قسمت ششم: حجم

نکته: هرگاه ضلع‌های جسمی را a برابر کنیم، مساحت جانبی و مساحت کل آن $a^۲$ برابـر و حجـم آن $a^۳$ برابر می‌شود.

مثال: به بُعدهای جسمی ٪۲۰ افزودیم. در این صورت درصد افزوده شده به مساحت جانبی و مساحت کل آن، برابر است با:

$$۱۰۰\%+۲۰\%=۱۲۰\% \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۲۰}{۱۰۰}=\frac{۱۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۴۴\%-۱۰۰\%=۴۴\%$$

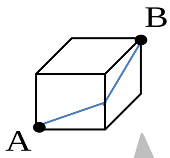
نکته: اگر طول یال‌های مکعبی را k برابر کنیم، طول قطر آن نیز k برابر می‌شود.

نکته: هر مکعب، دارای ۹ صفحه‌ی تقارن است.

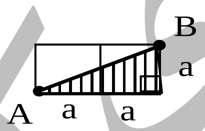
نکته: هرگاه یک مکعب با تا کردن سیم بسازیم. تعداد یال‌های آن حداقل ۱۵ مـی‌شـود. زیـرا ۳ یـال تکـرار می‌شود.

نکته: مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطهٔ $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می آید.

نکته: برای رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B روی مکعـب بـه ضلـع a، کوتـاه‌تـرین مسـیر برابـر اسـت بـا $AB=a\sqrt{۵}$

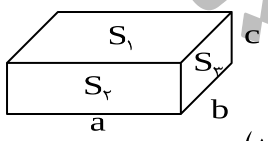


$\Rightarrow$



$\overline{AB}=a\sqrt{۵}$

نکته: در هر مکعب مستطیل، حاصلضرب مساحت ۳ وجه مشترک در یک رأس، با مجـذور حجـم آن برابـر است:



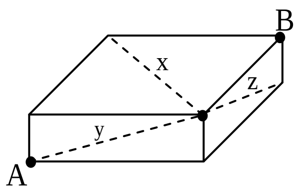
$$S_۱\times S_۲\times S_۳=(abc)^۲=(\text{حجم})^۲$$

نکته: هر مکعب مستطیل، ۳ صفحه‌ی تقارن دارد. (مکعب مستطیل مکعب مربع نباشد)

نکته: اندازه‌ی قطر هر مکعب مستطیل با طول و عرض و ارتفاعِ a، b و c برابر است با:

$$\text{قطر}=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

نکته: اگر اندازه‌ی قطرهای ۳ وجه مشترک در یک رأس از یک مکعب مستطیل x، y و z باشـد، قطـر مکعـب مستطیل برابر است با

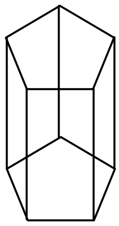


$$\overline{AB}=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۲}}$$

نکته: در هرم‌ها و منشورها همواره داریم:

تعداد یال‌ها = ۲− (تعداد وجه‌ها + تعداد رأس‌ها)

مثال:



(۱۰+۷)−۲=۱۵

نکته: در هر منشور، تعداد یال‌ها همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

نکته: در هر منشور، همواره تعداد رأس‌ها بر ۲ بخش‌پذیر است.

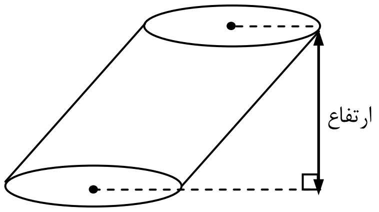
نتیجه: در هر منشور حاصلضرب تعداد یال‌ها در تعداد رأس‌ها، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

نکته: در هر منشور، داریم:

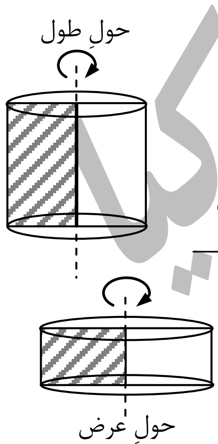
ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم

توجه: در منشورهای مایل، ارتفاع، فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی است که قاعده‌های شکل روی آن قرار دارند:

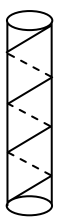


نکته: اگر یک مستطیل را یک بارحول طول آن و بار دیگر حول عرضش دوران دهیم، استوانه به وجود می‌آید. داریم:



$$\frac{\text{عرض مستطیل}}{\text{طول مستطیل}} = \frac{\text{حجم استوانه از دوران حول طول}}{\text{حجم استونه از دوران حول عرض}}$$

سؤال ۱: در شکل زیر، یک گیاه دقیقاً ۵ دور با شیب ثابت دور میله‌ای به ارتفاع 1m و محیط 15cm پیچیده است. طول ساقه‌ی گیاه چقدر است؟



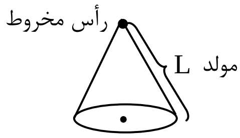
۱) ۰/۷۵ متر

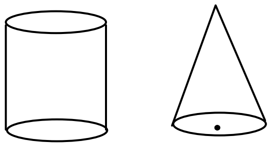
۲) ۱ متر

۳) ۱/۲۵ متر

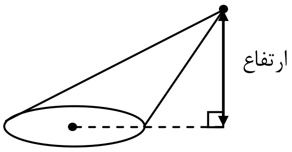
۴) ۱/۵ متر

مخروط



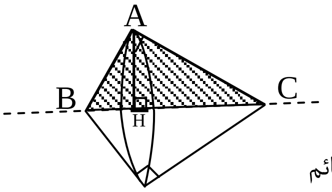


نکته: هرگاه قاعده‌ی یک مخروط با قاعده‌ی یک استوانه و هم‌چنین ارتفاع مخروط با ارتفاع استوانه برابر باشد، در این صورت حجم مخروط، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است. پس $V=\frac{1}{3}S\cdot h$



نکته: در مخروط مایل، ارتفاع، فاصله‌ی ردس مخروط از صفحه‌ی قاعده است.

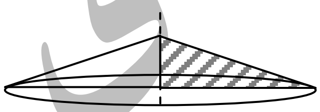
نکته: از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش، دو مخروط به‌دست می‌آید که از قاعده به یکدیگر چسبیده‌اند که حجم کلِ آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



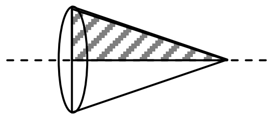
$$V_{\text{کل}}=\frac{1}{3}\pi\times\overline{AH}^{2}\times\overline{BC} \quad , \quad \overline{AH}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

دوران حول ضلع کوچک قائم

نکته: نسبت حجم مخروط‌های به‌دست آمده از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول اضلاع قائم آن برابر است با:



دوران حول ضلع کوچک قائم

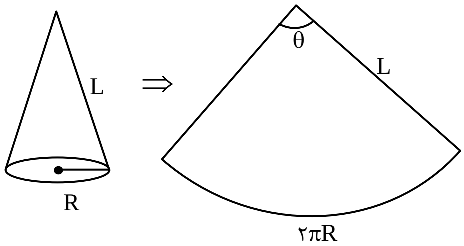


دوران حول ضلع بزرگ قائم

$$\frac{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم کوچک}}{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم بزرگ}}=\frac{\text{ضلع بزرگ قائم}}{\text{ضلع کوچک قائم}}$$

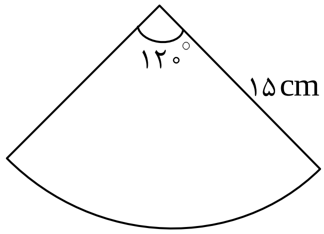
نکته: حجم حاصل از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a حول یک ضلع آن برابر است با: $V=\frac{\pi}{4}a^{3}$

نکته: از گسترده کردن یک مخروط قائم به شعاع R و طول مولد L، قطاعِ یک دایره به شعاع L حاصل می‌شود. اگر θ زاویه‌ی این قطاع باشد، داریم:



$$\Rightarrow \frac{R}{L}=\frac{\theta}{360}$$

سؤال ۲: حجم مخروطی که اگر سطح جانبی آن را باز کنیم، قطاعی ۱۲۰° به شعاع ۱۵ سانتی‌متر به‌دست می‌آید، چند سانتی‌مترمکعب است؟



