بِسمِ اللّه الرَّحمن الرَّحیم

جزوهٔ آموزشی ریاضی نهم – فصل هفتم

(مطابق با فعالیت ها و تمرین های کتاب درسی)

گردآورنده: معلّم وظیفه حسین صباغی آب باریکی

تقدیم به تمامی دانش آموزان خوب استان محروم خراسان شمالی به ویژه دانش آموزان شهرستان مانه و سملقان که به علل مختلف فرصت خواندن کل کتاب را ندارند.

۱. دانش آموزان گرامی این جزوه عاری از هرگونه توضیحات اضافی و ناضرور است، لذا تمام قسمت ها را به دقت مطالعه کنید.(قسمت ضمیمه برای مطالعه بیشتر است.)

۲. لطفا قبل از شروع به مطالعه این جزوه، فصل پنجم کتاب درسی به ویژه اتحادها و تجزیه عبارت های جبری را فراگرفته و سپس شروع به مطالعه کنید.

۳. پاسخ مثال ها با رنگ قرمز نوشته شده است.

۴. لطفا با در میان گذاشتن انتقادات یا پیشنهادات خود، ما را در بهبود جزوه های آموزشی یاری دهید.

Email: Hosein.sabbaghi7@gmail.com

Telegram id: @Hosein_Sabbaghi

بهار ۹۸

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت های گویا

عبارت گویا: عبارت گویا عبارتی کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد. (مثال: $\frac{\sqrt{5}x}{2}$ و $\frac{x}{x+y}$ و $\frac{1}{x}$ و ...)

تذکر۱: عبارت هایی که متغیر آنها زیر رادیکال، داخل قدرمطلق یا در توان باشد، عبارت های گویا نیستند.

مثال۱: گویا بودن و نبودن هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

$\sqrt{2}xy$	$\frac{\lvert 2x-y\rvert}{z}$	$\frac{x-3z^2}{2xy-x^3}$	$\frac{4-\sqrt{x}}{3x}$	$\frac{x^y}{2x-y^2}$	x^2+y^2
گویا	گویا نیست	گویا	گویا نیست	گویا نیست	گویا

نکته۱: در عبارت های رادیکالی در صورت امکان ابتدا ریشه گیری کرده و سپس گویا بودن یا نبودن عبارت مورد نظر را بررسی کنید.

مثال۲: $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ گویا نیست(متغیر داخل قدر مطلق است.) اما عبارت $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{1}{x}$ عبارتی گویاست.

عبارت های گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می کنند تعریف نشده اند لذا برای تعیین همهٔ مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف شده باشد باید مقادیری را که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود را پیدا کرده و کنار بگذاریم.

مثال۳: عبارت گویای $\frac{7x^2}{(x-1)(x+1)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

برای پاسخ به این سوال ابتدا مخرج کسر را برابر صفر قرار می دهیم. یعنی: $(x-1)(x+1)=0$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت صفر می شود که حداقل یکی از آنها صفر شود لذا:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-1$ تعریف نشده است.

مثال۴: الف) عبارت گویای $\frac{8x+5}{2}$ به ازای همهٔ مقادیر تعریف شده است. زیرا مخرج کسر برابر صفر نمی شود.

ب) $\frac{x}{x^2-4}$ $\quad$ $x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2$ یا $x=-2$

لذا این عبارت به ازای تمام مقادیر به جز $x=2$ و $x=-2$ تعریف شده است.

ج) $\frac{x-4}{x^2-4x}$ $\qquad x^2-4x=0 \Longrightarrow x(x-4)=0 \Longrightarrow x=0$ یا $x=4$

لذا این عبارت به ازای تمام مقادیر به جز $x=0$ و $x=4$ تعریف شده است.

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

مخرج این کسر هیچ وقت برابر صفر نمی شود و همواره مثبت است زیرا هر عددی به توان ۲ برسد و با ۴ جمع شود همیشه بزرگتر از ۰ می شود و بنابراین این عبارت گویا به ازای همهٔ مقادیر تعریف شده است.

ساده کردن عبارت های گویا: همان گونه که برای ساده کردن اعداد گویا، صورت و مخرج را به صورت حاصل ضرب چند عدد نوشته و با هم ساده می کنیم ($\frac{36}{48}=\frac{3\times12}{4\times12}=\frac{3}{4}$) برای ساده کردن عبارت های گویا نیز صورت و مخرج کسر را به صورت حاصل ضرب چند عبارت جبری نوشته (با استفاده از فاکتورگیری، اتحادها یا ...) و سپس باهم ساده می کنیم.

