معادله‌ی خط

هر عبارت جبری که به صورت $y = ax + b$ باشد (که در آن a و b عدد هستند) را یک معادله‌ی خط می نامیم. هر معادله‌ی خط یک خط راست روی محورهای مختصات ایجاد می‌کند و هر خطی که در محورهای مختصات رسم شده باشد حتماً یک معادله‌ی خط خواهد داشت.

یافتن نقاط روی یک خط که معادله‌ی آن معلوم است

اگر نقطه‌ای از خط داشته باشیم که فقط طول(یا فقط عرض آن) معلوم باشد به کمک معادله‌ی خط مختص دیگر آن نقطه را نیز می توانیم به دست آوریم.

مثال۱: اگر نقاط $A = \begin{bmatrix} ۴ \\ m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} n \\ -۵ \end{bmatrix}$ نقاطی از خط به معادله‌ی $y = ۲x - ۳$ باشند m و n را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=۲x-۳ \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}} m = ۲ \times ۴ - ۳ = ۸ - ۳ = ۵$$

$$B = \begin{bmatrix} n \\ -۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=۲x-۳ \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}} -۵ = ۲ \times n - ۳ \Rightarrow -۵ + ۳ = ۲n \Rightarrow -۲ = ۲n \Rightarrow n = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

مثال۲: آیا نقاط $C = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$ روی خط به معادله‌ی $y = ۳x - ۲$ قرار دارند یا خیر؟

جواب : مختصات نقطه را در معادله‌ی خط جای گذاری می کنیم (یعنی به جای x طول نقطه و به جای y عرض از مبدأ نقطه را قرار می دهیم. اگر تساوی برقرار باشد نقطه روی خط واقع است و در غیر این‌صورت نقطه روی خط واقع نیست.)

$$C = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=۳x-۲ \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}} ۱۰ = ۳ \times ۴ - ۲ \Rightarrow ۱۰ = ۱۰ \Rightarrow$$

چون تساوی برقرار است پس نقطه روی خط واقع می باشد.

$$B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=۳x-۲ \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}} -۶ = ۳ \times -۲ - ۲ \Rightarrow -۶ = -۸ \Rightarrow$$

چون این تساوی درست نیست پس نقطه روی خط قرار ندارد.

شیب و عرض از مبدأ خط

اگر معادله‌ی خط به صورت $y = ax + b$ باشد (که در آن a و b عدد هستند) در این صورت به عدد پشت x یعنی a شیب خط و به عدد تنها یعنی b عرض از مبدأ خط گفته می شود.

عرض از مبدأ خط جایی است که آن خط محور عرض‌ها یا همان yها را قطع می کند. مثلا خط $y = x - ۵$ محور عرض‌ها را در -۵ قطع می کند.

اگر عرض از مبدأ موجود نباشد یعنی صفر باشد آن خط از مبدأ مختصات می گذرد، یعنی مبدأگذر می باشد. مثلا خط $y = \frac{۳}{۲}x$ مبدأ گذر می باشد.

شیب یک خط برابر است با تفاضل عرض‌های دو نقطه‌ی دلخواه از آن خط، تقسیم بر تفاضل طول‌های آن دو نقطه. $\text{شیب} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$

رسم خطی که معادله‌ی آن معلوم است

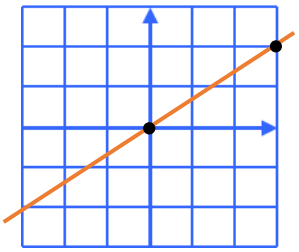
در صورتی که معادله‌ی خط داده شده باشد می توان آن را با پیدا کردن دو نقطه از خط رسم نمود. برای این کار یا از نقطه یابی استفاده می کنیم و یا به کمک عرض از مبدأ و شیب آن دو نقطه را می یابیم.

ریاضی دوره اول متوسطه @dooreaval

مثال۳: معادله‌ی خط $y = \frac{۳}{۲}x$ را رسم نمایید.

جواب: در خط $y = \frac{۳}{۲}x$ چون عرض از مبدأ صفر است خط از مبدأ مختصات یعنی $\begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ می‌گذرد و چون $\text{شیب} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{۳}{۲}$ پس اگر نقطه‌ای از خط را داشته باشیم مثلاً همان $\begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ به کمک این شیب نقطه‌ی دوم به دست خواهد آمد: بدین صورت که طول نقطه‌ی قبلی را دو واحد افزایش می دهیم(به اندازه‌ی مخرج شیب) و

عرض آن را نیز ۳ واحد افزایش می دهیم (به اندازه‌ی صورت شیب) تا نقطه‌ی جدید به دست آید(از $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا می رویم تا به نقطه $\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ برسیم. در این حالت اگر شیب منفی باشد علامت منفی را به صورت کسر یعنی تفاضل عرض‌ها می دهیم.

