فصل ۸

فصل هشتم : حجم و مساحت

کره یک سطح دوار است که از دوران یک نیم کره حول قطرش پدید می آید. مقطع هر صفحه با کره یک دایره است. اگر فاصله ی مرکز کره از صفحه X و شعاع کره R باشد شعاع دایره ی مقطع کره برابر است با :

$$r = \sqrt{R^۲ - X^۲}$$

حجم کره به شعاع R برابر است با : $V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

مساحت کره به شعاع R برابر است با : $S = ۴\pi R^۲$

نکته : اگر طول اضلاع یک مکعب مستطیل a , b ,c باشد قطر مکعب برابر است با : $\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

نکته : مکعب مستطیل دارای ۴ قطر متساوی است که در یک نقطه هم راسند.

نکته : مساحت جانبی مکعب مستطیل برابر است با ۲ab(b+c)

نکته : مساحت کل مکعب مستطیل برابر است با : ۲(ab+ac+bc)

نکته : با وصل کردن همه ی راس های مکعب مستطیل به یکدیگر ۲۸ پاره خط ایجاد می شود که شامل ۱۲ یال و ۱۲ قطر وجه جانبی و ۴ قطر است

نکته :هر یال مکعب مستطیل با ۴ یال موازی و بر ۸ یال دیگر عمود است.

نکته : مکعب دارای ۴ قطر مساوی به اندازه ی $a\sqrt{۳}$ است که در یک نقطه هم راسند. فاصله ی این نقطه از همه ی رئوس $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و فاصله ی آن از همه ی وجوه $\frac{a}{۲}$ است.

نکته : هر قطر مکعب با همه ی یالهای آن زوایای مساوی می سازند .

نکته : اندازه ی تصویر هر یال روی قطر متناظرش $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ طول یال است.

نکته : اندازه ی تصویر هر قطر روی قطر متناظرش $\frac{۱}{۳}$ طول قطر است.

نکته : هر قطر وجه جانبی در مکعب $a\sqrt{۲}$ پس مساحت صفحه ی قطری مکعب $a^۲\sqrt{۲}$

مثال : اگر بر وسط یال گذرا بر یک راس مکعب یک صفحه بگذرانیم مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

اگر قاعده های یک منشور دو متوازی الاضلاع هم نهشت باشند به آن متوازی السطوح گفته می شود.

مجموع مساحت های وجه های جانبی را مساحت جانبی و مجموع مساحت های جانبی و مساحت دو قاعده منشور را مساحت کل می نامند.

مساحت جانبی منشور قائم برابر است با حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع

حجم منشور قائم برابر است با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع

مساحت جانبی استوانه $۲\pi rh$ و مساحت کل آن برابر است با : $۲\pi r(r+h)$

مثال : حجم استوانه دواری به ارتفاع ۳ برابر ۱۲π است . مساحت جانبی آن کدام است ؟

$$V = \pi r^۲ h = \pi r^۲ \times ۳ = ۱۲\pi \Rightarrow r = ۲ \quad \text{مساحت جانبی} = ۲\pi rh = ۲\pi \times ۲ \times ۳ = ۱۲\pi$$

نکته : حجم هرم با مساحت قاعده ی S و ارتفاع h برابر است با : $V = \frac{۱}{۳} Sh$

نکته : مساحت جانبی هرم برابر است با مجموع مساحت های مثلث های جانبی

نکته : مساحت کل هرم برابر است با مساحت جانبی به علاوه ی مساحت قاعده

هرم منتظم : اگر قاعده های یک هرم چند ضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد آن را هرم منتظم می گویند . وجوه جانبی هرم منتظم مثلث متساوی الساقین هستند.ارتفاع یکی از این مثلث ها را سهم هرم می نامند. اندازه ی سهم از رابطه ی فیثاغورس به دست ما آید.

نکاتی در مورد چهار وجهی منتظم :

همه ی وجه های چهار وجهی منتظم مثلث متساوی الاضلاع هستند . اگر اندازه ی هر یال چهار وجهی منتظم را a در نظر بگیریم :

الف) چهار وجهی دارای چهار ارتفاع مساوی به اندازه $\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$

ب) حجم این چهار وجهی $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$ و مساحت جانبی آن $\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و مساحت کل آن $a^۲\sqrt{۳}$ است.

هرم ناقص منتظم :

هرم ناقصی که دو قاعده اش دو چند ضلعی منتظم باشد و پاره خط واصل بین مراکز دو قاعده ارتفاع باشد هرم ناقص منتظم نامیده می شود. وجوه جانبی هرم ناقص ذوزنقه ی متساوی الساقین مساوی هستند و ارتفاع یکی از این ذوزنقه ها سهم هرم ناقص است.

اگر V حجم و S , $\acute{S}$ مساحت دو قاعده و h ارتفاع یک هرم ناقص باشد داریم : $V = \frac{۱}{۳} h\left(S + \acute{S} + \sqrt{S\acute{S}}\right)$

چند نکته در مورد هرم :

نسبت مساحت مقطع موازی با قاعده های هرم به مساحت قاعده ی هرم برابر است با مربع نسبت فواصل راس هرم از آن مقطع و قاعده

نسبت حجم متناظر مقطع موازی با قاعده های هرم به حجم هرم برابر است با مکعب نسبت فواصل راس هرم از آن مقطع و قاعده

حجم هرمی که طول سه یال آن a,b,c باشد $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی السطوحی است که سه یال هم راس آن a,b,c است.

نکته : مساحت جانبی مخروط با مولد L برابر است با : $S = \pi RL$

نکته : از دوران ذوزنقه ی قائم الزاویه حول ساق قائمش مخروط ناقص به دست می آید.