

قسمت سوم: معادله‌ی خط

سوال ۱: نمودار $3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0$ نمایش است.

توجه: قرینه نسبت به محور طول، محور عرض، مبدأ، نیم‌ساز ناحیه‌ی ۱ و ۳ و نیم‌ساز ناحیه‌ی ۲ و ۴ را بدانید.

سوال ۲: معادله‌ی قرینه‌ی خط $3x - 2y = 1$ نسبت به محور طول کدام است؟

$$3x + 2y = 1 \quad (۱)$$

$$2x - 3y = 1 \quad (۲)$$

$$3x - 2y = 1 \quad (۳)$$

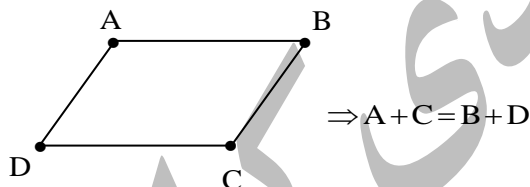
$$x + y = 1 \quad (۴)$$

نکته: مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB:



$$M = \frac{A+B}{2}$$

نکته: در مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع، مجموع مختصات دو رأس مقابل، با مجموع مختصات دو رأس مقابل دیگر، برابر است:



نکته: حرکات شتابدار، خطی نیستند. مثلاً برخواستن یا نشستن هواپیما، انداختن سنگ یا تیر. همچنین مساحت دایره نسبت به شعاع یا حاصل‌ضرب ۲ عدد صحیح متوالی، رابطه‌ی خطی نیستند.

نکته: معادله‌ی خط‌های مبدأ گذر که از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ می‌گذرند، به صورت $y = \frac{y_A}{x_A}x$ است.

مثال: معادله‌ی خطی که از مبدأ و نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، $y = \frac{-3}{5}x$ است.

سوال ۳: زاویه‌ای که خط $y = -\sqrt{3}x$ با جهت مثبت محور طول می‌سازد، چند درجه است؟

$$۱۵۰ \quad (۴)$$

$$۱۲۰ \quad (۳)$$

$$۶۰ \quad (۲)$$

$$۳۰ \quad (۱)$$

نکته: در سوالاتی که می‌گویند به‌ازای تمام مقادیر m یا a، اجازه داریم هر عددی حقیقی را به‌جای m یا a قرار دهیم.

سوال ۴: خط با معادله $(2a+1)x + (3a+1)y + a = 0$ به‌ازای جميع مقادیر a ، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

(۱) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

سوال ۵: بر روی خط $3x + 5y = 37$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار

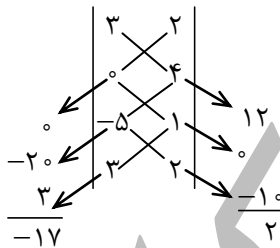
نکته: معادله‌ی خطی که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q می‌باشد، از رابطه $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ به‌دست می‌آید.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن -2 باشد.

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow 3x - \frac{1}{2}y = 1$$

نکته: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن داده شده است (روش بند کفشی):

مثال: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد، چند واحد است؟



$$\Rightarrow S = \frac{|-17 - 2|}{2} = \frac{19}{2} = 9 \frac{1}{2}$$

توجه: شیب سطح شیب‌دار با شیب خط، متفاوت است.

سوال ۶: کدام یک از چهار خط زیر، دارای شیب کم‌تری هستند؟

(۱) d_1 (۲) d_2
(۳) d_3 (۴) d_4

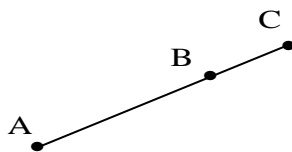
توجه: نام دیگر شیب، ضریب زاویه است.

نکته: شیب خطی که از نقاط $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر است با: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

نکته: شرط قرار گرفتن ۳ نقطه روی یک خط راست (استقامت):

شیب $AB = BC$ یا شیب $AB = AC$

نکته: فاصله‌ی نقطه از نقطه:



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: مساحت مربعی که یک رأس آن نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و یک ضلع آن روی خط $4x - 3y = -2$ قرار دارد،

چند واحد است؟

جواب:

$$4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

شیب خط:

نکته:

(الف) شیب این خطوط، مثبت است: طول + زاویه تند با جهت مثبت محور طول دارند.

(ب) شیب این خطوط، منفی است: زاویه باز با جهت مثبت محور طول دارند.

نکته: شیب خطی که طول از مبدأ آن، p و عرض از مبدأ آن q می‌باشد برابر است با: $-\frac{q}{p}$.

نکته: شرط موازی بودن دو خط: برابر بودن شیب‌های آن‌ها است.

نکته: شرط عمود بودن دو خط: حاصلضرب شیب‌هایشان، -1 باشد یا شیب یکی از خط‌ها، قرینه و معکوس دیگری باشد.

