بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: معادله‌ی خط

پدیده‌های گوناگونی در زندگی روزمره می‌توان یافت که بین آن‌ها رابطه وجود دارد. برای مثال، بین زمان حرکت یک اتومبیل و مسافت طی‌شده‌ی آن، یا بین مسافت طی‌شده و میزان سوختی که مصرف می‌کند و یا بین زمان حرکت اتومبیل و مقدار مصرفی بنزین آن، رابطه‌هایی وجود دارد.

اتومبیلی با سرعت ثابت ۲ کیلومتر در دقیقه در حال حرکت است. در جدول زیر رابطه‌ی بین زمان حرکت و مسافت طی‌شده توسط این اتومبیل را بررسی می‌کنیم.

زمان (دقیقه) x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۷۴	...	(۱۰۸)
مسافت (کیلومتر) y	۲	۴	۶	۸	۱۰	...	(۱۴۸)	...	۲۱۶

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، عدد مربوط به مسافت در هر زمان خاصی، دو برابر عدد مربوط به زمان است.

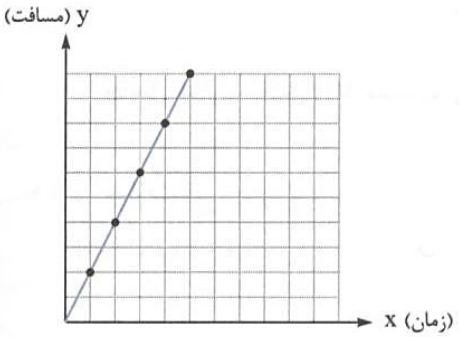
الف) این اتومبیل پس از ۷۴ دقیقه چه مسافتی را طی کرده است؟ $۷۴\times۲=۱۴۸$ کیلومتر

ب) پس از چند دقیقه، این اتومبیل مسافت ۲۱۶ کیلومتر را طی کرده است؟ $۲۱۶\div۲=۱۰۸$ دقیقه

اکنون اگر عددهای زمان و مسافت مربوط به هم را به صورت زوج عدد نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴\\۸\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}۱۰۸\\۲۱۶\end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها را روی نمودار مقابل مشخص می‌کنیم. اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، می‌بینیم که همه‌ی آن‌ها روی یک خط راست قرار دارند، به همین دلیل می‌گوییم رابطه‌ی بین زمان حرکت و مسافت طی‌شده توسط این اتومبیل، یک رابطه‌ی خطی است.



برای رابطه‌ی بین زمان حرکت اتومبیل و مسافت طی‌شده‌ی آن می‌توانیم یک معادله بنویسیم.

معادله به صورت کلامی: مسافت طی‌شده = دو برابر زمان طی‌کردن

معادله به صورت ریاضی: $y=۲x$ (مسافت طی‌شده ← y، زمان طی‌کردن ← x)

تساوی بالا اتحاد نیست به دلیل این‌که در اتحاد، هر مقدار دلخواهی که به جای x و y قرار دهیم، همواره دو طرف تساوی برابر می‌شوند. اما در تساوی بالا اگر به جای x یا به جای y یک عدد دلخواه قرار دهیم، مقدار متغیر دیگر را باید از راه معادله حساب کنیم.

برای مثال: برای $x=۱۷$ داریم: $y=۲\times۱۷=۳۴ \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷\\۳۴\end{bmatrix}$

یا برای $y=۵۶$ داریم: $۵۶=۲x \Rightarrow x=\frac{۵۶}{۲}=۲۸ \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۸\\۵۶\end{bmatrix}$

معادلاتی مانند $y=2x$ که دارای بیش از یک متغیر هستند، دارای بی‌شمار جواب هستند.

