

فصل ۴: معادله ها و نامعادله ها

۱: معادله ی زیر را حل کنید. ($mn \neq 0$)

$$mnx^2 - (m^2 + n^2)x + mn = 0.$$

۲: مقدار m را چنان بیابید که $x = 2$ طول رأس سهمی به معادله ی $y = mx^2 + (m - 1)x + 1$ باشد.

۳: یک نامعادله ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه ی جواب آن بازه ی $(1, 7)$ باشد.

۴: حدود m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ها قرار گیرد.

۵: نامعادله $\frac{x}{2-x} \geq 1$ را حل کنید.

حل:

۱:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (m^2 + n^2)^2 - 4(mn)(mn) \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 - 4m^2n^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 - n^2)^2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2)}{2mn} = \frac{2m^2}{2mn} = \frac{m}{n}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2)}{2mn} = \frac{2n^2}{2mn} = \frac{n}{m}$$

۲:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-(m-1)}{2m} \rightarrow 4m + m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{5}$$

۳:

$$1 < x < 7 \xrightarrow{\frac{1+7}{2} = -4} 1 - 4 < x - 4 < 7 - 4 \rightarrow -3 < x - 4 < 3 \rightarrow |x - 4| < 3$$

۴: تابع درجه ی دوّم است.

$$f(x) < 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow 3 - 4m(m-1) < 0 \rightarrow 4m^2 - 4m - 3 < 0 \\ a < 0 \rightarrow m - 1 < 0 \rightarrow m < 1 \end{cases}$$

و به کمک تعیین علامت عبارت درجه ی دوّم و تعیین اشتراک مجموعه ی جواب های دو نامعادله داریم.

$$m < -\frac{1}{2}$$

۵:

$$\frac{x}{2-x} \geq 1 \rightarrow \frac{x}{2-x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x-2+x}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-2}{2-x} \geq 0$$

$$2x-2=0 \rightarrow x=1$$

$$2-x=0 \rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$2x-2$	-	o	+	+	
$2-x$	+		+	o	-
$\frac{2x-2}{2-x} \geq 0$	-	o	+	نامعین	-

مجموعه ی جواب $= [1, 2)$