بسمه تعالی

جزوه فصل ۶

معادله خط

ریاضی نهم

خط و معادله ی خط

در این فصل شما باید بتوانید :

۱- معادله ی خط را با استفاده از اطلاعاتی که مسئله داده بنویسید .

۲ – خطی را که معادله ی آن داده شده است را رسم کنید .

۳- تعیین کنید که آیا نقطه ای روی خطی که معادله ی آن داده شده است قرار می گیرد ؟

نوشتن معادله ی خط

ابتدا لازم است به معنی معادله بیشتر توجه کنیم .

معادله در واقع به رابطه ها می پردازد ، مثلاً وقتی می گوییم معادله ۱۴=۷ +x ، یعنی رابطه ای بین ۱۴ و x وجود دارد . این رابطه می گوید اگر به x هفت واحد اضافه کنیم به ۱۴ می رسیم .

وقتی می گوییم وزن احمد دو برابر وزن علی است یعنی رابطه ی وزن ها ۲ به ۱ است که می توان نوشت :

وزن ۲ تا علی =وزن احمد ، اگر وزن احمد y و وزن علی x باشد معادله به صورت : $y = ۲ x$ نوشته می شود .

بنابراین برای نوشتن معادله ی خط باید رابطه ی بین x و y را پیدا کنیم . به مثال های زیر توجه کنید .

مثال :در نیمساز ربع اول و سوم همیشه عرض نقاط برابر طول آن نقاط است . y=x

مثال : اگر به ۲برابر طول نقطه ای ۱ واحد اضافه کنیم ، عرض نقطه بدست می آید . $y = ۲ x + ۱$

مثال :در فعالیت ص۹۶ مطلب بالا را بیان کرده است یعنی بین مسافت طی شده (y) توسط دوچرخه سوار و زمان سپری شده (x) رابطه ای وجود دارد . $y = ۲ x$

زمان x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

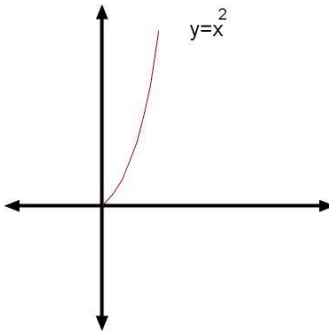
نکته : سرعت ثابت دوچرخه باعث می شود تمام نقاط جدول بالا روی یک خط راست قرار گیرند .

مثال : در کار در کلاس ص ۹۷ یک مثال را در دو حالت بررسی کرده است .

در قسمت اول رابطه ی بین ضلع مربع (x) و محیط مربع (y) را بیان کرده است . می دانیم که محیط مربع همیشه ۴ برابر اندازه ی یک ضلعش است . پس معادله ی آن به صورت : $y = ۴x$ است .

نکته : تمام نقاط سئوال ۱ روی یک خط راست قرار می گیرند .

در قسمت دوم رابطه ی بین مساحت مربع (y) و ضلع مربع (x) را مطرح کرده است . می دانیم مساحت هر مربعی برابر است با مجذور اندازه ی یک ضلعش . پس معادله بصورت : $y = x^۲$ است .



نکته : نقاط سئوال ۲ روی منحنی قرار می گیرند .

پس برخی از معادله ها مربوط به خط راست نیستند .

y=ax صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء مختصات می گذرند . در این معادله a شیب خط نام دارد .

$y = ۴x$ معادله ی خط راستی است که از مرکز مختصات عبور می کند و شیب آن ۴ است .

$y = \frac{۴}{۵}x$ خطی است که از مرکز گذشته و شیب آن $\frac{۴}{۵}$ است .

نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم خطی است که از مرکز مختصات می گذرد و شیب آن ۱- است .معادله ی آن $y = -x$ می باشد .

نکته : برای بدست آوردن شیب ، اگر خط از مبداء می گذرد کافی است عرض نقطه ای که بر روی آن قرار دارد را بر طولش تقسیم کنیم .

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می گذرد .

