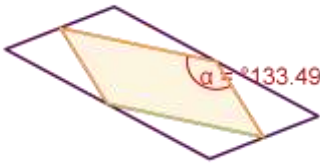
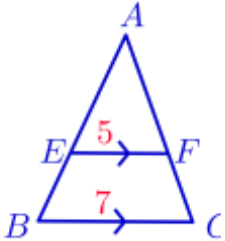


بسمه تعالی

سال اقتصاد مقاومتی، اقدام و عمل

اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی		
سؤالات امتحان درس: هندسه فصل دوم	رشته: ریاضی	سال: دهم
ردیف	سوالات همراه با پاسخ	
۱	<p>جملات صحیح و غلط را مشخص کنید:</p> <p>الف) اگر <math>a</math> واسطه هندسی بین ۴ و ۹ باشد و <math>\frac{9}{a} = \frac{1}{b}</math> آنگاه <math>b = \frac{2}{3}</math>.</p> <p>ب) چهار ضلعی که از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع بدست می آید، مستطیل است.</p> <p>ج) در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای زوایای متناظر با نسبت قاعده های نظیر آنها برابر است.</p> <p><b>پاسخ:</b></p> <p>الف) درست زیرا:  <math display="block">a = \sqrt{9 \times 4} = 6</math> <math display="block">\frac{1}{b} = \frac{9}{a} = \frac{9}{6} \Rightarrow b = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}</math></p> <p>ب) نادرست. یک متوازی الاضلاع بدست می آید. به عنوان مثال نقض شکل زیر را در نظر بگیرید.</p>  <p>ج) درست.</p>	
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:</p> <p>الف) نسبت مساحت های دو مثلث که دارای قاعده های برابرند با نسبت ..... نظیر برابر است.</p> <p>ب) اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر یا امتداد آنها را در دو نقطه قطع کند، مثلثی تشکیل می دهد که با مثلث اصلی ..... است.</p> <p>ج) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت های نظیر برابر است با ..... نسبت میانه های نظیر.</p> <p><b>پاسخ:</b></p> <p>الف) ارتفاع های          ب) متشابه          ج) مجذور</p>	
۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب نمایید.</p> <p>۱. اعداد <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> به ترتیب با اعداد ۴ و ۵ و ۶ متناسبند. <math>a+2b-3c</math> چند برابر <math>b</math> است؟</p>	

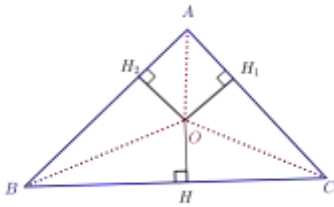
<p>۲. در مثلث شکل زیر، <math>EF \parallel BC</math> و <math>BC = 7</math> و <math>EF = 5</math> و <math>EB = 3</math> سانتیمتر است. طول <math>EA</math> چند سانتیمتر است؟</p>  <p>۳. نسبت مساحت های دو پنج ضلعی متشابه، <math>\frac{4}{9}</math> است. اگر اندازه ی ضلع یکی از آنها ۶ واحد باشد، محیط دیگری چند واحد است؟</p> <p>۴. در دو مثلث متشابه <math>ABC</math> و <math>A'B'C'</math>، <math>AH</math> و <math>A'H'</math> دو ارتفاع متناظر هستند. اگر <math>AH = 3A'H'</math> نسبت محیط های دو مثلث چقدر است؟</p>	<p>(الف) <math>\frac{2}{3}</math> (ج) <math>\frac{4}{5}</math> (ب) <math>\frac{5}{4}</math> (د) <math>\frac{5}{4}</math></p> <p>(الف) <math>\frac{6}{5}</math> (ج) ۶ (ب) <math>\frac{5}{5}</math> (د) <math>\frac{7}{5}</math></p> <p>(الف) ۳۰ (ج) ۴۵ (ب) ۳۵ (د) ۲۵</p> <p>(الف) ۳ (ج) <math>\frac{1}{9}</math> (ب) <math>\sqrt{3}</math> (د) ۹</p> <p><b>پاسخ:</b></p> <p>۱. (ج) <math>\left. \begin{matrix} a = 6t \\ b = 5t \\ c = 4t \end{matrix} \right\  \Rightarrow \frac{a+2b-3c}{b} = \frac{6t+10t-12t}{5t} = \frac{4t}{5t} = \frac{4}{5}</math></p> <p>۲. (د) <math>EB \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7x = 5x + 15 \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7.5</math></p> <p>۳. (ج) <math>\sqrt{\frac{S}{S'}} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{6}{a'} \Rightarrow a' = 9 \Rightarrow 5 \times 9 = 45 \\ \frac{2}{3} = \frac{a'}{6} \Rightarrow a' = 4 \Rightarrow 5 \times 4 = 20 \end{cases}</math></p> <p>۴. (الف) <math>\frac{2P}{2P'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{3A'H'}{A'H'} = 3</math></p>
<p>سوالات زیر را کامل، تمیز و مرتب پاسخ دهید.</p>	
<p>اگر <math>\frac{3a}{2} = \frac{b-3}{3} = \frac{2c+1}{4}</math> و <math>3a + b + 2c = 11</math>، مقادیر <math>a, b, c</math> را حساب کنید.</p>	<p>۴</p>