برای معادله‌ی $2x+y=24$ سه پاسخ مختلف بیابید.

x	۱	۲	۵
y	$2\times1+y=24$	$2\times2+y=24$	$2\times5+y=24$
	$y=24-2$	$y=24-4$	$10+y=24$
	$y=22$	$y=20$	$y=24-10=14$

بنابراین سه پاسخ برای معادله‌ی $2x+y=24$ به صورت زیر است:

$\begin{bmatrix}5\\14\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\20\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\22\end{bmatrix}$ یا

x	۱	۲	۵
y	۲۲	۲۰	۱۴

معادله‌ی خط: صورت کلی معادله‌ی خط راست، به شکل $y=ax+b$ است. این معادله دارای بی‌شمار جواب است و هر یک از جواب‌های آن مختصات یک نقطه است که اگر این نقاط را به هم وصل کنیم یک خط راست به دست می‌آید، به همین دلیل می‌گوییم که در این‌گونه معادلات x و y رابطه‌ی خطی دارند.

در معادله‌ی $y=ax+b$، a و b اعداد ثابت هستند.

هر یک از معادله‌های $y=-2x+1$، $y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}$ و $y=-\frac{3}{4}x+2$ معادله‌ی یک خط راست هستند.

اگر در معادله‌ی خط $y=ax+b$، $b=0$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $y=ax$ درمی‌آید، که این خط از مبدأ مختصات (یعنی نقطه‌ی $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$) می‌گذرد.

خط‌های $y=2x$، $y=-\frac{1}{3}x$ و $y=\frac{7}{5}x$ همگی از مبدأ مختصات، یعنی نقطه‌ی $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ می‌گذرند.

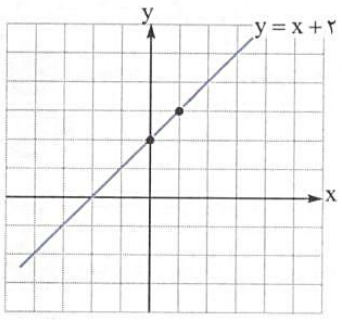
- می‌دانیم که از دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد، پس برای رسم یک خط راست، فقط کافی است که مختصات دو نقطه از آن خط را داشته باشیم. به مثال‌های زیر دقت کنید.

معادله‌ی دو خط به صورت زیر داده شده، آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y=x+2$ ب) $y=-3x$

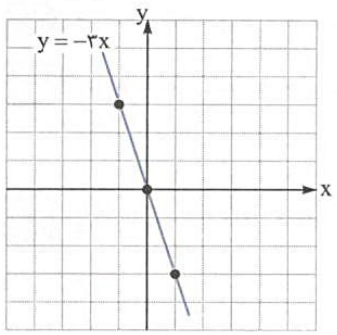
الف) مختصات دو نقطه از خط را به دست می‌آوریم.

x	۰	۱
y	$y=0+2=2$	$y=1+2=3$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$



ب) ابتدا مختصات دو نقطه از خط را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که این خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس مختصات یک نقطه‌ی آن $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ است.

x	۰	۱
y	۰	-3
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$



معادله‌ی خط در واقع، رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط یک خط است. برای مثال وقتی‌که می‌گوییم معادله‌ی خط d به صورت $y=2x$ است، یعنی عرض هر نقطه روی خط d، دو برابر طول آن نقطه است یا وقتی می‌گوییم معادله‌ی خط b به صورت $y=x+3$ است، یعنی عرض هر نقطه روی خط b، ۳ واحد بیشتر از طول آن نقطه است.

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-3\\-12\end{bmatrix}$ بگذرد.

اگر به مختصات نقطه‌ها دقت کنیم، می‌بینیم که عرض هر نقطه، ۴ برابر طول آن نقطه است. پس می‌توان نوشت:

چهار برابر طول = عرض $\Rightarrow y=4x$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$ بگذرد.

با کمی دقت درمی‌یابیم که عرض هر نقطه، سه واحد کم‌تر از طول آن است، پس می‌نویسیم:

سه واحد کم‌تر از طول = عرض $\Rightarrow y=x-3$

اگر نسبت عرض به طول در دو نقطه ثابت باشد، آن خط حتماً از مبدأ مختصات می‌گذرد.

معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ بگذرد.