نکته: نقطه‌ی برخورد دو خط، با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید.

سوال ۷: قرینه خط (a) به معادله‌ی $3x - 2y = 1$ را نسبت به خط $x - y = 4$ رسم کردیم و نام آن را (a')

گذاشتیم. مختصات نقطه‌ی برخورد خط (a) و (a') کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -11 \end{bmatrix} \quad (1)$$

سوال ۸: m یک عدد صحیح مثبت است. خط‌های $y = mx - 1$ و $13x + 11y = 700$ یک‌دیگر را در نقطه‌ای با مختصات صحیح قطع کرده‌اند. در این صورت m برابر است با:

- (۱) فقط ۴ (۲) ۴ یا ۵ یا ۶ (۳) فقط ۶ (۴) فقط ۵

نکته: شرایط وجود جواب برای دستگاه دو معادله و دو مجهول:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو خط متقاطع‌اند. پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط موازی‌اند پس نقطه‌ی برخورد ندارند. یعنی دستگاه جواب ندارد.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط برهم منطبق‌اند پس بی‌شمار جواب وجود دارد.

سوال ۹: m چند باشد تا دستگاه $\begin{cases} x + my + z = -1 \\ 2x + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$ جواب داشته باشد ولی منحصر به فرد نباشد؟

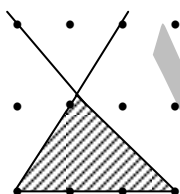
- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) برای m مقداری وجود ندارد.

نکته: مقدار مساحت محصور بین خطوط به معادله $y = ax + nb$ ، $y = mx + np$ و $y = cx + nd$ ، n^2

برابر مساحت محصور بین خطوط به معادله $y = ax + b$ ، $y = mx + p$ و $y = cx + d$ است.

به‌طور مثال مقدار مساحت محصور بین خطوط $y = 3x + 20$ و $y = 2x - 15$ و $y = -x + 35$ و $y = -x + 7$ مساحت محصور بین خطوط به معادله‌های $y = 3x + 4$ و $y = 2x - 3$ و $y = -x + 7$ است.

سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی در شکل مقابل چند واحد است؟



- (۱) ۲
(۲) ۱/۸
(۳) ۱/۶
(۴) ۱/۵

سوال ۱۱: مساحت سطح محصور در نمودار $x^2y + xy^2 - xy = 0$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱/۲ (۴) ۳/۴

سوال ۱۲: دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ انتخاب کردیم. احتمال آن که مجموع دو عدد انتخاب شده، بین ۱ و ۲ باشد، چه قدر است؟

- (۱) ۱/۸ (۲) ۳/۸ (۳) ۱/۳ (۴) ۵/۸

سؤال ۱۳: علی می‌خواست با یک سرعت ثابت، از شهر A به شهر B برود. او حساب کرد که اگر سرعتش، 5 km/h بیشتر شود، ۵ ساعت زودتر می‌رسد و اگر سرعتش 10 km/h بیش‌تر شود، ۸ ساعت زودتر

می‌رسد. سرعت ثابت او در ابتدا چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

پاسخ تشریحی سؤالات قسمت سوم (معادله‌ی خط)

۱- از ۳ خط تشکیل شده است:

$$3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0 \Rightarrow xy(3x + 2y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

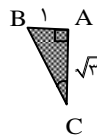
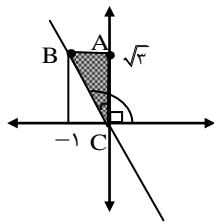
۲- گزینه (۱)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{محور طول}]{\text{قرینه نسبت به}} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

کافی است در معادله‌ی خط، به جای y ، $-y$ قرار دهیم:

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2(-y) = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 1$$

۳- گزینه (۳) با رسم خط داریم:



$$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

۴- گزینه (۴) به جای a دو مقدار قرار داده و دو معادله خط به دست آمده را درون دستگاه قرار داده و مختصات برخورد را به دست آوریم یا ابتدا عددی به جای a قرار دهیم که مضرب x صفر شود و پس از به دست آوردن y ، به جای a عددی قرار دهیم که مضرب y صفر شود و بتوانیم x را به دست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} a = -\frac{1}{3} &\Rightarrow 0x + \left(-\frac{3}{3} + 1\right)y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -1 \\ a = -\frac{1}{3} &\Rightarrow \left(-\frac{2}{3} + 1\right)x + 0y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۵- گزینه (۲)

$$\Delta y = 37 - 3x \Rightarrow y = \frac{37 - 3x}{5}$$

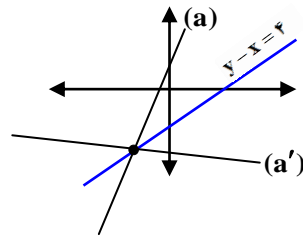
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 5 \\ x = 9 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- گزینه (۲)