چون این خط از مبداء می گذرد پس برای بدست آوردن شیب ،عرض نقطه ی دوم را بر طولش تقسیم می کنیم و سپس مقدار به دست آمده را در فرمول کلی قرار می دهیم . $a = \frac{۳}{-۱} = -۳$ و $y = -۳x$

@riazicafe

مثال : در فعالیت ص ۹۹ سئوال ۱ چون هردو خط از مبداء می گذرند پس :

معادله ی الف) y=-x و معادله ی ب) $y = \frac{۱}{۳} x$ می باشد . (برای به دست آوردن شیب (a) ،عرض نقطه را به طولش تقسیم کرده ایم .)

مثال: به ازای چه مقدار m از خط $۲(۳x - m) = ۳(x + y + ۱)$ ، این خط از مبدا مختصات می گذرد

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم تا به صورت معادله کلی در آید .

$$۶x - ۲m = ۳x + ۳y + ۳ \rightarrow ۳y = ۶x - ۲m - ۳x - ۳ \rightarrow ۳y = ۳x - ۲m - ۳ \rightarrow y = x - (\frac{۲}{۳}m + ۱)$$

سپس آنرا با معادله ی $y = ax$ مقایسه کنیم و بنا برآن داریم :

$$\frac{۲}{۳}m + ۱ = ۰ \rightarrow ۲m + ۳ = ۰ \rightarrow m = \frac{-۳}{۲}$$

گاهی اوقات خطوطی وجود دارند که از مرکز مختصات عبور نمی کنند بلکه در جاهایی دیگر محورهای yوx را قطع می کنند .

به محلی که خط محور طول ها را قطع می کند طول از مبداء و محلی که خط محور عرض ها را قطع می کند عرض از مبداء می گوییم .

$y = ax + b$ صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء نمی گذرند . در این معادله b همان عرض از مبداء است و a نیز همچنان شیب خط است .

پس با دانستن شیب و عرض از مبداء نیز می توان معادله ی خط را نوشت .

مثال : کار در کلاس ص ۱۰۳

۱- برای نوشتن شیب و عرض از مبداء هر معادله را با معادله ی کلی مقایسه می کنیم ،بنابراین :

۲ شیب و ۴- عرض از مبداء در معادله ی $y = ۲x - ۴$

$\frac{-۲}{۳}$ شیب و عرض از مبداء صفر در معادله ی $y = \frac{-۲}{۳}x$

۳- شیب و ۱ + عرض از مبداء در معادله ی $y = -۳x + ۱$

۲- در معادله ی کلی به جای شیب و عرض از مبدا ء عدد گذاری می کنیم .

الف) $y = -۲x - ۱$ ب) $y = \frac{۱}{۲}x + ۳$

نکته : دو خط موازی دارای شیب های مساوی هستند .

نکته : اگر **b** عرض از مبداء باشد مختصات عرض از مبداء را بصورت $\begin{bmatrix} \cdot \\ b \end{bmatrix}$ می نویسیم .

نکته : اگر **L** طول از مبداء باشد مختصات آن را بصورت $\begin{bmatrix} L \\ \cdot \end{bmatrix}$ می نویسیم .

ج) $y = ۲x + ۴$

۳- برای نوشتن معادله ی خطی که شیب آن داده شده ولی به جای عرض از مبداء ،مختصات نقطه ای دیگر را داده اند به ترتیب زیر عمل می کنیم :

ابتدا شیب را در معادله ی کلی جایگذاری می کنیم . $y = ax + b \rightarrow y = ۲x + b$

سپس به جای x و y مختصات نقطه را قرار می دهیم . $۲ = ۲ \times ۱ + b \rightarrow b = ۲ - ۲ = ۰$

پس معادله ی خط به صورت $y = ۲x + ۰ = ۲x$ می باشد .

نکته : برای نوشتن معادله ی خط این فرمول خیلی به ما کمک می کند : $y-y_۱ = m(x - x_۱)$ دراین معادله m شیب و y_1 و x_1 عرض و طول نقطه ی داده شده هستند .

مثال :معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و از نقطه ی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد .

حل :در معادله ی $y-y_۱ = m(x - x_۱)$ اعداد را جایگزین می کنیم و سپس عبارت را ساده می کنیم .

$$y - ۳ = ۴(x - ۲) = ۴x - ۸ \rightarrow y = ۴x - ۵$$

مثال: مقدار b چند باشد تا عرض از مبدا خط $y - b + ۵ = ۳x + ۷$ برابر ۶- شود ؟

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم : $y = ۳x + ۷ - ۵ + b = ۳x + (۲ + b)$

با مقایسه با $y = ax + b$ متوجه می شویم که : $۲ + b = -۶ \Rightarrow b = -۶ - ۲ = -۸$

برای بدست آوردن شیب خطی که از مبداء نمی گذرد ولی مختصات دو نقطه از خط را داریم کافی است اختلاف عرض ها را بر اختلاف طولها تقسیم کنیم . $A=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ شیب $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}$ می گذرد .

حل: ابتدا شیب خط را به دست می آوریم . $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{-5-2}=-\frac{2}{7}$ سپس معادله ی $y-y_1=m(x-x_1)$ را در نظر گرفته و شیب و مختصات یکی از نقاط را جایگذاری می کنیم :

$$y-y_1=m(x-x_1)\rightarrow y-3=-\frac{2}{7}(x-2)=-\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}\rightarrow y=-\frac{2}{7}x+3\frac{4}{7}$$

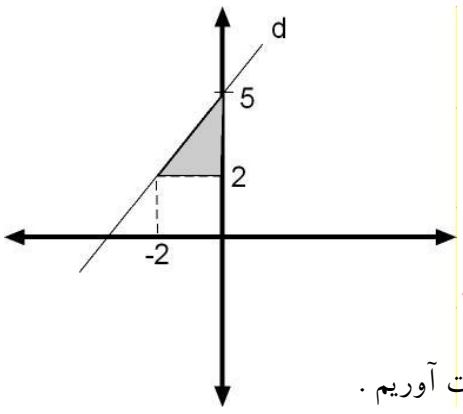
مثال : اگر شیب خطی که از دو نقطه ی $A=\begin{bmatrix}-a\\a-3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ می گذرد و با شیب خطی که محور X را در طول ۳- و محور y را در عرض ۱- قطع می کند برابر باشد ،a چقدر است؟

حل:
$$\begin{cases} m_1=\frac{2-(a-3)}{1-(-a)}=\frac{5-a}{1+a} \\ m_2=\frac{-1-0}{0-(-3)}=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{5-a}{1+a}=\frac{-1}{3}\Leftarrow m_1=m_2$$

$$a=-1-a.\Leftarrow 15-3a\leftarrow 16=2a\leftarrow a=8$$

برای اینکه بدانیم چرا برای به دست آوردن شیب باید اختلاف ها را به هم تقسیم کنیم به مثال و شکل زیر توجه کنید :



مثال : می خواهیم شیب خطی را که رسم شده است پیدا کنیم :

حل : بافرض اینکه می دانیم از تقسیم اضلاع قائم مثلث می توانیم شیب را به دست آوریم و اینکه ضلع عمودی بر ضلع افقی تقسیم شود ناچاریم که اندازه های هر ضلع را با استفاده از اختلاف عددها به دست آوریم .

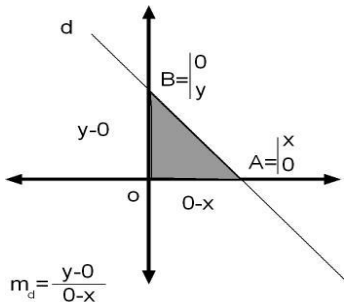
یعنی : اندازه ی ضلع قائم برابر است با ۵-۲=۳ و اندازه ی ضلع افقی برابر است با ۲-(-۲)=۰

نکته : اندازه ها همیشه به صورت قدر مطلق بیان می شوند .

