فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)
۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج
۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی جنگران
۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان جنگران
۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه
۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه
۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه

۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه
۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل

۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)
۱۱) طراح تست آزمون های جنگران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان
۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸
Rahim.ghahreman

لیست جزوات ریاضیات (مولف :رحیم قهرمان)

1.ریاضیات تجربی جامع(دهم ،یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

2.ریاضی پایه و حسابان (ریاضی دهم ،حسابان یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

3.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه کنکور)

4.حسابان دوازدهم (ویژه کنکور)

5.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه امتحان نهایی)

6.حسابان دوازدهم (ویژه امتحان نهایی)

7.ریاضی یازدهم تجربی (ویژه کنکور)

8.حسابان یازدهم (ویژه کنکور)

9.ریاضی دهم و ریاضی تجربی (ویژه کنکور)

10.ریاضی نهم (ویژه تیز هوشان)

11.ریاضی نهم (ویژه امتحان نهایی)

ریاضی نهم تیزهوشان (۱)

(فصل پنجم عبارت های جبری)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور

مولف: رحیم قهرمان درسنامه (۱)

۱) عبارت های جبری: عبارت هایی هستند که از ترکیب اعداد حقیقی و حروف (متغیرها) به وسیله اعمال ریاضی به دست می آیند، مانند $3x^2y^3 - 5xy + 11$ ، ۵۰ که هر کدام از این عبارت ها یک عبارت جبری است.

۲) یک جمله ای: اگر یک عبارت جبری به صورت ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی از یک یا چند متغیر باشد، آن عبارت جبری را یک جمله ای می نامیم. به عنوان مثال $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $4xy^3$ (تمام اعداد حقیقی یک جمله ای هستند)

۳) ضریب عددی یک جمله ای: در یک جمله ای ها به عددی که در یک جمله ای است ضریب عددی یک جمله ای می گویند.

۴) درجه یک جمله ای: در جدول زیر درجه ی عبارت یک جمله ای را با یک مثال نشان داده ام.

یک جمله ای	ضریب عددی	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به تمام متغیرهایش
$5x^3y^7$	۵	۳ = توان x	۷ = توان y	مجموع توان ها = $3+7=10$

تست: درجه ی یک جمله ای $x^ny^mz^k$ نسبت به x و y برابر ۵، نسبت به دو متغیر y و z برابر ۴ و نسبت به دو متغیر x و z برابر ۳ می باشد، درجه این یک جمله ای نسبت به سه متغیر x و y و z چند است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۱

درجه $x^ny^mz^k$ نسبت به دو متغیر x و y $= n+m=5$

درجه $x^ny^mz^k$ نسبت به دو متغیر z و y $= m+k=4$

درجه $x^n y^m z^k$ نسبت به دو متغیر x و z $= n+k=4$

حال با جمع طرفین سه رابطه ی بالا است آمده داریم:

$$2n+2k+2m=12 \xrightarrow{\div 2} m+n+k=6$$

بنابراین درجه ی $x^n y^m z^k$ نسبت به تمام متغیرهایش برابر ۶ است.

یک جمله ای های متشابه: یک جمله ای هایی هستند که بعد از ساده کردن، قسمت حرفی و توان آن ها یکسان باشد.

مثال: دو یک جمله ای $a^{m+2} b c^{n+2}$ و $-\frac{3}{2} a^3 d^y b^k$ متشابه اند، حاصل $kmn+y$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) -2 ۴) 2

پاسخ گزینه ی ۳) در دو یک جمله ای متشابه، پارامترهای مشابه توان های یکسان دارند و اصلاً فقط آن هایی در ضرایب یکسان دیده می شوند. اگر پارامتری دیده نشود، توان آن صفر است.

$$\left.\begin{array}{l} 3=m+2 \Rightarrow m=1 \\ k=1 \\ y=0 \\ n+2=0 \Rightarrow n=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow mkn+y=-2+0=-2$$

عملیات روی یک جمله ای ها

۱) جمع یا تفریق یک جمله ای: جمع یا تفریق، تنها روی یک جمله ای هایی انجام پذیر است که متشابه باشند. برای این منظور کافی است ضرایب یک جمله ای ها را جمع یا تفریق کنیم و متغیر یا متغیرها را همراه با توان آن ها در جلوی آن بنویسیم.

۲) ضرب یک جمله ای ها: ابتدا ضرایب را در هم ضرب می کنیم، سپس متغیرهای یکسان را طبق قواعد مربوط به ضرب اعداد توان دار در هم ضرب می کنیم.

۴) به توان رساندن تک جمله ای ها: برای به توان رساندن تک جمله ای ها ابتدا ضریب تک جمله ای را به توان می رسانیم ، سپس توان تک تک متغیرها را در توان جدید ضرب می کنیم.

تست: حاصل عبارت $(-\frac{1}{2}xy^2)^3(\frac{2}{x^2y^3})^2(-4x)$ کدام است؟ ($x,y \neq 0$)

(پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۴)

۱) -2 ۲) 2

۳) $2x$ ۴) $2y$

پاسخ: گزینه ی ۲)

$$(-\frac{1}{2}xy^2)^3(\frac{2}{x^2y^3})^2(-4x) = -\frac{1}{8}x^3y^6 \times \frac{4}{x^4y^6} \times (-4x)$$

$$= (-\frac{1}{8}\times 4 \times (-4))(x^3y^6 \times \frac{1}{x^4y^6} \times x) = \frac{2x^4y^6}{x^4y^6} = 2$$

تست: عبارت $2x^3+2ax^2y-x^2y+y^3-b^2y^3$ برحسب دو متغیر x,y یک جمله ای است ، کدام گزینه درست است؟

۱) $|b|=1$, $a=-\frac{1}{2}$ ۲) $|b|=1$ یا $a=-\frac{1}{2}$

۳) $|b|=1$ یا $a=\frac{1}{2}$ ۴) $|b|=1$ و $a=\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ی ۴) حاصل جمع ها را انجام می دهیم و جملات مشابه را باهم در نظر می گیریم.

$$2x^3+(2a-1)x^2y+(1-b^2)y^3$$

برای آنکه عبارت تک جمله ای شود باید: $1-b^2=0$ و $2a-1=0$ و در نتیجه $a=\frac{1}{2}$ و $b=\pm 1$ شود یعنی $a=\frac{1}{2}$ و $|b|=1$

درسنامه‌ی (۴) چندجمله‌ای

۱) چندجمله‌ای: عبارتی جبری است که به صورت جمع جبری تعدادی تک جمله‌ای غیر متشابه باشد.