نسبت عرض به طول در هر دو نقطه ۲- است، پس معادله‌ی خط می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{y}{x}=\frac{-6}{3}=-2\\ \frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{y}{x}=\frac{2}{-1}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow y=-2x$$

برای این‌که دریابیم نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ روی خط d به معادله‌ی $y=ax+b$ قرار دارد یا خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد، دو روش وجود دارد:

۱- روش رسم: خط d را به طور دقیق رسم کنیم و بعد ببینیم که آیا از نقطه‌ی A می‌گذرد یا خیر.

۲- روش محاسبه یا تحلیلی: مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی خط جایگزین می‌کنیم، اگر دو طرف تساوی برابر شوند، بنابراین نقطه‌ی A روی خط d قرار دارد.

آیا نقطه‌ی $\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$ روی خط $y=-3x+1$ قرار دارد؟

مختصات نقطه را در معادله‌ی خط جایگزین می‌کنیم:

$$-5=\underbrace{-3\times 2}_{-6}+1\Rightarrow -5=-5$$

چون دو طرف تساوی برابر شدند، بنابراین نقطه روی خط قرار دارد.

مختصات نقطه‌ای از خط $y=\frac{2}{3}x+1$ را به دست آورید که طول آن ۳ باشد.

به جای x در معادله‌ی خط، عدد ۳ را قرار می‌دهیم و مقدار y را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}+1=3\Rightarrow y=3\Rightarrow \text{مختصات نقطه‌ی موردنظر}\ \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

مختصات نقطه‌ای از خط $y=-2x+7$ را به دست آورید که عرض آن ۵- باشد.

در معادله‌ی خط به جای y، ۵- قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید.

$$-5=-2x+7\Rightarrow -2x=-12\Rightarrow x=6\Rightarrow \text{مختصات نقطه‌ی موردنظر}\ \begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که اگر طول نقطه‌ای صفر باشد، آن نقطه روی محور عرض‌ها قرار دارد و اگر عرض نقطه‌ای صفر باشد، آن نقطه روی محور طول قرار دارد.

نقاط $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-۷\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۲/۵\\۰\end{bmatrix}$ همگی روی محور طول قرار دارند و نقاط $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\-\sqrt{۳}\end{bmatrix}$ همگی روی محور عرض قرار دارند.

اگر در معادله‌ی خط به جای x صفر قرار دهیم، می‌توانیم مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور عرض را به دست آوریم و اگر به جای y صفر قرار دهیم، می‌توانیم مختصات نقطه‌ی برخورد خط را با محور طول به دست آوریم.

محل برخورد خط $-۳x+۴y=۱۲$ را با محورهای مختصات به دست آورید.

مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور عرض‌ها

$$\begin{cases}-۳x+۴y=۱۲\\x=۰\end{cases}\Rightarrow -۳\times۰+۴y=۱۲\Rightarrow ۴y=۱۲\Rightarrow y=۳\Rightarrow \begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$$

مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور طول‌ها

$$\begin{cases}-۳x+۴y=۱۲\\y=۰\end{cases}\Rightarrow -۳x+۴\times۰=۱۲\Rightarrow -۳x=۱۲\Rightarrow x=\frac{۱۲}{-۳}=-۴\Rightarrow \begin{bmatrix}-۴\\۰\end{bmatrix}$$

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

اگر معادله‌ی خط d به صورت $y=ax+b$ باشد (توجه کنید که y در یک طرف تساوی و بقیه‌ی اجزای معادله در طرف دیگر هستند و ضریب y، مساوی ۱ است). آن‌گاه عدد a را شیب خط و عدد b را عرض از مبدأ خط می‌گویند.

جدول زیر را کامل کنید.