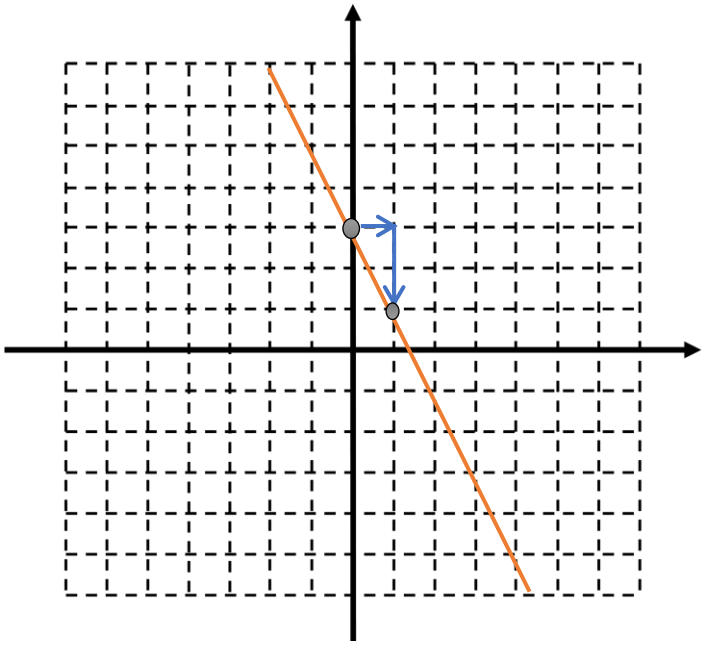


یا به روش دیگر می‌توانیم با جایگذاری اعداد صفر و ۲ به جای x در معادله‌ی خط می‌توان y را به دست آورد.

(چون مخرج شیب ۲ است بهتر است به جای ۱ مخرج شیب یعنی ۲ را وارد کنیم تا محاسبه y ساده‌تر شود)

x	۰	۲
y	۰	۳
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$

مثال۴: معادله‌ی خط $y = -۲x + ۳$ را رسم نمایید.

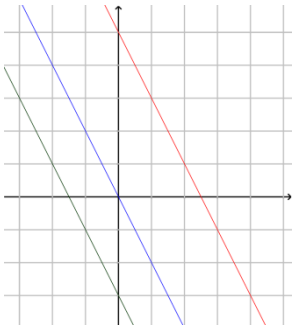


روش اول : با کشیدن جدول زیر و وارد کردن دو مقدار دلخواه برای متغییر x مثلا صفر و ۱ متغییر y مربوط به آن را پیدا می کنیم.

x	۰	۱
y	۳	۱
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$

روش دوم : چون عرض از مبدا خط برابر ۳+ است پس این خط محور عرض‌ها را در ۳+ قطع می کند یعنی از نقطه‌ی$\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$ می گذرد. همچنین چون شیب برابر با $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{-۲}{۱} = -۲$ است پس اگر از نقطه‌ی عرض از مبدأ یک واحد مثبت در جهت xها حرکت کنیم باید دو واحد منفی در جهت yها حرکت کنیم پس داریم $\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ یعنی به نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ می‌رسیم.

خاصیت خط های موازی



اگر دو خط موازی باشند شیب آن‌ها برابر است و بالعکس یعنی اگر دو معادله‌ی خط با شیب یکسان داشته باشیم آن دو خط موازی می‌شوند.

مثال۵: سه خط به معادله‌های $y = -۲x + ۵$ و $y = -۲x$ و $y = -۲x - ۳$ را در نظر بگیرید. هر سه خط داری شیب برابر ۲− می‌باشند و در صورتی که آنها را رسم نماییم مشاهده می‌کنیم که همگی موازی هم هستند.

نوشتن معادله‌ی خط

برای نوشتن معادله‌ی یک خط کافی است شیب و عرض از مبدأ آن را داشته باشیم و آن را در معادله‌ی $y = ax + b$ به ترتیب به جای a و b جای‌گذاری کنیم.