۷- گزینه (۱) خط (a) و خط (a') و خط تقارن (یعنی $x - y = 4$) یک‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس کافی است نقطه برخورد خط (a) (یعنی $3x - 2y = 1$) و خط تقارن (یعنی $x - y = 4$) را به دست آوریم. داریم:

$$-2 \times \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = -7 \Rightarrow y = -11$$



۸- گزینه (۳) با حل دستگاه، x را بر حسب m به دست می آوریم:

$$11 \times \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ mx - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ 11mx - 11y = 11 \end{cases}$$

$$(11m + 13)x = 711 \Rightarrow x = \frac{711}{11m + 13}$$

تجزیه ۷۱۱ می شود 79×3^2 . پس $11m + 13$ باید شمارندهی ۷۱۱ باشد و شمارنده های ۷۱۱، اعداد $\{1, 3, 9, 79, 237, 711\}$ هستند. داریم:

$$\left. \begin{aligned} 11m + 13 = 1 &\Rightarrow m = -\frac{12}{11} \text{ غق ق} \\ 11m + 13 = 3 &\Rightarrow m = -\frac{10}{11} \text{ غق ق} \\ 11m + 13 = 9 &\Rightarrow m = -\frac{4}{11} \text{ غق ق} \\ 11m + 13 = 79 &\Rightarrow \boxed{m = 6} \\ 11m + 13 = 237 &\Rightarrow m = \frac{224}{11} \text{ غق ق} \\ 11m + 13 = 711 &\Rightarrow m = \frac{698}{11} \text{ غق ق} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فقط } m = 6 \text{ قابل قبول است.}$$

۹- گزینه (۲) z را بر حسب x به دست می آوریم و در دستگاه، جایگزین می کنیم:

$$2x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + my + (1 - 2x) = -1 \\ mx + y - (1 - 2x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + my = -2 \\ (m + 2)x + y = 2 \end{cases}$$

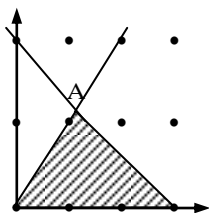
شرط انطباق دو خط را در نظر می گیریم. داریم:

$$\frac{-1}{m+2} = \frac{m}{1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

۱۰- گزینه (۲)

(۱) خط: $y = x$

(۲) خط: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6$

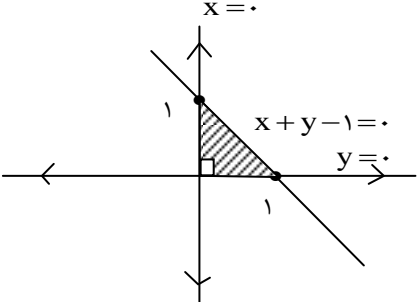


$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 2x + 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

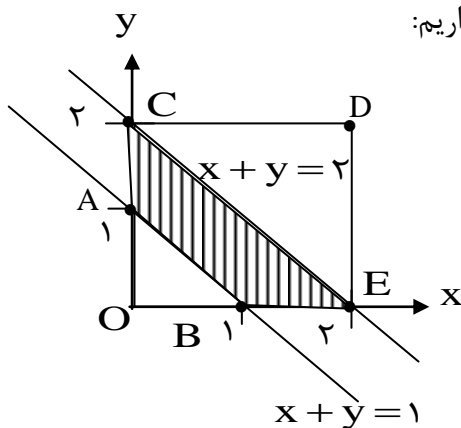
$$S = \frac{\frac{6}{5} \times 3}{2} = \frac{18}{10} = 1/8$$

۱۱- گزینه (۳)

$$x^2y + xy^2 - xy = 0 \Rightarrow xy(x+y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

$$S = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$


۱۲- گزینه (۲) دو عدد حقیقی را x و y در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله $0 < x < 2$ و $0 < y < 2$ است. از طرفی $1 < x+y < 2$ می‌باشد. با توجه به نمودار رسم شده‌ی مقابل داریم:



$$S_{ABEC} = S_{OCE} - S_{OAB} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{ABEC}}{S_{OCDE}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 \times 2} = \frac{3}{8} \text{ احتمال}$$

۱۳- گزینه (۲) اگر علی با سرعت اولیه‌ی V_1 در مدت زمان t به شهر B می‌رسید، با توجه به مفروضات مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (V_1 + 5)(t - 5) = V_1 t \\ (V_1 + 10)(t - 8) = V_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t - 5V_1 = 25 \\ 10t - 8V_1 = 80 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 15$$

توجه: دانش‌آموز عزیز، از کتاب مرشد نهم فصل ۶، سوال‌های ۳۲۰، ۳۲۱ و ۳۲۲ را تمرین کنید.