نکته: تک جمله‌ای ها هم چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

۲) درجه چندجمله‌ای:

الف) برحسب یک متغیر: برابر با بزرگترین توان آن متغیر است.

ب) برحسب تمام متغیرها: برابر با بزرگترین درجه‌ی جمله‌های آن است.

تست: می‌خواهیم به جای x عددی حقیقی بگذاریم. در چند تا از جمله‌ای های زیر هیچ گاه ممکن نیست به مقدار صفر برسیم؟ (پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۲)

$2x^2-5x+2$ و x^2+1 و x^3+1 و x^4+1 و x^2+2x+1 و $5x-2$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱) چندجمله‌ای های x^2+1 و x^4+1 به ازای هر مقدار حقیقی x هیچ گاه صفر نمی‌شوند زیرا همواره مثبت هستند.

تست: اگر A و B و C به ترتیب چندجمله‌ای های درجه دوم، سوم و چهارم برحسب x باشند، $A(B+C)$ برحسب x از درجه‌ی چند است؟

۱) از درجه ۱۴ ۲) از درجه ۲ تا درجه ۶ می‌تواند تغییر کند.

۳) همواره از درجه ۱۸ است ۴) همواره از درجه ۶ است.

پاسخ: گزینه‌ی ۴) چون B و C با هم جمع شده‌اند، درجه $B+C$ برابر $Max(3,4)$ یعنی ۴ می‌باشد؛ همچنین $B+C$ در A ضرب شده است، درجه‌ی $A(B+C)$ برابر $2+4$ یعنی ۶ می‌باشد.

تست: اگر چندجمله‌ای $3x^2y^5+x^ny^6+5xy^2z$ نسبت به متغیرهای x و y از درجه ۹ باشد، عضوهای کدام مجموعه زیر می‌توانند همه مقادیر n باشند؟

۱) $\{n \in W \mid n<3\}$ ۲) $\{n \in Z \mid n<4\}$ ۳) $\{n \in N \mid n<4\}$ ۴) $\{n \in W \mid n<4\}$

پاسخ: گزینه ی ۴

$$3x^2y^5+x^ny^6+5xy^2z \quad , \quad n<4 \,,\, n \in W \Rightarrow \{n \in W \mid n<4\}$$

$$\Rightarrow n+6 \leq 9 \Rightarrow n \leq 3$$

n می‌تواند عدد صحیحی بین صفر تا ۳ باشد، اگر n عدد منفی باشد، عبارت چندجمله‌ای نیست.

تست: حاصل چندجمله‌ای $x^5-12x^4+12x^3-12x^2+12x-1$ به ازای $x=11$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) صفر ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ی ۳) با توجه به فرض مسئله $x=11 \Rightarrow x+1=12$ از طرفی دیگر می‌توان نوشت:

$$x^5-12x^4+12x^3-12x^2+12x-1 = x^5-(x+1)x^4+(x+1)x^3-(x+1)x^2+(x+1)x-1$$

$$= x^5-x^5-x^4+x^4+x^3-x^3+x^2+x-1 = x-1 = 11-1 = 10$$

۴) چندجمله‌ای استاندارد: اگر چندجمله‌ای را به حسب توان‌های نزولی یک متغیر (از بزرگ به کوچک) مرتب کنند، چندجمله‌ای حاصل را چندجمله‌ای استاندارد نسبت به آن متغیر می‌نامند.

به عنوان مثال:

$$2x^3-5x^4-\frac{1}{2}x^7+4 \xrightarrow{\text{نمایش استاندارد}} -\frac{1}{2}x^7-5x^4+2x^3+4$$

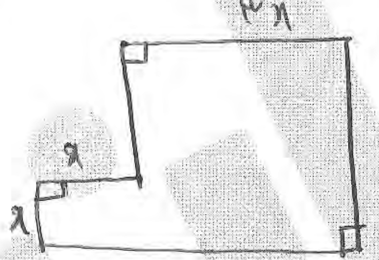
مولف:رحیم قهرمان

۴) جمع و تفریق چندجمله‌ای‌ها: برای جمع و تفریق دو یا تعداد بیشتر چندجمله‌ای‌ها جمله‌های متشابه آن‌ها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. اگر دو یا چند چندجمله‌ای را با هم تفریق کنیم، درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل، حداکثر برابر بزرگ‌ترین درجه‌ی چندجمله‌ای مفروض است.

۵) ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای: با توجه به خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع، کافی است یک جمله‌ای را در هر کدام از جملات چندجمله‌ای ضرب کنیم.

۶) ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای: برای ضرب دو چندجمله‌ای، کافی است هر کدام از جملات یکی از چندجمله‌ای‌ها را در جملات چندجمله‌ای دیگر ضرب کنیم.