پاسخ:

$$\frac{3a}{2} = \frac{b-3}{3} = \frac{2c+1}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}t \\ b = 3t + 3 \\ c = 2t - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 3a + b + 2c = 11 \Rightarrow 9t + 2 = 11 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

در مثلث ABC،  $AB=6$  و  $AC=9$  است. اگر O نقطه ی هم‌رسی نیمسازهای آن باشد، مساحت مثلث AOB به مساحت مثلث AOC را بدست آورید.

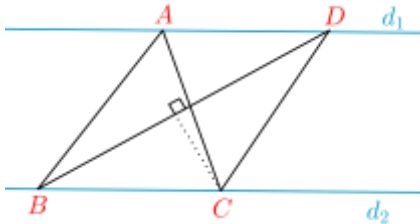
پاسخ:



می دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است پس  $OH_2 = OH_1$  بنابراین:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{\frac{1}{2} \times OH_2 \times AB}{\frac{1}{2} \times OH_1 \times AC} = \frac{AB}{AC}$$

در شکل مقابل  $d_1 \parallel d_2$  و مساحت مثلث ABC،  $8cm^2$  است. اگر  $BD = 6cm$  باشد، فاصله ی نقطه ی C از BD را به دست آورید.



پاسخ:

$$d_1 \parallel d_2 \text{ و قاعده مشترک } BC \Rightarrow S_{ABC} = S_{BDC} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times BD \times CH \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times 6 \times CH$$
$$\Rightarrow CH = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

۷

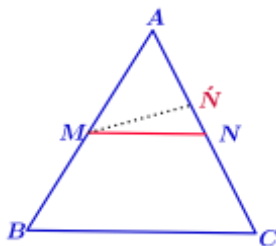
عکس قضیه تالس را نوشته و اثبات کنید.

پاسخ:

عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها چهار پاره خط با اندازه های متناظر متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات:

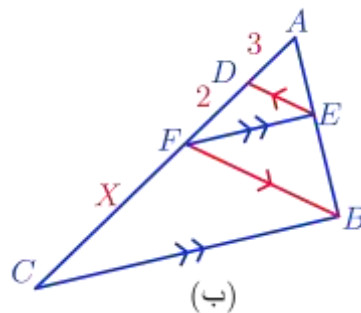
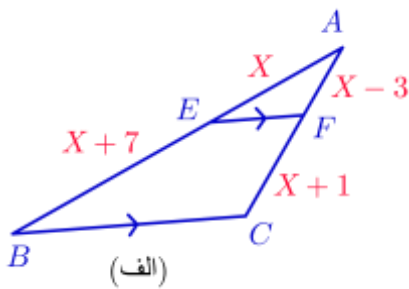
با برهان خلف است:



در شکل می دانیم  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . فرض کنیم  $MN \parallel BC$  پس از M پاره خط  $MN'$  را موازی BC رسم می کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم (1)  $MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$  و فرض داریم: (2)  $\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ . از (1) و (2) داریم:  $AN' = AN$  پس N بر  $AN'$  منطبق است و لذا همان MN است که با BC موازیست.