۱) $\frac{۲۵۰\sqrt{۳}}{۲}\pi$

۲) $\frac{۱۵۰\sqrt{۳}}{۲}\pi$

۳) $\frac{۱۵۰\sqrt{۲}}{۳}\pi$

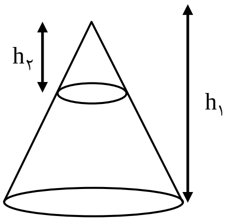
۴) $\frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۳}\pi$

نکته: مساحت جانبی و مساحت کل هر مخروط به شعاع قاعده‌ی R و مولد L برابر است با:

مساحت جانبی مخروط $= \pi RL$

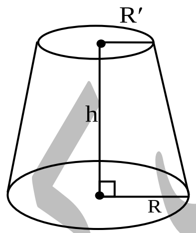
مساحت کل مخروط $= \pi RL + \pi R^{۲} = \pi R(L+R)$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی مخروطی، یک برش بزنیم، نسبت حجم مخروطِ کوچک به حجم مخروط اولیه برابر با مکعبِ نسبت ارتفاع آن‌ها است:



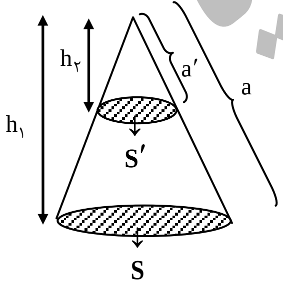
$$\frac{V_{\text{کوچک}}}{V_{\text{کل}}} = \left(\frac{h_۲}{h_۱}\right)^{۳}$$

نکته: حجم مخروط ناقص از رابطه ی زیر به‌دست می‌آید:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi h(R^{۲} + R'^{۲} + RR')$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی مخروطی، بر آن برش بزنیم، رابطه‌های زیر برقرار می‌شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{R'}{R} = \frac{h_۲}{h_۱}$$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{۲} = \left(\frac{R'}{R}\right)^{۲} = \left(\frac{h_۲}{h_۱}\right)^{۲}$$

سؤال ۳: مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه که موازی قاعده‌اش است، به سه شکل هم‌حجم بریده‌ایم. مخروط در چه ارتفاع‌هایی بریده شده است؟

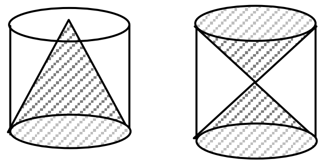
۱) $۱, ۲$

۲) $۳-\sqrt[۳]{۹}, ۳-\sqrt[۳]{۱۸}$

۳) $\sqrt[۳]{۶}, \sqrt[۳]{۳}$

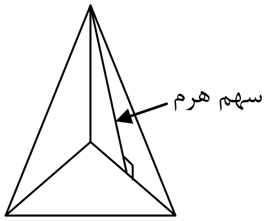
۴) $\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}, \frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}$

سؤال ۴: دو استوانه‌ی شکل زیر هم‌اندازه‌اند حجم مخروط محاط در استوانه‌ی سمت چپ را بـا V و حجـم دو مخروط سمت راست را با W نمایش می‌دهیم. چه رابطه ای بین V و W برقرار است؟



۱) $V > W$
۲) $V < W$
۳) $V = W$
۴) هر یک از ۳ حالت فوق می‌تواند برقرار باشد.

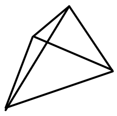
هرم

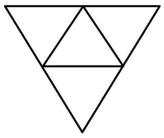


سهم هرم: ارتفاع هر وجه جانبی از هرم را سهم می‌گویند.

هرم منتظم: هـرمی اسـت که قاعده‌ی آن چندضلعی منتظم باشـد و پای ارتفاع آن، مرکز قاعده باشد. در هرم منتظم، وجه‌های جانبی، مثلثِ متساوی‌الساقین هستند.