تست: در شکل زیر، مجموع عدد مساحت و عدد محیط شکل را به صورت $ax(bx+c)$ نشان می‌دهیم. اگر a و b و c سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط} = 3x+2x+x+x+4x+3x = 14x \\ \text{مساحت} = x^2+9x^2 = 10x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 10x^2+14x = 2x(5x+7)$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=5,\ c=7 \Rightarrow a+b+c=14$$

تست: اگر $x^2-3x-7=0$ باشد، حاصل $x^3-16x-11$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

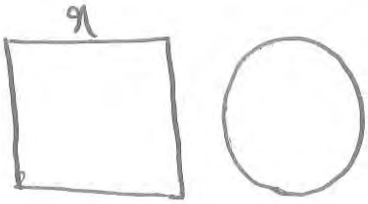
پاسخ: گزینه‌ی ۴) با استفاده از فرض تست داریم:

$$x^2-3x-7=0 \Rightarrow x^2=3x+7 \xrightarrow{x(x)} x^3=3x^2+7x$$

$$\xrightarrow{x^2=3x+7} x^3=3(3x+7)+7x \Rightarrow x^3=9x+21+7x \Rightarrow x^3=16x+21$$

$$\Rightarrow x^3-16x-21=0$$

تست: مجموع طول مربع و شعاع دایره در شکل زیر ۱۰ است. اگر طول ضلع مربع را x بگیریم، در مجموع مساحت مربع و دایره برحسب x، ضریب x^2 چند است؟



۱) $2+\pi$ ۲) $1-\pi$

۳) $\pi-1$ ۴) $1+\pi$

پاسخ: گزینه ۴) شعاع دایره $10-x$ می‌شود (چون مجموع شعاع دایره و ضلع مربع، ۱۰ است) در نتیجه:

$$\text{مجموع مساحت دایره و مربع} = x^2+\pi(10-x)^2 = x^2+\pi(10-x)(10-x)$$

$$= x^2+\pi(100-10x-10x+x^2) = x^2+\pi(100-20x+x^2)$$

$$= (1+\pi)x^2-100\pi-20\pi x \Rightarrow \text{ضریب } x^2 = 1+\pi$$

تست: اگر $5a=3c=4b=2d=e$ و $a+2b+3c+4d+5e=k$ باشد، کوچکترین مقدار مثبت را برای k می‌خواهیم که برای آن a و b و c و d و e همه عدد صحیح مثبت شوند. آن مقدار کدام است؟
(واترلو - ۲۰۰۰)

۱) ۸۷ ۲) ۵۲۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۲)

$$\left.\begin{aligned} &5a=e \Rightarrow a=\tfrac{1}{5}e ,\ 4b=e \Rightarrow b=\tfrac{1}{4}e \\ &3c=e \Rightarrow c=\tfrac{1}{3}e ,\ 2d=e \Rightarrow d=\tfrac{1}{2}e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tfrac{1}{5}e+\tfrac{1}{2}e+e+2e+5e=k$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}e+8e=k \Rightarrow \frac{87}{100}e=k \Rightarrow e=\frac{10}{87}k$$

مولف:رحیم قهرمان

حال اگر بخواهیم اعداد d، c، b، a و e صحیح باشند، e باید بر اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر باشد، باید حداقل عدد ۶۰ باشد (ک م م اعداد) درنتیجه:

$$e=60 \Rightarrow 60=\frac{10}{87}k \Rightarrow k=6\times 87=522$$

درسنامه ی (۳) اتحاد

۱) تعریف اتحاد: اگر دو عبارت جبری گونه ای باشند که به ازای همه مقادیر متغیر (x) در حوزه ی تعریف آن ها، دو عبارت مقدارهای یکسانی داشته باشند، تساوی بین آن ها را اتحاد می نامند.

تست: اگر تساوی

$$x^3-6x^2+11x-6=x^2(x-a)-5x(x-b)+(x-c)-1$$

به ازای همه ی مقادیر x برقرار باشد، $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ی (۲) چون تساوی به ازای همه مقادیر x همواره برقرار است، بنابراین با یک اتحاد روبرو هستیم. از طرف دیگر می دانیم در یک اتحاد، ضرایب جملات هم توان در طرفین تساوی باهم برابر هستند، بنابراین:

$$x^2(x-a)-5x(x-b)+(x-c)-1=x^3\underbrace{-ax^2-5x^2}_{\text{فاکتور از } -x^2}+\underbrace{5bx+x}_{\text{فاکتور از } x}-c-1$$

$$=x^3-(a+5)x^2+(5b+1)x-c-1 \Rightarrow$$

$$x^3-6x^2+11x-6=x^3-(a+5)x^2+(5b+1)x-c-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 \text{ ضریب}: 1=1 \checkmark \\ x^2 \text{ ضریب}: -6=-(a+5) \Rightarrow a=1 \\ x \text{ ضریب}: 11=5b+1 \Rightarrow b=2 \\ \text{مقدار ثابت}: -6=-c-1 \Rightarrow c=5 \end{cases} \Rightarrow \frac{a+c}{b}=\frac{6}{2}=3$$

تست: اگر تساوی $(x+1)(x+2)(x+a) = x^3+bx^2+cx+6$ یک اتحاد باشد،

حاصل $c+\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۴) با توجه به این که تساوی داده شده یک اتحاد است، باید به ازای هر عدد حقیقی برقرار باشد. اکنون می‌توان نوشت:

$x=0 \Rightarrow (1)(2)(a)=6 \Rightarrow a=3$

$x=-1 \Rightarrow 0=-1+b-c+6 \Rightarrow b-c=-5$

$x=-2 \Rightarrow 0=-8+4b-2c+6 \Rightarrow 2b-c=1$

حال از حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases} b-c=-5 \\ 2b-c=1 \end{cases}$ خواهیم داشت $b=6$ و $c=11$ در نتیجه

$c+\frac{b}{2}=11+\frac{6}{2}=14$.

روش‌های تجزیه: در تجزیه یک چند جمله‌ای روش‌های زیر مرسوم است:

۱) فاکتورگیری ۲) استفاده از اتحادها ۳) دسته‌بندی

۳) تجزیه روش فاکتورگیری: وقتی است که تمام یک جمله‌ای‌های عبارت جبری داده شده دارای عامل مشترکی هستند، که این عامل برابر است با یک جمله‌ای متشکل از همه‌ی حروف مشترک در جمله‌های چند جمله‌ای با کوچکترین.