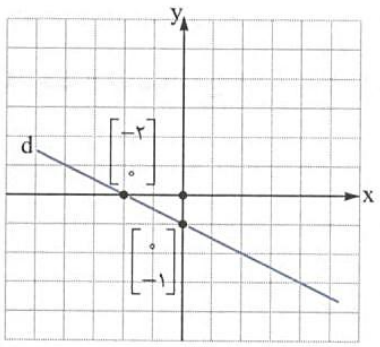
معادله‌ی خط	$y=-۲x+\frac{۱}{۳}$	$y=\frac{۴}{۵}x$	$y=-x+۱$	$y=\frac{x}{۳}-۱$
شیب خط	-۲	$\frac{۴}{۵}$	-۱	$\frac{۱}{۳}$
عرض از مبدأ	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱	-۱

اگر طول نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد عرض مربوط به آن نقطه را، عرض از مبدأ خط می‌گویند.

اگر عرض نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد طول مربوط به آن نقطه را، طول از مبدأ آن خط می‌گویند.

خط d به معادله‌ی $x+2y=-2$ را رسم کنید.

ابتدا جدول را تشکیل می‌دهیم.



x	0	−2
y	−1	0

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$ ← طول از مبدأ

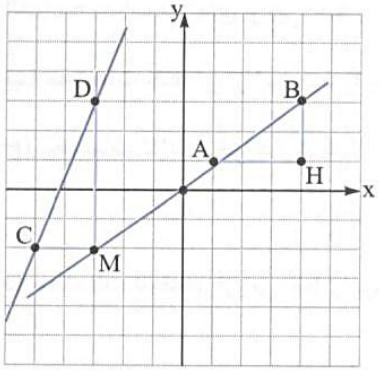
↓ عرض از مبدأ

می‌دانیم معادله‌ی کلیه‌ی خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند، به صورت $y=ax$ است. در این معادله a شیب خط است و می‌توان مقدار شیب را در این خطوط از رابطه‌ی $a=\frac{y}{x}$ محاسبه کرد.

خطی از مبدأ مختصات و نقطه‌ی $\begin{bmatrix}3\\12\end{bmatrix}$ می‌گذرد، شیب این خط چه‌قدر است؟

شیب خط $a=\frac{y}{x}=\frac{12}{3}=4$

به طور کلی نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی‌شده را شیب خط می‌گوییم.



برای مثال دو نقطه‌ی A و B در نمودار مقابل را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، نسبت ارتفاع BH به مسافت افقی AH را شیب خطی می‌گوییم که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد.

$\frac{BH}{AH}=\frac{2}{3}=$ شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

● در صفحه‌ی مختصات مقابل، شیب خطی که از دو نقطه‌ی C و D می‌گذرد، برابر است با:

$\frac{MD}{MC}=\frac{5}{2}=2/5=$ شیب خطی که از نقطه‌های C و D می‌گذرد.

شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $2y=4x-8$ ب) $\frac{1}{2}x+y=-3$

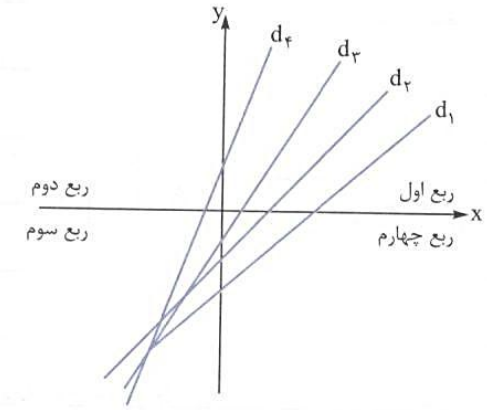
الف) دقت کنید که در این مثال عدد ۴ یعنی ضریب x شیب خط نیست و عدد ۸− عرض از مبدأ نیست، چون معادله به صورت $y=ax+b$ نیست. (ضریب y، عدد۱ نیست). پس ابتدا باید معادله را به صورت $y=ax+b$ درآوریم، بنابراین دو طرف تساوی را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم:

$$2y=4x-8 \xrightarrow{\div 2} \frac{2y}{2}=\frac{4x}{2}-\frac{8}{2} \Rightarrow y=2x-4 \Rightarrow \begin{cases}\text{شیب خط}=2\\ \text{عرض از مبدأ خط}=-4\end{cases}$$