چهاروجهی منتظم: هرمی است که هر ۴ وجه آن مثلثِ متساوی‌الاضلاع است. گسترده‌ی آن به شکل مقابل است:

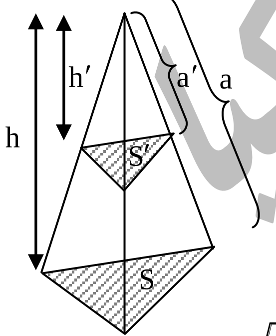




نکته: در این هرم (۴وجهی منتظم) به یالِ a داریم:

ارتفاع هرم $= \sqrt{\frac{۲}{۳}}a$ حجم هرم $= \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}a^{۳}$ مساحت کل هرم $= \sqrt{۳}a^{۲}$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی یک هرم، بر آن برش ایجاد کنیم، رابطه‌های زیر در آن برقرار می‌شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}$$

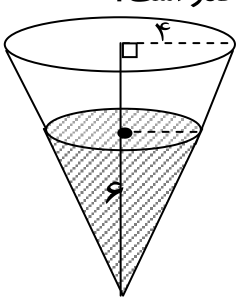
$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{۲} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{۲}$$

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{۳} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{۳}$$

نکته: در هر چهاروجهی منتظم به اندازه‌ی یال a، همواره داریم:

شعاع کره‌ی محاطی $r = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}a$ شعاع کره‌ی محیطی $R = \frac{\sqrt{۶}}{۴}a$

سؤال ۵: درون مخروطی بـه ارتفـاع ۸ واحـد، مقـداری آب بـه ارتفـاع ۶ وجـود دارد. اگـر سـنگی درون آن بیاندازیم، آب آن‌قدر بالا می‌آید که مخروط کاملاً پر می‌شود. حجم سنگ برحسب π چه‌قدر است؟



۱) ۱۸π ۲) $\frac{۷۴\pi}{۳}$

۳) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲\pi}{۳}$

کره:

نکته: حجم کره با قطر D: $\frac{\pi}{6}D^3$

نکته: مکعب به یالِ a را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

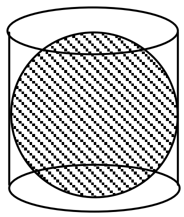
شعاع کره‌ی محاطی $r=\frac{1}{2}a$ شعاع کره‌ی محیطی $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

نکته: اگر S مساحت کره به شعاع R باشد، داریم:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

نکته: نسبت حجم به مساحت هر کره برابر است با ثلثِ شعاعِ کره: $\frac{V}{S}=\frac{R}{3}$

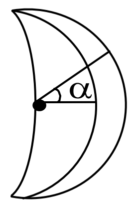
نکته: حجم کره‌ی محاط شده درون یک استوانه، همواره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.



سؤال ۶: ارتفاع و قطر قاعده‌ی یک مخروط قائم $12\,\mathrm{cm}$ است. مخروط را پر از آب کرده و کره‌ای را تا حد ممکن در مخروط فرو می‌بریم. دقیقاً نصف کره خارج از آب می‌ماند. پس از خارج کردن کره، تقریباً چند سانتی‌مترمکعب آب داخل مخروط باقی می‌ماند؟

۱) 50π ۲) 40π ۳) 35π ۴) 30π

نکته: حجم و مساحت قاچ کروی:



قاچ کروی $V=\frac{\alpha}{360}\times\frac{4}{3}\pi R^3$

پوسته‌ی قاچ کروی $S=\frac{\alpha}{360}\times 4\pi R^2$

کل قاچ کروی $S=\frac{\alpha}{360}\times 4\pi R^2+\pi R^2=\left(\frac{\alpha}{90}+1\right)\pi R^2$

سؤال ۷: گنجایش یک لوله‌ی بزرگ و چهار لوله‌ی کوچک برحسب مترمکعب در ساعت برابر اعدادی طبیعی هستند. گنجایش لوله‌ی بزرگ $6\,\mathrm{m^3/h}$ بیش‌تر از یک لوله‌ی کوچک است. چهار لوله‌ی کوچک با یکدیگر می‌توانند استخری را ۲ ساعت سریع‌تر از لوله‌ی بزرگ پر کنند. بزرگ‌ترین حجم ممکن برای استخر چند مترمکعب است؟