تست: در عبارت $N=a+b+ab$ اگر $N+1$ عددی اول باشد، مقدار a^2b^2 کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۲۱ ۳) ۹ ۴) ۸۱۲۴

پاسخ: گزینه ۱)

$$N = a+b+ab \Rightarrow N = a(1+b)+b \Rightarrow N+1 = a(1+b)+b+1$$

$$\Rightarrow N+1 = (1+b)(1+a)$$

چون $N+1$ اول است پس یکی از $(1+b)$ و $(1+a)$ عدد یک هستند پس a یا b صفر است

که a^2b^2 برابر صفر است.

نکته: مجموع چند عبارت نامنفی زمانی صفر می‌شوند که تک تک آن عبارات صفر باشند به بیان ریاضی:

$$A^2+B^2+C^2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

تست: از رابطه‌ی $(x-5)^2+(2x+5y)^2+(2x+y-z)^2=0$ حاصل z کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\underbrace{(x-5)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(2x+5y)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(2x+y-z)^2}_{\text{نامنفی}}=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ 2x+5y=0 \xrightarrow{x=5} y=-2 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+y-z=0 \xrightarrow{x=5,\ y=-2} 10-2-z=0 \Rightarrow z=8$$

درسنامه‌ی (۴)

۱) اتحاد مربع دوجمله‌ای (مجموع دوجمله‌ای): $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

۲) اتحاد مربع دوجمله‌ای (مربع تفاضل دوجمله): $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

تست: مربع عدد $3\sqrt{3}-\sqrt{75}-\sqrt{5}$ برابر است با: (علوم و فنون هنر سراسری ۹۵)

۱) $92-8\sqrt{5}$ ۲) $17-4\sqrt{5}$ ۳) $92+4\sqrt{15}$ ۴) $17+4\sqrt{15}$

پاسخ: گزینه ی ۴) ابتدا عبارت را با استفاده از خواص رادیکال بازنویسی می کنیم:

$$3\sqrt{3}-\sqrt{75}-\sqrt{5}=3\sqrt{3}-\sqrt{3\times 25}-\sqrt{5}=3\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

$$=-2\sqrt{3}-\sqrt{5}\xrightarrow{\text{مربع عدد}}(-2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=(-2\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2+2(-2\sqrt{3})(-\sqrt{5})$$

$$=12+5+4\sqrt{15}=17+4\sqrt{15}$$

تست: حاصل عبارت $(a-b)^2+(a+b)^2-c^2$ در صورتی که a، b، c سه ضلع مثلث قائم الزاویه به وتر c باشند، کدام است؟

۱) c^2 ۲) a^2 ۳) b^2 ۴) a^2+2b^2

پاسخ: گزینه ی ۱)

$$(a-b)^2+(a+b)^2-c^2=a^2+b^2-2ab+a^2+b^2+2ab-c^2=2(a^2+b^2)-c^2$$

از طرفی چون a، b، c سه ضلع مثلث قائم الزاویه به وتر c می باشند، داریم:

$$2(a^2+b^2)-c^2=2c^2-c^2=c^2$$

تست: اختلاف مربعات دو عدد فرد متوالی همواره بر کدام عدد بخش پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ی ۴) دو عدد فرد متوالی به صورت $(2k+1)$ و $(2k-1)$ است. بنابراین:

$$(2k+1)^2-(2k-1)^2=4k^2+4k+1-(4k^2-4k+1)=4k^2+4k+1-4k^2$$

$$+4k-1=8k$$

پس حاصل، همواره بر ۸ بخش پذیر است.

۳) تجزیه با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای: هرگاه دو جمله از یک سه جمله ای مربع باشند و جمله سوم با دو برابر حاصلضرب جذرهای آن دو جمله برابر باشند، سه جمله ای داده شده با توجه به اتحادهای $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ قابل تجزیه است.

تست: اگر $a=2-\sqrt{3}$ و $b=2+\sqrt{3}$ باشد مقدار عددی عبارت a^2+b^2-2ab کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) $4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \xrightarrow[b=2+\sqrt{3}]{a=2-\sqrt{3}} \left(2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\right)^2$$

$$=(\cancel{2}-\sqrt{3}-\cancel{2}-\sqrt{3})^2=(-2\sqrt{3})^2=4\times 3=12$$

تست: حاصل $\dfrac{(a^{-m})^{-m}(a^{-n})^{-n}(a^{m})^{2n}}{(b^{-m})^{-m}(b^{-n})^{-n}(b^{2n})^{m}}$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{a}{b}\right)^{(m-n)^2}$ ۲) $\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+n)^2}$ ۳) $\left(\frac{b}{a}\right)^{(m-n)^2}$ ۴) $\left(\frac{b}{a}\right)^{(m+n)^2}$

پاسخ: گزینه ۲) با استفاده از قوانین توان عبارت تا حد امکان ساده می‌کنیم.

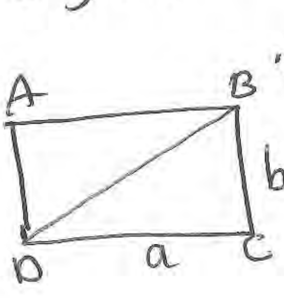
$$\frac{(a^{-m})^{-m}(a^{-n})^{-n}(a^{m})^{2n}}{(b^{-m})^{-m}(b^{-n})^{-n}(b^{2n})^{m}}=\frac{a^{m^2}\times a^{n^2}\times a^{2mn}}{b^{m^2}\times b^{n^2}\times b^{2mn}}$$

$$=\frac{a^{m^2+n^2+2mn}}{b^{m^2+n^2+2mn}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m^2+n^2+2mn}=\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+n)^2}$$

تست: اگر قطر یک مستطیل برابر ۱۰ و مساحت آن ۴۸ باشد محیط آن کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینه ۳) می‌دانیم اگر طول مستطیلی برابر a و عرض آن برابر b باشد طول قطر آن برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ و مساحت آن ab و محیط آن $2(a+b)$ می‌باشد.



