است، هزینهی رنگ‌آمیزی تابلو، ۳۴۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت، اندازهی x چقدر است؟



۸. در معادلهی $(x-1)^2 = k$:

الف) جواب این معادله را در صورت وجود برای $k = 2, k = 4, k = -9$ به دست آورید.

ب) به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشهی مضاعف دارد؟

پ) به ازای چه مقادیری از k ، معادله دو ریشهی حقیقی دارد؟

ت) به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشهی حقیقی ندارد؟

۹. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x = 2$ و $x = 7$ باشد. آیا این جواب منحصر به فرد است؟

۱۰. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x = -3$ و $x = 5$ باشد. آیا این جواب منحصر به فرد است؟

۱۱. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x = -2$ و $x = -4$ باشد.

۱۲. معادلهی درجهی دومی بنویسید که $x = 1$ ریشهی مضاعف آن باشد.

روش دوم: مربع کامل

۱۳. معادلات درجهی دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 8x = -12$	۲) $x^2 + 2x - 8 = 0$	۳) $x^2 + 6x = -8$	۴) $x^2 - 10x + 21 = 0$
۵) $x^2 + 5x - 14 = 0$	۶) $x^2 - 5x + 6 = 0$	۷) $x^2 + 6x + 9 = 0$	۸) $r^2 + 3r = 3$
۹) $s^2 - 3s + 3 = 0$	۱۰) $x^2 + \frac{1}{4}x = -x$		

روش سوم: دلتا (روش کلی):

۱۴. معادلات زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید.

۱) $2x^2 - 5x + 3 = 0$	۲) $x^2 - 6x = -9$	۳) $4x^2 - 3x - 1 = 0$	۴) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$
۵) $2x^2 - 7x + 5 = 0$	۶) $x^2 - x + 1 = 0$	۷) $-2x^2 + x + 3 = 0$	۸) $-x^2 + 4x - 4 = 0$
۹) $x^2 - 3x + 2 = 0$	۱۰) $4x^2 + 7x - 2 = 0$	۱۱) $3x^2 + x + 7 = 0$	۱۲) $r - r^2 = 3$

۱۳) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ ۱۴) $x^2 + 2\sqrt{3}x = 9$

۱۵. معادله‌های زیر را حل کرده و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 ، حاصل $x_1 + x_2$ و همچنین $x_1 \times x_2$ ، مشخص کنید چه رابطه‌ای بین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب a, b, c در معادلات زیر وجود دارد؟

۱) $3x^2 + 5x - 2$ ۲) $4x^2 + 3x - 7 = 0$ ۳) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

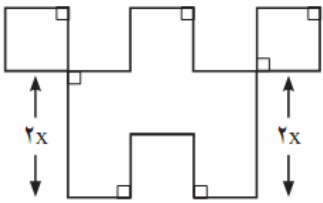
۱۶. نیما از پسرعمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو برابر با ۴۰ باشد، پسر عموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

۱۷. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند. طول و عرض مستطیل چقدر است؟

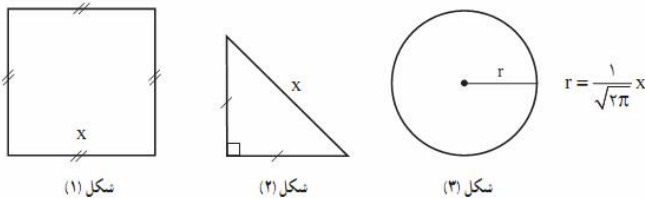


۱۸. طول ضلع مربعی را با به دست آوردن قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.

۱۹. در شکل زیر، طول تمام پاره‌خط‌ها، به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل، برابر x است. اگر اندازه‌ی مساحت شکل، برابر با اندازه‌ی محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



۲۰. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر، برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



۲۱. اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴- باشد، جواب دیگر این معادله چند است؟

۲۲. اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $3x^2 + mx - 8 = 0$ برابر ۲ باشد، جواب دیگر این معادله چند است؟

۲۳. کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a ، همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

۱) $x^2 + ax - 1 = 0$ ۲) $x^2 - x + a = 0$

کاربردی از معادلات درجه‌ی دوم

۲۴. در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر، از رابطه‌ی $p(x) = -0.004x^2 + 8/15x - 100$ به دست می‌آید.

(الف) اگر این کارگاه ۱۰۰ چتر بفروشد، چقدر سود می‌کند؟

(ب) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

(پ) به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سربه‌سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

۲۵. در یک کارگاه تولید دوچرخه، هزینه‌ی اولیه برای خرید دستگاه و تبلیغات ۷ میلیون تومان است. هزینه‌ی تولید عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه. اگر x قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش از رابطه‌ی $70000 - 200x$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را بنویسید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

درس ۳: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

۲۶. معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{x+1}{x+2} + \frac{5}{x+2} = 0$$

$$۳) \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$۵) \frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$$

$$۷) \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$۹) 1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$$

$$۱۱) \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$۱۳) \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$۱۵) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$۲) \frac{10}{x-4} - \frac{2x-6}{x-4}$$

$$۴) \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$۶) \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$$

$$۸) \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$۱۰) \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$۱۲) \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$۱۴) \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{x-1}{x+2}$$

۲۷. به ازای چه مقدار m معادله‌ی $\frac{m}{x+3} + \frac{x}{x-1} = 1$ دارای جواب ۵ است؟

۲۸. به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

۲۹. به ازای چه مقدار k ، معادله‌ی $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

۳۰. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳۱. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را در ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند. چنانچه دو شیر را باهم باز کنیم، آن‌گاه استخر در ۱۲ ساعت پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

۳۲. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آنها اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه‌ی $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بودند؟

۳۳. هنگامی که دو چاپگر باهم کار می‌کنند، فیش حقوقی کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