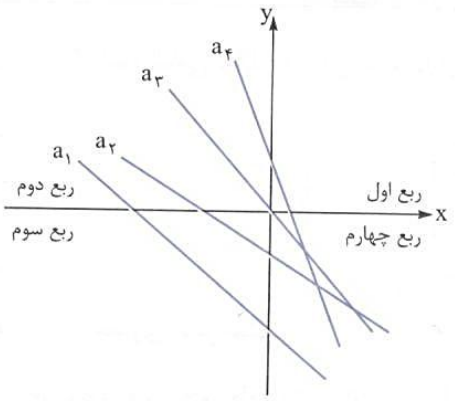
ب) ابتدا باید معادله به صورت $y=ax+b$ تبدیل شود.

$$\frac{1}{2}x+y=-3 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-3 \Rightarrow \begin{cases}\text{شیب خط}=-\frac{1}{2}\\ \text{عرض از مبدأ خط}=-3\end{cases}$$

می‌دانیم که محورهای مختصات، صفحه‌ی مختصات را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کنند. تمامی خطوطی که از ربع اول شروع و به ربع سوم رسم می‌شوند دارای شیب مثبت و تمامی خطوطی که از ربع دوم شروع و به ربع چهارم رسم می‌شوند، دارای شیب منفی هستند.



شیب خطوط d_1، d_2، d_3 و d_4 مثبت است.



شیب خطوط a_1، a_2، a_3 و a_4 منفی است.

شرط موازی‌بودن دو خط: اگر دو خط، دارای شیب‌های برابر باشند، آن دو خط با هم موازی هستند.

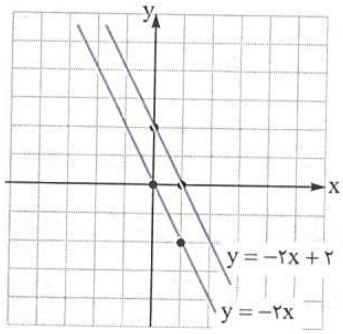
دو خط $y = 2x + \frac{1}{3}$ و $y = 2x - 7$ با یکدیگر موازی هستند، چون شیب هر دو خط مساوی ۲ است.

نمودار دو خط $y = -2x$ و $y = -2x + 2$ را رسم کنید.

ابتدا جدول را تشکیل می‌دهیم.

x	۰	۱
$y = -2x$	۰	-2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱ \\ -2 \end{bmatrix}$

x	۰	۱
$y = -2x + 2$	۲	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$



دقت کنید که چون دو خط دارای شیب‌های برابر هستند، با هم موازی‌اند و چون شیب آن‌ها منفی است از ربع دوم به چهارم رسم شده‌اند.

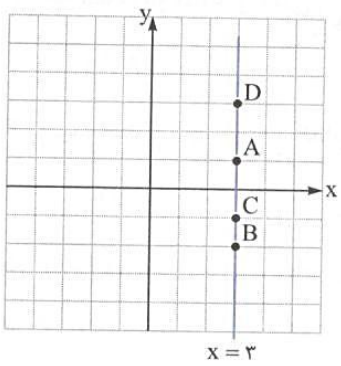
شرط عمودبودن دو خط: اگر شیب‌های دو خط، قرینه‌ی معکوس یکدیگر باشند یا حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط مساوی ۱- باشد، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. برای مثال خطوط $y = -3x$ و $y = \frac{1}{3}x + 2$ بر هم عمودند، زیرا:

$$-3 \xrightarrow{\text{قرینه‌ی معکوس}} \frac{1}{3}$$

- صورت دیگر معادله‌ی خط: گاهی اوقات معادله‌ی خط را به صورت $ax + by = c$ نشان می‌دهند که در این معادله a، b و c اعداد حقیقی هستند. برای مثال معادله‌ی $y = 3x + 4$ را می‌توان به صورت $y - 3x = 4$ یا $-3x + y = 4$ نوشت که در آن، $a = -3$، $b = 1$ و $c = 4$ است.
- اگر در معادله‌ی خط $ax + by = c$، $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $x = c$ درمی‌آید که این خط موازی محور عرض است و بر محور طول‌ها عمود می‌شود. تمامی نقاط روی این خط، دارای طولی برابر c هستند.