$$\sqrt{a^2+b^2}=10 \Rightarrow a^2+b^2=100 \quad (1)$$

$$ab=48 \xrightarrow{\times 2} 2ab=96 \quad (2)$$

طرفین روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^2+b^2=100 \\ 2ab=96 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+2ab=196 \Rightarrow (a+b)^2=196 \Rightarrow a+b=14$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = 2(a+b) = 2\times 14 = 28$$

تست: اگر عبارت $x^2+m(m+1)x+36$ ، مربع کامل یک دو جمله‌ای باشد، مقدار مثبت m کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینه (۲)

$$x^2+m(m+1)x+36=A^2 \Rightarrow A=(x+6) \Rightarrow A^2=x^2+12x+36$$

$$\Rightarrow m(m+1)=12 \Rightarrow m=3$$

۴) نتایج دو اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله‌ای: (اتحادهای گاما)

1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

3) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ 4) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

تست: اگر مجموع دو عدد طبیعی ۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۴ باشد، مجموع مربعات آن‌ها کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) ۱۰۹   ۲) ۵۳   ۳) ۸۱   ۴) ۷۷

پاسخ: گزینه (۲)

$$\begin{cases} x+y=9 \\ xy=14 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9^2-28 \Rightarrow x^2+y^2=81-28$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=53$$

تست: اگر a و b دو عدد متمایز $(a \neq b)$ و داشته باشیم $a^2+1=2b$ و $b^2+1=2a$ آنگاه مقدار عدد ab چقدر است؟

۱) -10 ۲) 10 ۳) -5 ۴) 5

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا طرفین دو تساوی $a^2+1=2b$ و $b^2+1=2a$ را از هم کم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+1=2b \\ b^2+1=2a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} a^2+1-b^2-1=2b-2a \longrightarrow$$

$$a^2-b^2=-2(a-b) \Rightarrow (a-b)(a+b)=-2(a-b) \xrightarrow{a \neq b} a+b=-2$$

حال اگر طرفین دو تساوی را با هم جمع کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+1=2b \\ b^2+1=2a \end{array}\right\} \longrightarrow a^2+1+b^2+1=2(a+b) \Rightarrow a^2+b^2+2=2(a+b)$$

$$\xrightarrow{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab} (a+b)^2-2ab+2=2(-2) \Rightarrow (-2)^2-2ab+2=-4$$

$$\Rightarrow ab=5$$

اتحاد مزدوج: اگر حاصل ضرب $(a-b)(a+b)$ را انجام دهیم خواهیم داشت $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ که به این برابری اتحاد مزدوج می‌گویند. که در آن داریم:

$a=$ جمله اول , $b=$ جمله دوم

تست: حاصل عبارت $(\sqrt{10}+\sqrt{15}+5)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{30}$ ۲) $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ ۳) $5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{30}$

پاسخ: گزینه ۳)

$$(\sqrt{10}+\sqrt{15}+5)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = (\underbrace{\sqrt{2\times 5}+\sqrt{3\times 5}+5}_{\text{فاکتور از } \sqrt{5}})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5}\overbrace{(\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{\text{جمله اول}}+\underbrace{\sqrt{5}}_{\text{جمله دوم}})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}^{\text{اتحاد مزدوج}} = \sqrt{5}\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2\right)$$

$$=\sqrt{5}(2+3+2\sqrt{6}-5) = \sqrt{5}(5+2\sqrt{6}-5) = 2\sqrt{30}$$

تست: حاصل عبارت $\frac{1}{x}(x^2+4x-2)$ به ازای $x=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $7+\sqrt{13}$ ۳) $7-\sqrt{13}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا حاصل x^2 را به دست می‌آوریم. برای این منظور طرفین رابطه‌ی $x=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ را به توان دو می‌رسانیم.

$$x=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}} \Rightarrow x^2=\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 7+\sqrt{13}+7-\sqrt{13}-2\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right) \Rightarrow$$

$$x^2=14-2\left(\sqrt{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}\right) \Rightarrow x^2=14-2\sqrt{49-13} \Rightarrow$$

$$x^2=14-2\sqrt{36}=14-12=2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x}(x^2+4x-2) \xrightarrow{x^2=2} \frac{1}{x}(2+4x-2) = \frac{4x}{x}=4$$

تست: حاصل $(x+y)(x^2+y^2)+\frac{1}{5}y^4$ به ازای $x=20$ و $y=15$ کدام است؟

۱) 5×20^4 ۲) 4×20^4 ۳) 5×20^3 ۴) 4×20^3

پاسخ: گزینه ۱) با توجه به صورت مسئله $\frac{1}{5}(x-y)=\frac{1}{5}(20-15)=1$ بنابراین:

$$\frac{1}{5}(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+\frac{1}{5}y^4=\frac{1}{5}(x^2-y^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{5}y^4$$

$$= \frac{1}{5}(x^4 - y^4) + \frac{1}{5}y^4 = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{5}y^4 + \frac{1}{5}y^4 = \frac{1}{5}x^4 \xrightarrow{x=20} \frac{20^4}{5}$$

$$= \frac{20 \times 20^3}{5} = 4 \times 20^3$$

۲) تجزیه از راه اتحاد مزدوج: اگر در عبارتی دو جمله مربع کامل از هم کم شوند، می توان آن عبارت را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرد.

تست: عبارت $x^5 - 81x$ حداکثر به چند عامل گویا تجزیه می شود؟ (نمونه دولتی تجربی ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ تشریحی ۳)

$$x^5 - 81x = x(x^4 - 81) = x(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x(x-3)(x+3)(x^2+9)$$

مشاهده می شود که عبارت دارای ۴ عامل می باشد.