۸

در هر یک از شکل های زیر مقدار مجهول را بیابید.

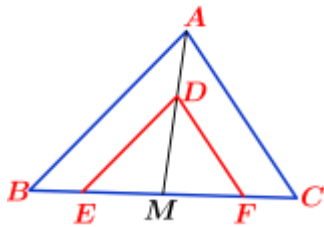


پاسخ:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7 \quad (\text{الف})$$

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel FB \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AB} \\ EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \end{array} \right\| \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{25}{3} \quad (\text{ب})$$

از نقطه ی دلخواه D روی میانه ی AM از مثلث ABC خطوطی موازی اضلاع AB و AC رسم می کنیم تا ضلع BC را در E و F قطع کنند. ثابت کنید: AM=MF.

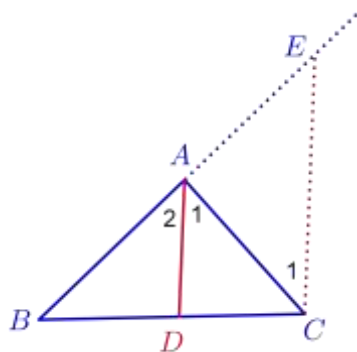


پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MD}{MA} \\ DF \parallel AB \Rightarrow \frac{MF}{MB} = \frac{MD}{MA} \\ MC = MB \end{array} \right\| \Rightarrow ME = MF$$

الف) ثابت کنید نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع روبرو را به نسبت اضلاع تقسیم می کند.  
ب) اگر در مثلث ABC، AD نیمساز داخلی زاویه A باشد و داشته باشیم  $AB=6$ ،  $AC=4$  و  $BD=3$ ، اندازه AD را بدست آورید.

پاسخ:



فرض: AD نیمساز است.

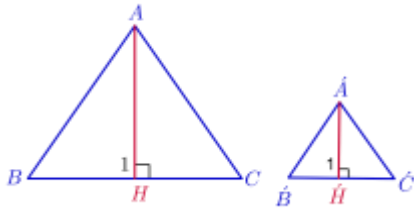
$$\text{حکم: } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

<p>اثبات: از C خطی به موازات AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند.</p> $\left. \begin{array}{l} AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ نیمساز است} \\ AD \parallel CE \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ مورب } AC \\ AD \parallel CE \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{E} \text{ مورب } BE \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E} \Rightarrow AE = AC \quad (1)$ <p>از طرفی:</p> $AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \quad (\text{تالس}) \quad (2)$ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{و (۲) نتیجه می گیریم:}$	
<p>در هر یک از حالت های زیر با ذکر دلیل مشخص کنید دو مثلث متشابه هستند یا خیر.</p> <p>الف) <math>AB = 5, \hat{A} = 30^\circ, AC = 4</math> و <math>A'B' = 2.5, \hat{A}' = 30^\circ, A'C' = 2</math></p> <p>ب) <math>AB = 3, BC = 4, AC = 5</math> و <math>A'B' = 6, B'C' = 10, A'C' = 8</math></p> <p style="text-align: right;"><b>پاسخ:</b></p> <p>الف) دو مثلث به حالت (ض ز ض) متشابهند.</p> $\left. \begin{array}{l} \frac{AC}{A'C'} = 2 \\ \hat{A} = \hat{A}' = 30^\circ \\ \frac{AB}{A'B'} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow$ <p>ب) الف) دو مثلث به حالت (ض ض ض) متشابهند.</p> $\left. \begin{array}{l} \frac{BC}{A'C'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{B'C'} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow$	<p>۱۱</p>
<p>با استدلال استنتاجی ثابت کنید "در دو مثلث متشابه ، نسبت ارتفاع ها با نسبت تشابه برابر است."</p>	<p>۱۲</p>

پاسخ:

فرض:  $ABC \sim A'B'C'$

حکم:  $\frac{AH}{A'H'} = K$



اثبات:

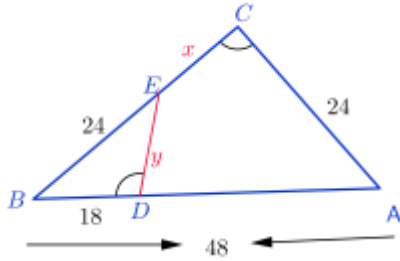
$$ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}', \hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}', \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = K$$

اکنون دو مثلث ABH و A'B'H' را در نظر می گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \end{array} \right\| \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta A'B'H' \text{ (ز ز)} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = K$$

در شکل مقابل  $\hat{C} = \hat{BDE}$ ، طول  $x$  و  $y$  را بیابید.