مختصات چهار نقطه از خط $x = 3$ را بنویسید و سپس این خط را رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم، تمامی نقاط روی این خط دارای طولی مساوی ۳ هستند.



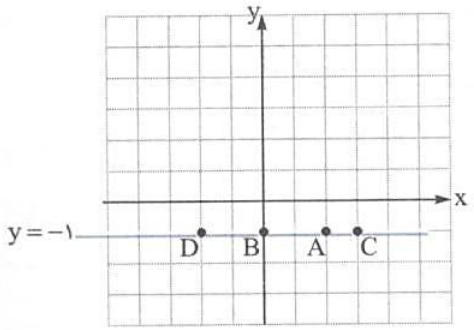
$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

شیب خط $x = c$ تعریف نشده (نامعین) است.

- اگر در معادله‌ی خط $ax + by = c$، $a = 0$ و $b = 1$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $y = c$ درمی‌آید، این خط موازی محور طول‌ها است و بر محور عرض‌ها عمود می‌شود. تمامی نقاط روی این خط دارای عرضی برابر c هستند.

مختصات چهار نقطه از خط $y=-1$ را بنویسید و سپس این خط را رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم، تمامی نقاط روی این خط دارای عرضی مساوی -1 هستند.



$$A=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$$

شیب خط $y=c$، مساوی صفر است.

چون عرض هر نقطه روی محور طول‌ها، مساوی صفر است، بنابراین معادله‌ی محور طول‌ها به صورت $y=0$ است.

چون طول هر نقطه روی محور عرض‌ها، مساوی صفر است، بنابراین معادله‌ی محور عرض‌ها به صورت $x=0$ است.

می‌دانیم هر نقطه مانند A در صفحه‌ی مختصات دارای یک طول و یک عرض است. برای مثال مختصات نقطه‌ی A را به صورت $A=\begin{bmatrix}x_A\\y_A\end{bmatrix}$ و مختصات نقطه‌ی B را به صورت $B=\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. x_A یعنی طول نقطه‌ی A و y_A یعنی عرض نقطه‌ی A.

در نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$، $x_A=-4$ و $y_A=2$ است.

شیب خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود.

$$\text{شیب}=\frac{\text{تفاضل عرض‌های دو نقطه}}{\text{تفاضل طول‌های دو نقطه}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

شیب خطی را که از دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix}$ می‌گذرد، به دست آورید.

$$\text{شیب خط}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-5-3}{-1-2}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$$

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

پیش از این در مورد حل معادله‌های یک‌مجهولی و استفاده از معادله برای حل مسئله‌ها صحبت کردیم. برای یادآوری به مثال زیر دقت کنید.

مریم ۴ مکعب چوبی هم‌اندازه دارد. اگر وزن آن‌ها روی هم ۶۰ گرم باشد، وزن هر مکعب را حساب کنید.

وزن هر مکعب چوبی (گرم) : x $\Rightarrow 4x=60 \Rightarrow x=\frac{60}{4}=15$ گرم $\Rightarrow x=15$

اکنون به مثال زیر دقت کنید:

مریم دو نوع مکعب چوبی کوچک و بزرگ دارد، وزن ۵ مکعب کوچک و ۷ مکعب بزرگ روی هم ۳۱۰ گرم و وزن دو مکعب بزرگ و ۳ مکعب کوچک ۱۲۰ گرم است. وزن هر یک از مکعب‌ها را حساب کنید.

برای حل این مسئله، چون دو نوع مکعب با وزن‌های متفاوت داریم، باید از دو مجهول استفاده کنیم.

وزن مکعب کوچک : x وزن مکعب بزرگ : y

برای حل این مسئله، باید دو معادله‌ی مقابل هم‌زمان حل شوند.

$\begin{cases}5x+7y=310\\3x+2y=120\end{cases}$

چون اگر هر معادله را به تنهایی بخواهیم حل کنیم، بی‌شمار جواب خواهیم داشت.