تست: اگر $a^4 - b^4 = 20$ و $a - b = 4$، حاصل $a^3 + ab^2 + a^2b + b^3$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

پاسخ تشریحی ۲) ابتدا به کمک اتحاد مزدوج می توان نوشت:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

اکنون می توان نوشت

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = 20 \xrightarrow{a-b=4} 4(a+b)(a^2+b^2) = 20$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2+b^2) = 5 \quad (*)$$

حال عبارت $a^3 + ab^2 + a^2b + b^3$ به کمک فاکتورگیری تجزیه می کنیم.

$$\underbrace{a^3 + ab^2}_{\text{فاکتور از } a} + \underbrace{a^2b + b^3}_{\text{فاکتور از } b} = \underbrace{a(a^2+b^2) + b(a^2+b^2)}_{\text{فاکتور از } a^2+b^2} = (a+b)(a^2+b^2)$$

$$\xrightarrow{(*)} (a+b)(a^2+b^2) = 5$$

تست: حاصل عبارت $\sqrt{4+96\sqrt{4+97\sqrt{4+98\times 102}}}$ کدام است؟ (عمومی دولتی تهران ۹۶)

۱) ۹۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۸ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

$$\sqrt{4+96\sqrt{4+97\sqrt{4+\underbrace{98\times 102}_{\text{مزدوج}}}}}=\sqrt{4+96\sqrt{4+97\sqrt{4+(100-2)(100+2)}}}$$

$$=\sqrt{4+96\sqrt{4+97\sqrt{4+100^2-4}}}=\sqrt{4+96\sqrt{4\times\underbrace{97\times 100}_{\text{مزدوج}}}}=\sqrt{4+96\sqrt{4+(98-2)(98+2)}}$$

$$=\sqrt{4+96\sqrt{4+98^2-4}}=\sqrt{4+\underbrace{94\times 98}_{\text{مزدوج}}}=\sqrt{4+(96-2)(96+2)}$$

$$=\sqrt{4+96^2-4}=96$$

درسنامه (۶) اتحاد یک جمله مشترک

۱) اتحاد یک جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

تست: اگر $ab=-3$ و $a-b=1$ باشد، حاصل عبارت $A=\dfrac{(x+2a)(x-2b)+1}{2x^2+4x+26}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱) ابتدا عبارت A را به کمک اتحاد جمله مشترک محاسبه می‌کنیم:

$$A=\frac{x^2+(2a-2b)x+(2a)(-2b)+1}{2(x^2+2x+13)}=\frac{x^2+2(a-b)x-4ab+1}{2(x^2+2x+13)}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر $ab=-3$ و $a-b=1$ در عبارت بالا داریم:

$$A=\frac{x^2+2x+13}{2(x^2+2x+13)}=\frac{1}{2}$$

تست: اگر $x^2-x-10=0$ باشد، آنگاه حاصل $(x+1)(x+2)(x-4)$ کدام است؟

۱) 8 ۲) -8 ۳) 2 ۴) -2

پاسخ: گزینه ۲) با توجه به فرض $x^2=x+10$ بنابراین:

$$(x+1)(x+2)(x-4)=(x^2+3x+2)(x-4)\xrightarrow{x^2=x+10}(x+10+3x+2)(x-4)$$

$$=(4x+12)(x-4)=4(x+3)(x-4)=4(x^2-x-12)=4(x+10-x-12)$$

$$=4(-2)=-8$$

تست: از مستطیلی به ابعاد $x+3$ و $x+5$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $x-1$ و $x+4$ را حذف کرده‌ایم. مساحت باقی‌مانده کدام است؟

۱) $4x+17$ ۲) $5x+17$ ۳) $4x+19$ ۴) $5x+19$

پاسخ: گزینه ۴) مساحت مستطیل‌ها را حساب می‌کنیم:

مساحت مستطیل بزرگ $=(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$

مساحت مستطیل حذف شده $=(x+4)(x-1)=x^2+3x-4$

مساحت باقی‌مانده $=(x^2+8x+15)-(x^2+3x-4)=5x+19$

۲) تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک: برای تجزیه سه جمله‌ای درجه دوم x^2+mx+n در صورت امکان دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آن‌ها m و حاصل ضربشان n باشد، در صورتی که این دو عدد p و q باشند آنگاه:

$$x^2+mx+n=(x+p)(x+q)$$

تست: حاصل عبارت $(x^2+4x+2)^2+3(x^2+4x+2)+2$ برابر است با:

۱) $(x-2)^2(x+3)(x+1)$

۲) $(x+2)^2(x-3)(x-1)$

۳) $(x+2)^2(x+3)(x+1)$

۴) $(x+2)^2(x-3)(x+1)$

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه ی (۳) طبق تجزیه، بکمک اتحاد یک جمله مشترک داریم:

$$(x^2+4x+2)^2+3(x^2+4x+2)+2=[(x^2+4x+2)+2][(x^2+4x+2)+1]$$

$$=(x^2+4x+4)(x^2+4x+3)=(x+2)^2(x+3)(x+1)$$

تست: هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a، b ($a<b$) برابر ۶ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۳۶ و مجموع آن‌ها برابر ۳۰ باشد، آنگاه حاصل $2a+b$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۶۶

پاسخ: گزینه ی (۱)

$$\left.\begin{array}{l} a\times b=L\times d=36\times 6=216 \\ a+b=30 \Rightarrow b=30-a \end{array}\right\} \Rightarrow a(30-a)=216 \Rightarrow a^2-30a+216=0$$

$$\Rightarrow (a-18)(a-12)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=12,\ b=18 \Rightarrow 2a+b=42 \\ a=18,\ b=12 \quad (\text{غ ق ق})\ (a<b) \end{cases}$$

درسنامه‌ی (۷) اتحاد چاق و لاغر

۱) اتحاد مجموع مکعب دو جمله:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

۲) اتحاد تفاضل مکعب دو جمله:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

تست: اگر $(x+1)(x^2+x+1)=9$ و $(x-1)(x^2-x+1)=5$، حاصل x^6 کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ی (۴) اگر طرفین دو تساوی $(x+1)(x^2+x+1)=9$ و $(x-1)(x^2-x+1)=5$ را در هم ضرب کنیم، داریم:

$(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1)=9\times5 \Rightarrow [(x-1)(x^2+x+1)][(x+1)(x^2-x+1)]=45$

$\Rightarrow (x^3-1)(x^3+1)=45 \Rightarrow x^6-1=45 \Rightarrow x^6=46$

تست: مقدار عددی عبارت $\left(\frac{1+x}{x}\right)^3$ به ازای $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲) عبارت x را به صورت $(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1$ بازنویسی می‌کنیم. حال برای ساده کردن، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. برای این کار عبارت x را در $\sqrt[3]{2}-1$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$(\sqrt[3]{2}-1)x=(\sqrt[3]{2}-1)\left((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1\right)=(\sqrt[3]{2})^3-(1)^3=2-1=1$

$\Rightarrow (\sqrt[3]{2}-1)x=1 \Rightarrow \frac{1}{x}=\sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow \frac{1}{x}+1=\sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{1+x}{x}=\sqrt[3]{2} \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{توان ۳}} \left(\frac{1+x}{x}\right)^3=2$

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی متمایز باشند، $a^3+7b=b^3+7a$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳)

$a^3+7b=b^3+7a \Rightarrow a^3-b^3=7a-7b \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=7(a-b)$

$\xrightarrow{a,b \text{ متمایز } (a\neq b)} a^2+ab+b^2=7 \Rightarrow a^2+b^2=7-ab \Rightarrow$

$a^2+b^2-2ab=7-ab-2ab \Rightarrow (a-b)^2=7-3ab \xrightarrow{(a-b)^2>0}$

$7-3ab>0 \Rightarrow ab<\frac{7}{3} \rightarrow ab=2 \xrightarrow{a,b\in\mathbb{N}} a=1, b=2$ یا $a=2, b=1$

$\Rightarrow a+b=3$

درسنامه‌ی (۸) اتحاد مکعب دوجمله‌ای

۱) اتحاد مکعب مجموع دوجمله:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

۲) اتحاد مکعب تفاضل دوجمله:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

تست: اگر تساوی $(2+\sqrt{3})^3=a+b\sqrt{3}$ برقرار باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۲۶ ۴) ۴۱

پاسخ: گزینه‌ی (۴) ابتدا به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای حاصل عبارت $(2+\sqrt{3})^3$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(2+\sqrt{3})^3=2^3+3(2)^2(\sqrt{3})+3(2)(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}$$

$$=26+15\sqrt{3}$$

اکنون از تساوی $26+15\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$ می‌توان نتیجه گرفت که $a=26$ و $b=15$ و از آنجا:

$$a+b=41$$

تست: اگر حاصل عبارت $(x-1)^3(x+1)^3(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^3$ به صورت $x^{18}+ax^{12}+bx^6+c$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$(x-1)^3(x+1)^3(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^3=[(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)]^3$$

$$=[(x^3+1)(x^3-1)]^3=(x^6-1)^3=x^{18}-3x^{12}+3x^6-1$$

حال باید چندجمله‌ای $x^{18}-3x^{12}+3x^6-1$ با چندجمله‌ای $x^{18}+ax^{12}+bx^6+c$ متحد گردد. بنابراین داریم:

$$x^{18}-3x^{12}+3x^6-1=x^{18}+ax^{12}+bx^6+c \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=-1$$

۳) اتحادهای کلی: این نوع اتحادها، نتایج اتحادهای مکعب دوجمله‌ای می‌باشد.

1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

3) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

4) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

تست: اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=1$ ، حاصل $A=\frac{1-x-x^2}{3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه (۴) می‌دانیم $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. اگر دو طرف تساوی فرض را به توان ۳ برسانیم خواهیم داشت:

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})^3=1^3 \Rightarrow x+x^2+3\underbrace{\sqrt[3]{x^3}}_{x}(\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}_{1})=1 \Rightarrow x+x^2+3x=1$$

$$\Rightarrow x^2+4x=1 \Rightarrow 1-x^2=4x$$ در

در صورت تست بجای $1-x^2$ قرار می‌دهیم $4x$:

$$\Rightarrow A=\frac{1-x-x^2}{3x}=\frac{4x-x}{3x}=\frac{3x}{3x}=1$$

تست: اگر $x=\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}-\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}$ باشد، حاصل x^3+3x برابر است با:

۱) 6 ۲) 4 ۳) 8 ۴) 12

پاسخ: گزینه (۱) برای محاسبه x^3 از اتحاد $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ بهره می‌بریم:

$$x^3=(\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}-\sqrt[3]{\sqrt{10}-3})^3=$$

$$=\sqrt{10}+3-\sqrt{10}+3-3(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}\times\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}}_{\sqrt[3]{10-9}=1})(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}-\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}}_{x})$$

$$\Rightarrow x^3=6-3x$$ در

بنابراین حاصل x^3+3x برابر است با ۶.

تست: اگر $a+\frac{1}{a}=5$، حاصل $a^3+\frac{1}{a^3}$ کدام است؟ (پیشرفت تحصیلی تبریز ۹۲)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۲۳ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۲)

$$a^3+\frac{1}{a^3} \xrightarrow{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)} \left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3(a)\left(\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\xrightarrow{a+\frac{1}{a}=5} 5^3-3\times 5=125-15=110$$

تست: اگر $2x+\frac{1}{3x}=A$ باشد، حاصل $\left(8x^3+\frac{1}{27x^3}\right)-\left(4x^2+\frac{1}{9x^2}-\frac{2}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $(A-2)(A^2-2)$ ۲) $(A^2-2)(A-1)$ ۳) $(A^2-2)(A+1)$ ۴) $(A^2-2)(A+2)$