مثال۶: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۲ باشد و محور عرض‌ها را در ۴− قطع کند.

جواب : محور عرض‌ها را در ۴− قطع کند یعنی عرض از مبدأ برابر ۴− باشد. و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = ۲x - ۴$ می‌باشد.

مثال۷: معادله‌ی خطی بنویسید که موازی $y = \frac{۳}{۲}x + ۵$ باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

جواب : موازی $y = \frac{۳}{۲}x + ۵$ باشد $\Longleftarrow$ شیب $= \frac{۳}{۲}$ و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بگذرد $\Longleftarrow$ عرض از مبدأ برابر -۱ است. و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = \frac{۳}{۲}x - ۱$ است.

مثال۸: معادله‌ی خطی بنویسید که موازی خط $y = ۴x - ۳$ باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ بگذرد.

جواب: موازی $y = ۴x - ۳$ باشد $\Longleftarrow$ شیب $= ۴$ و چون این نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ طولش صفر نیست پس عرض آن یعنی ۵ عرض از مبدأ خط نمی باشد. برای یافتن عرض از مبدأ مختصات نقطه را در معادله‌ی خط که شیب آن نیز معلوم و برابر ۴ است وارد می کنیم و یک معادله بر حسب b خواهیم داشت که با حل آن معادله عرض از مبدأ به دست می‌آید.

$$y = ۴x + b$$

$$۵ = ۴ \times ۲ + b \Rightarrow ۵ = ۸ + b \Rightarrow ۵ - ۸ = b \Rightarrow -۳ = b \qquad \text{ولذا} \Rightarrow \quad y = ۴x - ۳$$

به دست آوردن شیب خط به کمک دو نقطه از خط

اگر مختصات دو نقطه از خط معلوم باشد شیب آن خط به کمک تفاضل عرض‌ها تقسیم بر تفاضل طول‌ها به دست می‌آید. مثلا اگر $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ دو نقطه از خط باشند شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر است با:

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

مثال۹: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

جواب: چون طول نقطه‌ی B برابر صفر است پس عرض آن یعنی -۳ همان عرض از مبدا خط است. همچنین شیب خط را نیز به کمک رابطه‌ی بالا پیدا می کنیم:

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۵-(-۳)}{-۲-۰} = \frac{۸}{-۲} = -۴$$

و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = -۴x - ۳$ می باشد.

مثال۱۰: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور xها را در -۴ قطع کند و از نقطه‌ی $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$ بگذرد.

جواب: محور xها را در -۴ قطع کند یعنی از نقطه $D = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ بگذرد. و بنابر این

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } C \text{ و } D = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-۶-۰}{۲-(-۴)} = \frac{-۶}{+۶} = -۱$$

همچنین چون هیچ کدام از این دو نقطه طولشان صفر نیست پس هیچکدام محل برخورد با محور عرض‌ها یعنی عرض از مبدأ نیستند و لذا برای به دست آوردن عرض از مبدأ مانند مثال ۵ مختصات یکی از دو نقطه‌ی C یا D را در معادله‌ی $y = x + b$ وارد می‌کنیم تا با حل کردن معادله‌ی آن b را به دست آوریم.

$$y = -x + b \xrightarrow{\text{مختصات نقطه } C=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix} \text{ را جای‌گذاری می‌کنیم}} -۶ = -۲ + b \Longrightarrow -۶ + ۲ = b \Rightarrow -۴ = b$$

پس معادله‌ی خط به صورت $y = -x - ۴$ خواهد بود.

صورت کلی معادله‌ی خط

گاهی ممکن است معادله‌ی خط به صورت کلی $ax + by = c$ باشد، یعنی هم y و هم x با ضرایبشان در یک سمت مساوی واقع باشند. در این حالت دیگر ضریب x یعنی a شیب خط نیست و عدد تنها یعنی c عرض از مبدأ نمی باشد. برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدأ باید آن را به حالت استاندارد در آورد.

مثال۱۱: معادله‌ی خط $۳x + ۴y = ۱۲$ را رسم نمایید و شیب و عرض از مبدأ خط را به دست آورید.