مثال۵: عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{18y^3}{60y^5}=\frac{3\times\cancel{6}\times\cancel{y^3}}{10\times\cancel{6}\times\cancel{y^3}\times y^2}=\frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x}$ $(x\neq -2$ و $x\neq 0)$

نکته۲: در ساده کردن عبارت های گویا اگر صورت و مخرج برابر باشند حاصل ۱ و اگر صورت و مخرج قرینهٔ یکدیگر باشند حاصل ۱- می شود. (مثال: $\frac{b-5}{5-b}=\frac{b-5}{-(b-5)}=-1$ و $\frac{x+1}{x+1}=1$).

درس دوم: محاسبات عبارت های گویا

عبارت های گویا را می توان مانند اعداد گویا با یکدیگر جمع، تفرق، ضرب و تقسیم کرد.

ضرب عبارت های گویا: برای ضرب عبارت های گویا صورت کسرها را در هم و مخرج کسرها را در هم ضرب می کنیم.(قبل از ضرب کردن می توان صورت و مخرج عبارت های گویا را باهم ساده کرد.)

مثال۱: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5xy^3}{8x^2z^2}\times\frac{16z^3}{15y^2}=\frac{2yz}{3x}$

ب) $\dfrac{x-6}{x^2-12x+36}\times\dfrac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12}=\dfrac{x-6}{(x-6)(x-6)}\times\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\dfrac{1}{x+4}$

تقسیم عبارت های گویا: برای تقسیم عبارت های گویا ابتدا آنها را به ضرب تبدیل کرده، سپس ضرب عبارت های گویا را انجام می دهیم.(برای این منظور کسر اول را نوشته و در معکوس کسر دوم ضرب می کنیم.)

مثال۲: تقسیم عبارت گویای زیر را انجام دهید.

$$\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\div\frac{a^2+3a+2}{a-4}=\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\times\frac{a-4}{a^2+3a+2}$$

$$=\frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)}\times\frac{a-4}{(a+1)(a+2)}=\frac{a-5}{a(a+2)}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا: برای جمع و تفریق عبارت های گویا همانند جمع و تفریق اعداد گویا مخرج مشترک گرفته (ک.م.م مخرج ها) سپس جمع و تفریق را انجام می دهیم.

توجه: در عبارت های گویا برای مخرج مشترک گرفتن، یکی از عبارت هایی که بین تمام مخرج ها مشترک است را نوشته و در عبارت های غیر مشترک مخرج ها ضرب می کنیم و عبارت حاصل را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

مثال۳: جمع و تفریق های زیر را انجام دهید.

الف) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$

ب) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$

ج) $\dfrac{a^2-20}{a^2-4}+\dfrac{a-2}{a+2}=\dfrac{a^2-20}{(a-2)(a+2)}+\dfrac{a-2}{a+2}=\dfrac{a^2-20+(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)}$

$$=\frac{a^2-20+a^2-4}{a^2-4}=\frac{2a^2-24}{a^2-4}$$

د) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{2x+8-x^2-x+2}{x^2+6x+8}=\dfrac{-x^2+x+10}{x^2+6x+8}$

ساده کردن عبارت های مرکب: برای ساده کردن عبارت های مرکب، صورت و مخرج را جداگانه ساده کرده، سپس آنها را بر هم تقسیم می کنیم.(البته در بعضی موارد می توان از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب ضرب کرده و سپس کسر را ساده کنیم.)

مثال۴: عبارت زیر را ساده کنید.

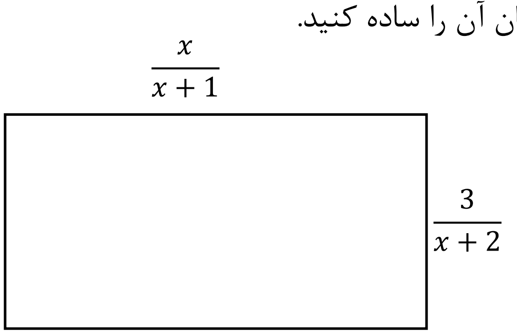
$$\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{x^2-x-6}{x^2}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2}}=\frac{x^2-x-6}{x^2}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-x-6}{x^2}\times\frac{x^2}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)}=\frac{(x+2)}{(x-1)}$$