بنا براین شیب این خط برابر است با $\frac{3}{2}$

@riazicafe

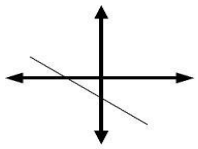
نکته : اگر خط با جهت + محور طول ها زاویه ی تند درست کند شیب مثبت دارد و اگر زاویه ی باز داشته باشد شیب منفی دارد .



مثال : تمرین ۴ ص ۱۰۷ اشاره به همین مطلب را دارد .

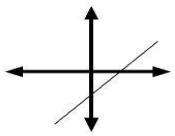
نکته : برای خطی به معادله ی $y = ax + b$ که a شیب و b عرض از مبدا است چهار حالت در صفحه در نظر می گیریم :

۱)



a<0 b<0

۲)

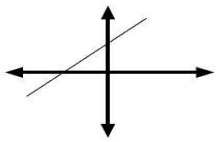


a>0 b<0

۱) خط از ناحیه ی اول نمی گذرد.

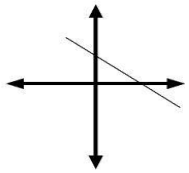
۲)خط از ناحیه ی دوم نمی گذرد.

۳)



a>0 b>0

٤)



a<0 b>0

۳) خط از ناحیه ی چهارم نمی گذرد.

۴)خط از ناحیه سوم نمی گذرد.

مثال : تمرین ۸ ص ۱۰۷ با داشتن دو نقطه ابتدا شیب را پیدا می کنیم :

. $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{-۱-۲}{۴-۳} = -\frac{۳}{۱} = -۳$ سپس از رابطه ی $y-y_۱ = m(x-x_۱)$ استفاده کرده و اعداد را جایگزین می کنیم .

$y-۲ = -۳(x-۳) = -۳x+۹ \rightarrow y = -۳x+۱۱$

صورت کلی معادله های خطی $ax+by=c$ می باشد . (توجه داشته باشید در این معادلات a و b شیب و عرض از مبداء نمی باشند .)

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ معادله ی $۴x-۲y=۸$ معادله ی یک خط راست می باشد . برای پیدا کردن شیب دو راه وجود دارد :

راه اول- معادله را طوری مرتب کنیم تا به صورت $y = ax + b$ در بیاید .

برای این کار ابتدا x را از y جدا می کنیم سپس همه ی عبارت را به ضریب y تقسیم می کنیم .

$y = ۲x - ۴ \rightarrow -۲y = -۴x + ۸ \rightarrow ۴x - ۲y = ۸$ پس شیب ۲ وعرض از مبداء ۴- است.

راه دوم- در این معادلات شیب و عرض از مبداء از رابطه های زیر به دست می آیند :

شیب $m = \frac{-a}{b}$ عرض از مبداء بنابراین $d = \frac{c}{b}$

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-۴}{-۲} = ۲$ و $d = \frac{c}{b} = \frac{۸}{-۲} = -۴$

مثال : فعالیت ۴ ص ۱۰۶ هر تمرین را با یکی از راهها حل کرده ایم .

$۳x - ۲y = ۶ \rightarrow m = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲} \quad \rightarrow d = \frac{۶}{-۲} = -۳$

$x + ۳y - ۹ = ۰ \rightarrow ۳y = -x + ۹ \rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + ۳$ پس $d = ۳$ و $m = -\frac{۱}{۳}$

نکته : معادله خطهایی که موازی با محور طول ها هستند بصورت y=a و معادله خطهایی که موازی با محور عرض ها هستند x=a است .

نکته : شیب خطهایی که موازی با محور xها است برابر صفر و شیب خطهایی که موازی محور y ها هستند نامعین و یا تعریف نشده اند .

مثال : کاردر کلاس ۳ ص ۱۰۶ چون خط موازی محور xها است پس معادله ی آن به صورت $y=۱$ است.

مثال : فعالیت ۱ ص ۱۰۵ چون نقطه ها دارای طول مساوی ۲ هستند پس خط موازی محور yها است .

پس معادله ی آن به صورت $x=۲$ می باشد .

رسم خطی که معادله ی آن داده شده است

برای رسم خط ما باید حداقل مختصات ۲ نقطه را داشته باشیم لذا با کشیدن جدولی مقادیری را برای x انتخاب کرده و از روی آن مقدار y را به دست می آوریم .