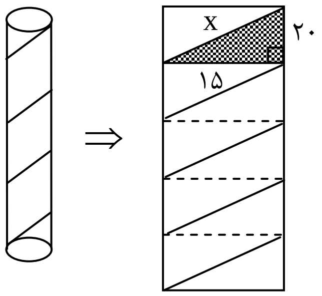
۱) ۶۴   ۲) ۷۲   ۳) ۷۸   ۴) ۸۲

سؤال ۸: نقطه‌ای به تصادف از درون یک مکعب انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این نقطه درون بزرگ‌ترین مخروط (درون این مکعب) قرار گرفته باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi}{18}$

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت ششم (حجم)

۱- گزینهٔ (۳) اگر استوانه و گیاهِ پیچیده به آن را از بالا تا پایین برش داده و آن را باز کنیم، شکل به صورت زیر می‌شود که با رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان نوشت:

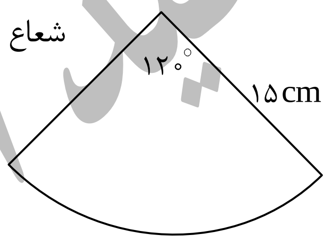


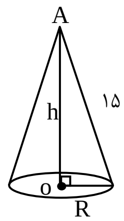
$$x^{۲}=۲۰^{۲}+۱۵^{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۴۰۰+۲۲۵}=۲۵\,cm$$

در نتیجه طول ساقه‌ی گیاه، $۱۲۵=۲۵\times۵$ سانتی‌متر است.

۲- گزینهٔ (۴)

$$\frac{R}{L}=\frac{\theta}{۳۶۰}\Rightarrow\frac{R}{۱۵}=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}\Rightarrow R=۵\,cm$$ شعاع قاعده‌ی مخروط



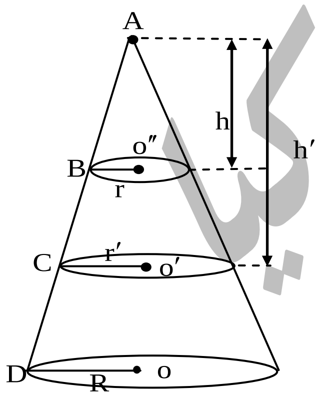


$$\overset{\Delta}{AOB}: L^{۲}=h^{۲}+R^{۲}\Rightarrow ۱۵^{۲}=h^{۲}+۵^{۲}$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{۲۰۰}=۱۰\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi\times۲۵\times۱۰\sqrt{۲}=\frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۳}\pi$$

۳- گزینهٔ (۲)



$$O''B\parallel OD\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{h}{AO}\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{h}{۳}\Rightarrow r=\frac{Rh}{۳}$$

مخروط بالایی به مرکز $V=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{Rh}{۳}\right)^{۲}\times h=\frac{۱}{۳}\times V$ مخروط کل

$$\Rightarrow\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{۱}{۹}h^{۳}R^{۲}=\frac{۱}{۳}\times\left(\frac{۱}{۳}\times\pi R^{۲}\times۳\right)\Rightarrow h=\sqrt[۳]{۹}$$

برشی که در C زده‌ایم، مخروطی ایجاد کرده است که حجم آن $\frac{۲}{۳}$ حجم کل است.

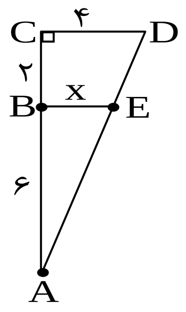
پس می‌توان نوشت:

$$\frac{r'}{R}=\frac{h'}{۳}\Rightarrow r'=\frac{Rh'}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{۱}{۹}h'^{۳}R^{۲}=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}\times۳\right)\Rightarrow h'=\sqrt[۳]{۱۸}$$

پس ارتفاع‌های برش از طرف قاعده برابرند با $۳-\sqrt[۳]{۹}$ و $۳-\sqrt[۳]{۱۸}$.

۴- گزینهٔ (۳) با هم برابرند.