راه حلی دیگر: می توان از همان ابتدا صورت و مخرج کسر را در x^2 ضرب کرد و سپس عبارت را ساده کرد.

$$\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)}=\frac{(x+2)}{(x-1)}$$

مثال۵: محیط و مساحت شکل زیر را برحسب x به دست آورید و تا حد امکان آن را ساده کنید.



$$\mathbf{P}=2\left(\frac{x}{x+1}+\frac{3}{x+2}\right)=2\left(\frac{x(x+2)+3(x+1)}{(x+1)(x+2)}\right)=2\left(\frac{x^2+2x+3x+3}{(x+1)(x+2)}\right)=\frac{2x^2+10x+6}{x^2+3x+2}$$

$$\mathbf{S}=\frac{x}{x+1}\times\frac{3}{x+2}=\frac{3x}{x^2+3x+2}$$

درس سوم: تقسیم چند جمله ای ها:

الف) تقسیم تک جمله ای بر تک جمله ای: در این نوع تقسیم در صورت امکان ضرایب را باهم و متغیرها را باهم ساده کرده و حاصل را می نویسیم.

مثال۱: عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{14x^5y}{2x^2y^2}=\frac{7x^3}{y}$　　　　ب) $\frac{-18a^2xz^3}{27x^6z}=\frac{-2a^2z^3}{3x^5}$

ب) تقسیم چند جمله ای بر تک جمله ای: برای تقسیم چند جمله ای بر تک جمله ای تک تک جملات صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم(مشابه حالت الف).

مثال۲: عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{2a^4+5a^3-8a}{4a^2}=\frac{2a^4}{4a^2}+\frac{5a^3}{4a^2}-\frac{8a}{4a^2}=\frac{a^2}{2}+\frac{5a}{4}-\frac{2}{a}$

ب) $(8y^3-4y^2+12y)\div(-4y^2)=\frac{8y^3}{-4y^2}-\frac{4y^2}{-4y^2}+\frac{12y}{-4y^2}=-2y+1-\frac{3}{y}$

ج) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای: برای تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای همانند تقسیم اعداد عمل می کنیم. برای این منظور مراحل زیر را به ترتیب انجام دهید:

۱. ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد، یعنی از بیشترین توان به کمترین توان(توان های نزولی) بنویسید.

۲. اولین جملهٔ مقسوم را بر اولین جملهٔ مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت بنویسید.

۳. خارج قسمت را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را زیر مقسوم نوشته و از آن کم کنید.

۴. برای باقیماندهٔ به دست آمده از مرحلهٔ ۳ مراحل ۲ و ۳ را تکرار کنید.(توجه کنید که این تکرار را تا جایی ادامه دهید که درجهٔ باقیمانده از درجهٔ مقسوم علیه کمتر شود.)

مثال۳: تقسیم های زیر را انجام داده و خارج قسمت و باقیمانده را به دست آورید.

الف) $2x^2-7x-15 \;\big|\; x-5$　　　　ب) $(-x^3-12+8x)\div(x+6)$

در قسمت (الف) چون مقسوم و مقسوم علیه به شکل استاندارد داده شده، تقسیم را انجام می دهیم اما برای حل قسمت (ب) ابتدا مقسوم را به شکل استاندارد(توان های نزولی) نوشته سپس تقسیم را حل می کنیم.

مقسوم

مقسوم علیه

$$\begin{array}{r|l} \boxed{2x^2-7x-15} & x-5 \\ -(2x^2-10x) & \boxed{2x+3} \\ \hline 3x-15 & \\ -(3x-15) & \\ \hline \boxed{0} & \end{array}$$

خارج قسمت

باقیمانده

ب)

$$\begin{array}{r|l} -x^3+8x-12 & x+6 \\ \hline -(-x^3-6x^2) & -x^2+6x-28 \\ \hline 6x^2+8x-12 & \\ -(6x^2+36x) & \\ \hline -28x-12 & \\ -(-28x-168) & \\ \hline 156 & \end{array}$$

توجه: در تقسیم $2x^2-7x-15$ بر $x-5$ رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$2x^2-7x-15=(x-5)(2x+3)+0$$

و در تقسیم $-x^3+8x-12$ بر $x+6$ رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$-x^3+8x-12=(x+6)(-x^2+6x-28)+156$$

تذکر۱: اگر در تقسیم، باقیمانده صفر شود(مانند قسمت الف مثال۳) می گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