اگر چند معادله با چند مجهول داشته باشیم، به آن دستگاه معادلات می‌گوییم. برای مثال برای حل مسئله‌ی بالا، یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی داریم.

برای حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی، روش‌های متفاوتی وجود دارد که ما سه روش را برای شما توضیح می‌دهیم.

۱- روش رسم ۲- روش حذفی ۳- روش جایگزینی

دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی بالا را به روش حذفی حل می‌کنیم، یعنی ابتدا ضریب یکی از مجهول‌ها را قرینه می‌کنیم و سپس مقدار مجهول دیگر را حساب می‌کنیم.

$$\begin{matrix}-3\\5\end{matrix}\begin{cases}5x+7y=310\\3x+2y=120\end{cases}\Rightarrow+\begin{cases}-15x-21y=-930\\15x+10y=600\end{cases}$$

$$-11y=-330\Rightarrow y=\frac{-330}{-11}=30\Rightarrow y=30$$

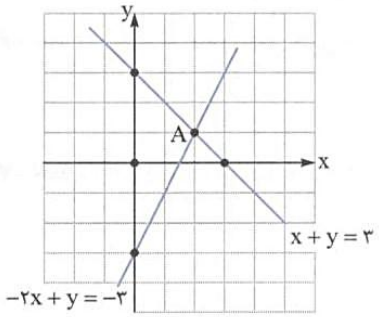
اکنون در یکی از معادلات (به طور دلخواه) مقدار y را قرار می‌دهیم و مقدار x را می‌یابیم.

$$3x+2y=120\Rightarrow 3x+2\times30=120\Rightarrow 3x+60=120\Rightarrow 3x=120-60=60\Rightarrow x=\frac{60}{3}=20\Rightarrow x=20$$

روش رسم برای حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی: اگر معادله‌های یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی را به عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات نقطه‌ی برخورد این دو خط، همان جواب دستگاه معادلات است. فقط باید توجه داشت که نمودارهای دو خط، کاملاً دقیق رسم شوند، چون در غیر این صورت جواب درست نخواهد بود.

$\begin{cases}x+y=3\\-2x+y=-3\end{cases}$ دستگاه مقابل را به روش رسم حل کنید.

هر یک از معادلات دستگاه را معادله‌ی یک خط راست در نظر گرفته و روی صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم.



$x+y=3$

x	۰	۳
y	۳	۰

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\left|\begin{matrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\end{matrix}\right.$

$-2x+y=-3$

x	۰	۲
y	−۳	۱

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\left|\begin{matrix}\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\end{matrix}\right.$

همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$، محل برخورد دو خط و جواب دستگاه است، یعنی: $x=2, y=1$

اگر معادلات دو خط را داشته باشیم و بخواهیم نقطه‌ی برخورد دو خط را بیابیم، فقط کافی است که معادلات دو خط را در یک دستگاه قرار دهیم و دستگاه معادلات را حل کنیم، پاسخ دستگاه، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط است.

مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $3x+2y=1$ و $x+5y=9$ را بیابید.

معادلات دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و سپس دستگاه معادلات را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}3x+2y=1\\x+5y=9\end{cases}$$

این دستگاه را به روش حذفی حل می‌کنیم:

$$-3\begin{cases}3x+2y=1\\x+5y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y=1\\-3x-15y=-27\end{cases}$$

$$-13y=-26\Rightarrow y=\frac{-26}{-13}=2\Rightarrow y=2$$

بنابراین نقطه‌ی برخورد دو خط، نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ است.

$$x+5y=9\Rightarrow x+5\times2=9\Rightarrow x=9-10\Rightarrow x=-1$$

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، آن‌گاه دستگاه دارای یک جواب است. یعنی یک نقطه‌ی برخورد برای دو خط وجود دارد. در واقع دو معادله‌ی دستگاه، معادلات دو خط متقاطع هستند.