۵- گزینهٔ (۲)



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{۶}{۸}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x=۳$$

حجم آب − حجم مخروط = حجم سنگ

$$=\frac{۱}{۳}\pi\overline{DC}^{۲}\times\overline{AC}-\frac{۱}{۳}\overline{BE}^{۲}\times\overline{AB}$$

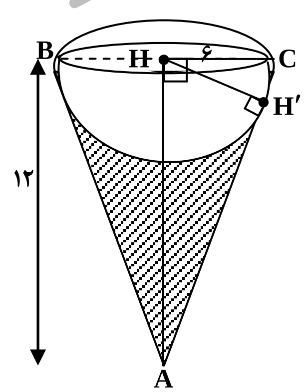
$$=\frac{۱}{۳}\pi(۴^{۲}\times ۸-۳^{۲}\times ۶)=\frac{۷۴\pi}{۳}$$

۶- گزینهٔ (۲)

$$\overset{\Delta}{AHC}:\overline{AC}^{۲}=\overline{AH}^{۲}+\overline{HC}^{۲} \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{۱۲^{۲}+۶^{۲}}=\sqrt{۱۸۰}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\overline{AH}\times\overline{HC}=\overline{HH'}\times\overline{AC} \Rightarrow \overline{HH'}=\frac{۶\times ۱۲}{\sqrt{۱۸۰}}$$ شعاع نیم‌کره

پس می‌توان نوشت:



$$V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{۲}{۳}\pi\left(\frac{۶\times ۱۲}{\sqrt{۱۸۰}}\right)^{۳} \Rightarrow V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{۱۱۵۲}{۵\sqrt{۵}}\pi$$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi\times ۶^{۲}\times ۱۲=۱۴۴\pi$$

$$V_{\text{آب باقی‌مانده}}=۱۴۴\pi-\underbrace{\frac{۱۱۵۲}{۵\sqrt{۵}}\pi}_{۱۰۴\pi}\simeq ۴۰\pi$$

۷- گزینهٔ (۲)　اگر ظرفیت لوله‌ی کوچک، a باشد، پس ظرفیت لوله‌ی بزرگ $a+۶$ است. اگر لوله‌های کوچک در مدت زمان x ساعت استخر را پر کنند، پس لوله‌ی بزرگ در $x+۲$ ساعت استخر را پر می‌کند.
اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، داریم:

$$V=۴a\times x=(a+۶)(x+۲) \Rightarrow ۴ax=ax+۲a+۶x+۱۲$$

$$\Rightarrow ۳ax-۲a-۶x-۱۲=۰ \Rightarrow (a-۲)(۳x-۲)-۱۶=۰ \Rightarrow (a-۲)(۳x-۲)=۱۶$$

اکنون مسأله ۵ حالت دارد که آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$a-۲=۱ \Rightarrow ۳x-۲=۱۶ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow V=۴\times ۳\times ۶=۷۲$$

$$a-۲=۲ \Rightarrow ۳x-۲=۸ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow V=۴\times ۴\times\frac{۱۰}{۳}=\frac{۱۶۰}{۳}\simeq ۵۳/۳$$

$$a-۲=۴ \Rightarrow ۳x-۲=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow V=۴\times ۶\times ۲=۴۸$$

$$a-۲=۸ \Rightarrow ۳x-۲=۲ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳} \Rightarrow V=۴\times ۱۰\times\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶۰}{۳}\simeq ۵۳/۳$$

$$a-۲=۱۶ \Rightarrow ۳x-۲=۱ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow V=۴\times ۱۸\times ۱=۷۲$$

با بررسی ۵ حالت نوشته شده، مشخص است که بزرگ‌ترین حجم ممکن برای استخر ۷۲ واحد است.

۸- گزینهٔ (۲)   اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم، حجم آن a^3 می‌شود. از طرفی ارتفاع مخروط نیز a و شعاع قاعده‌ی مخروط، $\frac{a}{2}$ است. داریم:

$$P(A)=\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{مکعب}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times a}{a^3}=\frac{\frac{a^3\pi}{12}}{a^3}=\frac{\pi}{12}$$