مثال : دو خط $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۳$ را روی دستگاه محورهای مختصات رسم کنید . آیا این دو خط با هم موازیند ؟ چرا؟

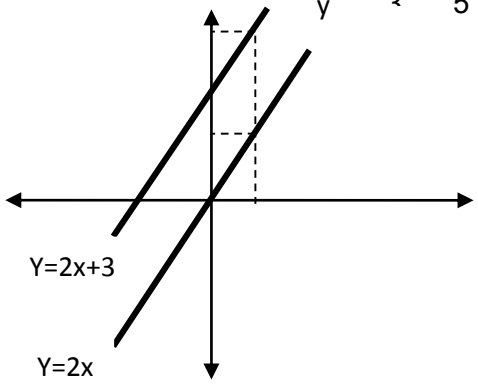
برای رسم هر خط کافی است مختصات دو نقطه از آن را داشته باشیم .

$y = ۲x$

x	۰	۱
y	۰	۲

$y = ۲x + ۳$

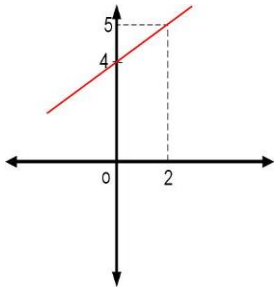
x	۰	۱
y	۳	5



برای رسم خطی که معادله ی آن بصورت کلی گفته شده است بهتر است ابتدا یکبار $x=۰$ باشد و مقدار y را بدست آورد و بار دیگر $y=۰$ باشد و مقدار x را بدست آورد .

مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۰ برای رسم خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ ابتدا جدولی رسم می کنیم .

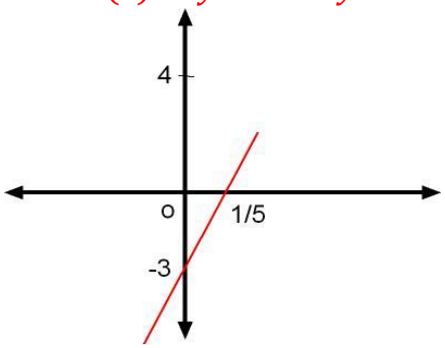
$y = \frac{۱}{۲}(۰) + ۴ = ۴$ $\quad$ $y = \frac{۱}{۲}(۲) + ۴ = ۵$



x	۰	۲
y	۴	۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ برای رسم خط ،جدول می کشیم . لازم به یادآوری است چون معادله به صورت کلی داده شده بهتر است یکبار x=0 و یکبار y=0 باشد . $۲x - y = ۳ \rightarrow ۲(۰) - y = ۳ \rightarrow y = -۳$

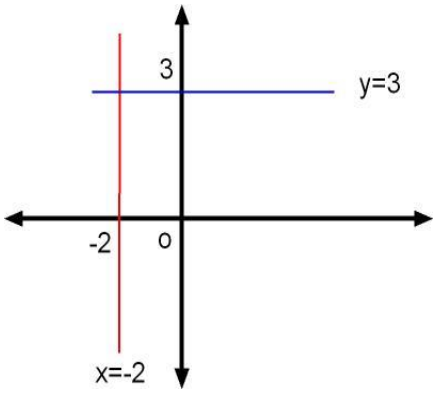
x	۰	۱/۵
y	−۳	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$



$$۲x - y = ۳ \rightarrow ۲x - ۰ = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

نکته : برای رسم خط های موازی با محور نیازی به کشیدن جدول نیست .