پاسخ: گزینه ۲)

$$8x^3+\frac{1}{27x^3}=(2x)^3+\left(\frac{1}{3x}\right)^3=\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^3-3(2x)\left(\frac{1}{3x}\right)\left(2x+\frac{1}{3x}\right)$$

$$=\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^3-2\left(2x+\frac{1}{3x}\right) \quad \text{و} \quad 2x+\frac{1}{3x}=A \Rightarrow 8x^3+\frac{1}{27x^3}=A^3-2A$$

$$4x^2+\frac{1}{9x^2}-\frac{2}{3}=(2x)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^2-\frac{2}{3}=\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^2-2(2x)\left(\frac{1}{3x}\right)-\frac{2}{3}$$

$$=\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^2-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=A^2-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=A^2-2$$

$$\Rightarrow \left(8x^3+\frac{1}{27x^3}\right)-\left(4x^2+\frac{1}{9x^2}-\frac{2}{3}\right)=A^3-2A-(A^2-2)$$

$$=A^3-2A-A^2+2=A^2(A-1)-2(A-1)=(A-1)(A^2-2)$$

درسنامه ی (۹) اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

تست: اگر a و b طول اضلاع مثلث قائم الزاویه و وتر c باشند، حاصل $(a+b+c)^2$ برابر کدام است؟

۱) $2(a+b)(a+c)$ ۲) $2(a+c)(b+c)$ ۳) $2(b+c)(a+b)$ ۴) $2c(a+b+c)$

پاسخ: گزینه (۲) چون a و b طول اضلاع مثلث قائم الزاویه و وتر c می باشند، داریم: $a^2+b^2=c^2$
لذا خواهیم داشت:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=c^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$=2c^2+2ab+2ac+2bc=2c(c+b)+2a(b+c)=(b+c)(2a+2c)$$

$$=2(b+c)(a+c)$$

تست: فرض کنید $D=a^2+b^2+c^2$ که در آن a و b دو عدد صحیح متوالی هستند و $c=ab$، بنابراین $\sqrt{D}$ ....
(مسابقات ریاضی آمریکا)

۱) همیشه عدد صحیح زوج است. ۲) گاهی عدد صحیح فرد است و گاهی هم نیست.

۳) همیشه عدد صحیح فرد است. ۴) گاهی عدد گویا است و گاهی هم نیست.

پاسخ: گزینه (۳) چون a و b عددهای صحیح متوالی هستند، یکی از آن ها زوج است و دیگری فرد، بنابراین حاصل ضرب آن ها زوج است. می توان فرض کرد $b=a+1$
در نتیجه $c=ab=a(a+1)=a^2+a$ یک عدد صحیح زوج است.

$$D=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2=a^2+a^2+2a+1+a^2(a^2+2a+1)$$

$$\Rightarrow D=a^4+2a^3+3a^2+2a+1=(a^2+a+1)^2$$

چون عدد صحیح مثبت فرد $a^2+a+1=c+1$ است، نتیجه می گیریم که $\sqrt{D}=c+1$ همیشه یک عدد صحیح مثبت فرد است.

درسنامه (۱۰) نابرابری ها

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت های «a بزرگتر از b» یا «a کوچکتر از b» یا «a برابر با b» را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد، در این صورت $a>0$ یا $a=0$، در این حالت می نویسیم $a\geq 0$ و می خوانیم a بزرگتر یا مساوی با ۰ است.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به طوری که a کمتر از b نباشد، در این صورت $a>b$ یا $a=b$ در این حالت می نویسیم $a\geq b$.

تذکر: برای سه عدد حقیقی a، b و x، به طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a<b$) می نویسیم $a<x<b$.

خواص نابرابری ها.

۱) برای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم: $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

۲) طرفین نابرابری های هم جهت را می توان با هم جمع کرد.

$$\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$$

۳) می توان طرفین یک نابرابری را در یک عدد مثبت ضرب کرده، بدون آنکه جهت نامساوی تغییر کند. یعنی

$$a<b \xrightarrow{c>0} ac<bc$$

۴) قرینه ی هر عدد مثبت، عددی منفی است و بالعکس. یعنی:

$$a>0 \Leftrightarrow -a<0$$

۵) اگر طرفین یک نابرابری را در یک عدد منفی ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می شود. یعنی:

$$a<b \xleftrightarrow{c<0} ac>bc$$

۶)

$$a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

۷)

$$a<b<0 \Rightarrow 0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر $a>b$ و $c<0$ باشد آنگاه کدام صحیح است؟

۱) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, $ac^2>bc^2$

۲) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, $ac^2<bc^2$

۳) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$, $ac^2<bc^2$

۴) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$, $ac^2>bc^2$

پاسخ: گزینه (۱) می‌دانیم اگر طرفین یک نامساوی در یک عدد مثبت ضرب شود، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند و هم چنین اگر دو طرف یک نامساوی بر یک عدد منفی تقسیم شود، جهت آن تغییر می‌کند. طبق فرض $a>b$ است، چون c^2 مثبت است. پس $ac^2>bc^2$ و چون طبق فرض c منفی است. $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

تست: حداقل مقدار طبیعی a برای آنکه عبارت زیر درست باشد، کدام است؟

«میله‌ای فلزی به طول ۱۰۰ متر را به ۵ بخش بریده‌ایم به طوری که هر بخش از a سانتی‌متر کوتاه‌تر نیست. بنابراین با هر چهار قسمت از این پنج قسمت می‌توان یک چهارضلعی درست کرد!»

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه (۴) می‌دانیم شرط لازم و کافی برای ساختن یک چهارضلعی با چهار پاره‌خط آن است که مجموع هر سه تا از آن‌ها از چهارمی بزرگتر باشد، بنابراین نتیجه می‌گیریم بدترین حالت برای این مسئله زمانی است که چهار تا از این ۵ پاره‌خط برابر a باشند و پنجمی برابر $100-4a$ در چنین حالتی نامساوی را داشته باشیم:

$$100-4a<a+a+a \Rightarrow 3a>100-4a \Rightarrow a>\frac{100}{7} \Rightarrow$$

$$a>14/2 \Rightarrow a=15$$