۱۳

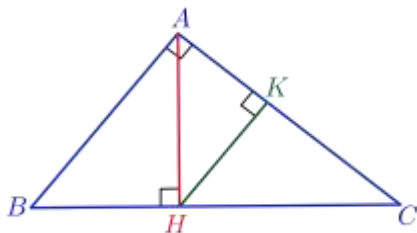


پاسخ:

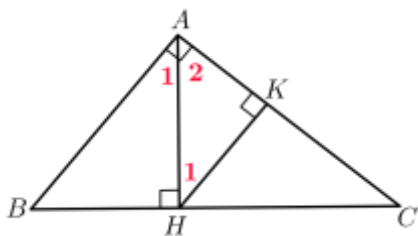
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array} \right\| \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDB \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DE} \Rightarrow \frac{24+x}{18} = \frac{48}{24} = \frac{24}{y}$$
$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \frac{24+x}{18} = \frac{2}{1} \Rightarrow 24+x = 36 \Rightarrow x = 12 \\ \frac{24}{y} = 2 \Rightarrow y = 12 \end{array} \right.$$

در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، ارتفاع وارد بر وتر (AH) را رسم کرده و از نقطه H عمودی بر ضلع AC رسم می کنیم و پای عمود را K می نامیم. ثابت کنید:  $AH^2 = AB \cdot HK$

۱۴



پاسخ:



$$\begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 90^\circ \\ \hat{H}_1 + \hat{A}_2 &= 90^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{A}_1 \end{aligned}$$

اکنون دو مثلث BHA و AKH را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 = \hat{A}_1 \parallel \\ \hat{K} = \hat{H} \parallel \end{aligned} \Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta BHA \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HK}{HA} \Rightarrow AH^2 = AB \times HK$$

مساحت های دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ سانتیمتر مربع است. نسبت اضلاع متناظر را بدست آورید.

۱۵

پاسخ:

$$\frac{a}{a'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

مثلث های ABC و A'B'C' متشابهند. اگر طول اضلاع مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱ سانتیمتر و محیط مثلث A'B'C' برابر ۶۰ سانتیمتر باشد، طول اضلاع مثلث A'B'C' را بدست آورید.

۱۶

پاسخ:

$$2P = 11 + 8 + 5 = 24$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{2P}{2P'} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{a'} = \frac{2}{5} \Rightarrow a' = \frac{25}{2} \\ \frac{8}{b'} = \frac{2}{5} \Rightarrow b' = 20 \\ \frac{11}{c'} = \frac{2}{5} \Rightarrow c' = \frac{55}{2} \end{cases}$$

در دو مثلث متشابه، نسبت محیط ها  $\frac{\sqrt{5}}{7}$  است. اگر یکی از ارتفاع های مثلث بزرگتر  $14\sqrt{5}$  باشد، ارتفاع نظیرش در مثلث کوچکتر را بیابید.

۱۷

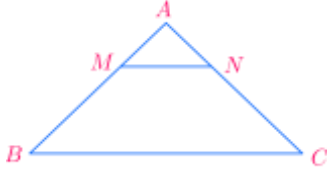


پاسخ:

$$\frac{h}{h'} = \frac{2P}{2P'} \Rightarrow \frac{h}{14\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{7} \Rightarrow h = \frac{14\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{7} = 10$$

۱۴

در شکل روبه رو  $BC \parallel MN$  است و مساحت دوزنقه  $MNCB$  هشت برابر مساحت مثلث  $AMN$  است. نسبت  $\frac{MB}{AM}$  را به دست آورید.



پاسخ:

$$S_{MNCB} = 8S_{AMN} \Rightarrow S_{ABC} = 9S_{AMN}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \sqrt{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = 2$$