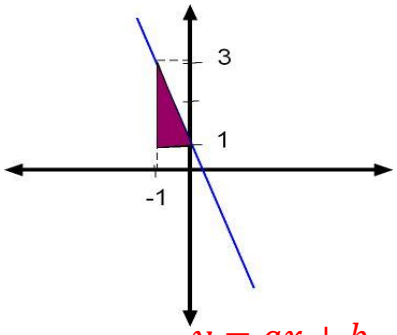
مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۶



مثال : تمرین ۲ ص ۱۰۶

معادله ی محور طول ها $y=۰$ و معادله ی محور عرض ها $x=۰$

مثال : تمرین ۵ ص ۱۰۷



ابتدا با استفاده از مثلث شیب را به دست می آوریم :

$a = \frac{۲}{۱}$ اما چون خط با محورxها زاویه ی باز ساخته

پس شیبش منفی است و از طرفی b= ۱ پس $y = ax + b \rightarrow y = -۲x + ۱$

@riazicafe

تعیین مختصات نقطه روی یک خط

گاهی اوقات از ما مختصات نقطه ای را می خواهند که روی خط واقع است . در این صورت با دانستن x یا y و قرار دادن آن در معادله دیگری را پیدا می کنیم .

مثال : کاردرکلاس ۱ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به طول ۲ را روی خط $y = ۲x - ۱$ پیدا کنید .

$$y = ۲x - ۱ \rightarrow y = ۲(۲) - ۱ = ۴ - ۱ = ۳ \qquad \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کاردر کلاس ۲ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ پیدا کنید .

$$y = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow -۳ = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ + ۲ \rightarrow x = ۱۰ \qquad \begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کار در کلاس ۳ ص ۱۰۰

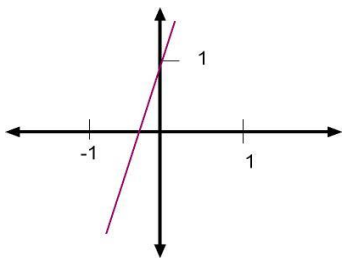
مختصات محل برخورد خط $y = ۵x + ۱$ را با محورهای مختصات پیدا کنید .

می دانیم که محل برخورد خط با محور طول ها دارای عرض مساوی صفر است . پس در معادله به جای y صفر می گذاریم تا x به دست آید .

$$y = ۵x + ۱ \rightarrow ۵x + ۱ = ۰ \rightarrow ۵x = -۱ \rightarrow x = -\frac{۱}{۵}$$ پس $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ ۰ \end{bmatrix}$

همچنین میدانیم که محل برخورد خط با محور عرض ها دارای طول مساوی صفر است پس اینبار به جای x در معادله صفر قرار می دهیم تا y به دست آید .

$$y = ۵x + ۱ \rightarrow y = ۵(۰) + ۱ \rightarrow y = ۱$$ پس $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$



@riazicafe

مثال : تمرین ۶ ص۱۰۱

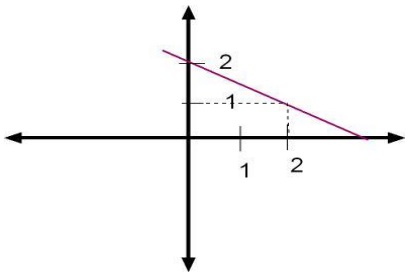
مختصات نقطه ای از خط به معادله ی $y = -\frac{۳}{۵}x + ۴$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد .

$$\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix} \qquad y = -\frac{۳}{۵}(۵) + ۴ = -۳ + ۴ = ۱$$

مثال : تمرین ۷ ص۱۰۱

خط $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ را رسم کنید .

X	۰	۲
Y	۲	۱
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$



آیا نقطه ی $\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ باید مختصات نقطه را در معادله قرار دهیم اگر دو طرف مساوی شدند قرار دارد . $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow ۳ = -\frac{۱}{۲}(-۲) + ۲ \rightarrow ۳ = +۱ + ۲ = ۳$ پس قرار دارد

مثال : آیا نقطه $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵}\\۳\end{bmatrix}$ روی خط $۵x - ۴y = ۱۱$ قرار دارد ؟

$$۵\left(\frac{۱}{۵}\right) - ۴(۳) = ۱۱ \rightarrow ۱ - ۱۲ = ۱۱ \rightarrow ۱۱ = ۱۱$$ پس قرار دارد .

برای یادگیری بهتر تمرین ها و مثال ها را یک بار دیگر خودتان حل کنید .