جواب: برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدأ باید آن را به حالت استاندارد برگرداند بدین صورت که کاری کنیم فقط y در سمت چپ تساوی باقی بماند.

$$۳x + ۴y = ۱۲ \xrightarrow{۳x \text{ را طرف دیگر می‌بریم}} ۴y = -۳x + ۱۲ \xrightarrow{\text{همه‌ی جملات را بر ضریب } y \text{ یعنی ۴ تقسیم می‌کنیم}} \frac{۴}{۴}y = \frac{-۳}{۴}x + \frac{۱۲}{۴} \Rightarrow y = \frac{-۳}{۴}x + ۳$$

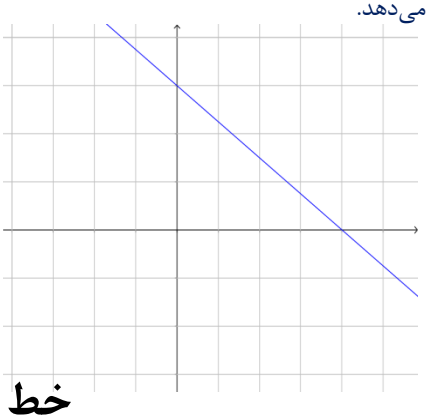
بنابراین شیب خط $\frac{-۳}{۴}$ و عرض از مبدأ خط ۳ می‌باشد.

برای رسم خط هم می‌توان با نقطه یابی از $۳x + ۴y = ۱۲$ و یا به کمک $y = \frac{-۳}{۴}x + ۳$ مانند مثال ۱ خط را رسم نمود.

توجه: در نقطه یابی از $y = \frac{-۳}{۴}x + ۳$ به x مقدار می‌دهیم ابتدا صفر و سپس ۴ (مخرج شیب) و سپس y مربوط به هر کدام را پیدا می‌کنیم. اما برای نقطه یابی $۳x + ۴y = ۱۲$ بهتر است ابتدا x را صفر گذاشته و سپس y آن را به دست آوریم و سپس y را صفر گذاشته و x مربوط به آن را پیدا کنیم. در نهایت هر دو حالت یک خط به دست می‌دهد.

.

x	۰	۴
$y = \frac{-۳}{۴}x + ۳$	۳	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$



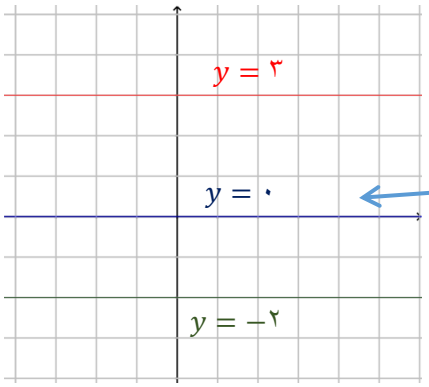
خط های موازی با محورها

هرگاه معادله‌ی خط به صورت $y = b$ باشد (یعنی در معادله‌ی خط x وجود نداشته باشد) آن خط محور y ها را در b قطع می‌کند و موازی با محور xها می‌شود.

در این حالت شیب خط برابر صفر می‌باشد.

مثال۱۲: معادله‌ی خط‌های $y=۳$ و $y = -۲$ و $y = ۰$ را رسم کنید.

توجه: $y = ۰$ معادله‌ی خط محور xها می‌باشد.

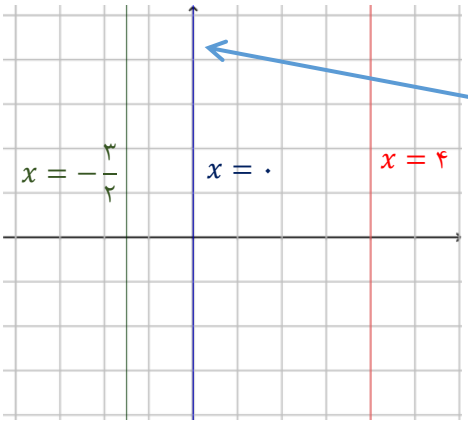


هرگاه معادله‌ی خط به صورت $x = c$ باشد (یعنی در معادله‌ی خط y وجود نداشته باشد) آن خط محور x ها را در c قطع می‌کند و موازی با محور yها می‌شود.

در این حالت شیب خط تعریف نشده می‌باشد.

مثال۱۳: معادله‌ی خط‌های $x = ۴$ و $x = -\frac{۳}{۲}$ و $x = ۰$ را رسم کنید.

توجه: $x = ۰$ معادله‌ی خط محور yها می‌باشد.



تهیه شده توسط: محمد صدیق لعل ثانی – گروه ریاضی اشنویه – فروردین ماه ۱۳۹۶

@dooreaval ریاضی دوره اول متوسطه