مثال۴: اگر چند جمله ای $20x^2+23x^2-10x+a$ بر $4x+3$ بخش پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.

$$\begin{array}{r|l} 20x^3+23x^2-10x+a & 4x+3 \\ \hline -(20x^3+15x^2) & 5x^2+2x-4 \\ \hline 8x^2-10x+a & \\ -(8x^2+6x) & \\ \hline -16x+a & \\ -(-16x-12) & \\ \hline a+12 & \end{array}$$

حال برای اینکه چند جمله ای $20x^2+23x^2-10x+a$ بر $4x+3$ بخش پذیر باشد، باید باقیمانده برابر صفر شود یعنی $a+12=0$ که این نتیجه می دهد $a=-12$.

ضمیمه:

در هنگام ساده کردن عبارت های جبری دقت کنید که اعدادی که مخرج کسر را صفر می کنند باید کنار گذاشته شوند تا تساوی همیشه برقرار باشد به عنوان مثال تساوی $\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ همواره برقرار است اگر $x \neq -2$ و $x \neq 2$. زیرا اگر $x=2$ باشد $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ تعریف نشده است ولی $\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{1}{2}$ و تعریف شده است. بنابراین نوشتن شرط $x \neq 2$ ضروری است. همچنین اگر $x=-2$ باشد هر دو عبارت $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ و $\frac{(x-1)}{(x+2)}$ تعریف نشده اند، لذا نوشتن شرط $x \neq -2$ نیز لازم است. (اما نوشتن این شرط به ضرورت شرط قبل نیست چرا که این شرط در هردو عبارت گویا واضح است.) بنابراین باید نوشت:

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-1)}{(x+2)} \quad (x \neq 2 \text{ و } x \neq -2)$$

مثال۱: لیلا عبارتی گویا را ساده کرده و این گونه نوشته است: $\frac{x-1}{x+2}$. می دانیم که لیلا این پاسخ را به درستی نوشته است. کدام یک از عبارت های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) عبارتی که لیلا ساده کرده می تواند $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$ باشد.

ب) عبارتی که لیلا ساده کرده می تواند $\frac{a-x}{-ax-2a}$ باشد.

برای پاسخ به این سوال ابتدا مشخص می کنیم که عبارت های داده شده در قسمت های (الف) و (ب) به ازای چه اعدادی تعریف نشده اند.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4} \quad x^2+4x+4=0 \Longrightarrow (x+2)^2=0 \Longrightarrow x=-2$$

لذا این عبارت زمانی تعریف نشده است که $x=-2$ باشد و بنابراین قسمت (الف) درست است زیرا زمانی که $x=-2$ باشد $\frac{x-1}{x+2}$ نیز تعریف نشده است و نوشتن شرط $x \neq -2$ چندان ضروری نیست.

اما در قسمت (ب) داریم:

$$\frac{a-x}{-ax-2a} \quad -ax-2a=0 \Longrightarrow a=0 \text{ یا } x=-2$$

لذا این عبارت زمانی که $x=-2$ یا $a=0$ باشد، تعریف نشده است ولی عبارت $\frac{x-1}{x+2}$ زمانی که $a=0$ باشد تعریف شده است. بنابراین قسمت (ب) نادرست است چون شرط $a \neq 0$ که شرطی ضروری است، قید نشده.

مثال۲: بدون انجام عملیات تقسیم، باقیماندهٔ x^5+20 بر $x-2$ را به دست آورید.

برای پاسخ به این سوال ابتدا رابطهٔ تقسیم را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^5+20=(x-2)Q(x)+R(x)$$

که در آن $Q(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقیمانده است.

چون مقسوم علیه یعنی $(x-2)$ از درجهٔ یک است لذا باقیمانده باید از درجهٔ صفر، یعنی عددی حقیقی باشد. بنابراین باقیمانده را می توان یک عدد حقیقی مانند a در نظر گرفت، بنابراین:

$$x^5+20=(x-2)Q(x)+a$$

حال با قرار دادن $x=2$ در این تساوی داریم:

$$x^5+20=(x-2)Q(x)+a \overset{x=2}{\Longrightarrow} 2^5+20=\cancelto{0}{(2-2)Q(x)}+a \Longrightarrow a=52$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم x^5+20 بر $x-2$ برابر ۵۲ است.

تمرین: بدون انجام عملیات تقسیم، باقیماندهٔ x^5+x^4-10 بر $(x-1)(x-3)$ را به دست آورید.