در دستگاه $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$ نسبت ضرایب x، $\frac{2}{5}$ و نسبت ضرایب y، $\frac{3}{2}-$ است و $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{2}-$؛ بنابراین این دستگاه دارای یک جواب است. یعنی معادلات مربوط به دو خط متقاطع‌اند.

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد یعنی دو معادله‌ی خط داده‌شده، مربوط به دو خط موازی هستند، بنابراین نقطه‌ی برخورد ندارند.

در دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 6x-4y=5 \end{cases}$ نسبت ضرایب x، مساوی $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$ و نسبت ضرایب y، $\frac{-2}{-4}$ یا $\frac{1}{2}$ است و چون این دو نسبت مساوی‌اند (و مخالف $\frac{6}{5}$ هستند) بنابراین این دستگاه جواب ندارد و دو معادله‌ی دستگاه مربوط به دو خط موازی است.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{6}=\frac{1}{2} \\ \frac{-3}{-4}=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \neq \boxed{\frac{6}{5}} \Rightarrow \text{دستگاه جواب ندارد}$$

نسبت اعداد سمت راست تساوی‌ها

حل دستگاه به روش جایگزینی (روش جای‌گذاری یا روش تبدیلی): در این روش، با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از متغیرها را برحسب متغیر دیگر حساب می‌کنیم. سپس با جایگزینی آن متغیر در معادله‌ی دیگر، به یک معادله‌ی یک‌مجهولی می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم و سپس متغیر دوم را حساب می‌کنیم.

دستگاه معادلات مقابل را حل کنید. $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+3y=15 \end{cases}$

مرحله‌ی اول: از معادله‌ی بالایی مقدار x را برحسب y حساب می‌کنیم. $x-y=5 \Rightarrow x=5+y$

مرحله‌ی دوم: در معادله‌ی پایینی به جای x، مقدار مساویش یعنی «$5+y$» را قرار می‌دهیم تا معادله‌ی پایینی، یک‌مجهولی شود و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$2x+3y=15 \Rightarrow 2(5+y)+3y=15 \Rightarrow 10+2y+3y=15 \Rightarrow 5y=15-10=5 \Rightarrow y=\frac{5}{5}=1 \Rightarrow y=1$$

مرحله‌ی سوم: در یکی از معادلات (به دلخواه) مقدار y (یعنی عدد ۱) را قرار می‌دهیم و سپس مقدار x را حساب می‌کنیم.

$$x-y=5 \Rightarrow x-1=5 \Rightarrow x=6$$

معادله‌ی توانی: اگر در یک معادله، مجهول در توان عدد باشد، آن را معادله‌ی توانی می‌گوییم. برای حل معادله‌ی توانی، باید سعی کنیم که پایه‌های دو عدد مساوی شوند و سپس پایه‌ها را حذف کنیم و توان‌ها را مساوی هم قرار دهیم و معادله را حل کنیم.

معادله‌ی مقابل را حل کنید. $3^{x+3}=3^{11}$

$$3^{x+3}=3^{11} \Rightarrow x+3=11 \Rightarrow x=11-3 \Rightarrow x=8$$

معادله‌ی مقابل را حل کنید. $3^{2x+1}=27$

ابتدا عدد ۲۷ را تجزیه می‌کنیم تا پایه‌ها برابر شوند. $27=3^3$

$$\Rightarrow 3^{2x+1}=3^3 \Rightarrow 2x+1=3 \Rightarrow 2x=3-1=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow x=1$$

اگر در معادلات توانی، پایه‌ها دو عدد اول متفاوت و غیرقابل تجزیه باشند، توان‌های دو عدد باید مساوی صفر باشند.

معادله‌ی توانی مقابل را حل کنید. $۲^{۳x+۱}=۵^{۵x+y}$

چون پایه‌ها عددهای اول متفاوت هستند، بنابراین باید توان‌ها مساوی صفر باشند.

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

$$۵x+y=۰ \Rightarrow ۵\times(-\frac{۱}{۳})+y=۰ \Rightarrow y=\frac{۵}{۳}$$

WWW.WIKI-DARS.IR
WWW.CLASS8OM.IR