فصل ۵

فصل پنجم : عبارت های جبری

نکته : چند جمله ای استاندارد چند جمله ای است که همه ی جملاتش بر حسب توان های نزولی یک متغیر مرتب شده اند.

مثال : عبارت زیر را ساده کنید و به صورت استاندارد بر حسب x بنویسید.

$$(x^۲-۳x-۱)(x^۲+x-۳)$$

$$(x^۲-۳x-۱)(x^۲+x-۳)=x^۴-۲x^۳-۳x^۲+۸x+۳$$

اتحاد مربع دو جمله ای :

$$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲ \quad \text{و} \quad (a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

مثال : با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای طرف دوم تساوی زیر را بیابید.

$$(-۱+b^۲)^۲=\to \qquad (-۱+b^۲)^۲=۱-۲b^۲+b^۴$$

تجزیه : تجزیه عکس عمل ضرب چند جمله ای ها است.در عمل ضرب عبارت هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند با انجام عمل ضرب به صورت جمع چند یک جمله ای در می آوریم. ولی در تجزیه یک چند جمله ای را که به صورت جمع چند یک جمله ای است به صورت حاصل ضرب دو یا چند . چند جمله ای دیگر در می آوریم.

تجزیه به روش فاکتورگیری :

به زبان ساده بیرون کشیدن ضرایب یا متغیرهای مشترک از جملات یک چند جمله ای و قرار دادن آن به صورت ضرب در باقیمانده ی چند جمله ای را فاکتورگیری می گویند.

مثال : عبارت $-۵ax^۴+۱۰a^۳x^۲$ را تجزیه کنید.

حل :

$$-۵ax^۴+۱۰a^۳x^۲=-۵ax^۲(x^۲-۲a^۲)$$

تجزیه به روش دسته بندی : گاهی نمی توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به عبارت های کوچک تقسیم بندی کنیم و از هر کدام از آن ها عبارتی را فاکتور بگیریم در نهایت می توان یک عبارت را از کل فاکتور بگیریم.

مثال:

$$\underbrace{x^۳+۲x^۲}+x+۲=x^۲(x+۲)+(x+۲)=(x+۲)(x^۲+۱)$$

نکته : گاهی اوقات قبل از اتحاد لازم است یکبار از فاکتور گیری استفاده کنیم.

مثال: تجزیه زیر را نگاه کنید.

$$۸x^۳-۲x=۲x(۴x^۲-۱)=۲x(۲x-۱)(۲x+۱)$$

نکته : گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله هایی را تفکیک کنیم.

مثال:

$$۳x^۲+۷x+۲=۳x^۲+\boxed{۶x+x}+۲=(۳x^۲+۶x)(x+۲)$$

$$=۳x(x+۲)+(x+۲)=(x+۲)(۳x+۱)$$

نکته : گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله هایی را حذف یا اضافه کنیم.

$$x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴ = \boxed{x^۴ + ۶x^۲y^۲ + ۹y^۴} - ۴x^۲y^۲$$

$$= (x^۲+۳y^۲)^۲ - ۴x^۲y^۲ = (x^۲+۳y^۲ + ۲xy)(x^۲+۳y^۲ - ۲xy)$$

تجزیه به روش اتحاد مربع دو جمله ای :

برای تجزیه می توانیم از برخی از اتحاد ها استفاده کنیم. مثلا اگر یک عبارت سه جمله ای داشته باشیم که دو جمله ی آن مربع کامل بوده و جمله ی دیگرش ۲ برابر حاصل ضرب جذر دو جمله ی مربع کامل باشد . آن سه جمله از راه اتحاد مربع دو جمله ای به صورت زیر تجزیه می شود:

سه جمله ای = (جذر جمله مربع اول ⟨علامت جمله ی دیگر⟩ جذر جمله مربع دوم)^2

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید. $x^۴ - ۲x^۲yz + y^۲x^۲$

حل: عبارت سه جمله ای است و جملات اول و سوم مربع کامل و جمله ی دوم ۲ برابر حاصل ضرب جذر ها است پس می توان از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده کرد.

$$x^۴ - ۲x^۲yz + y^۲x^۲ \rightarrow \begin{cases} x^۴ = (x^۲)^۲, y^۲z^۲ = (yz)^۲, ۲x^۲yz = ۲(x^۲)(yz) \\ x^۴ - ۲x^۲yz + y^۲x^۲ = (x^۲ - yz)^۲ \end{cases}$$

استفاده از اتحاد اول در مسئله ها

مثال: اگر $y^۲ + z^۲ = ۲yz$ باشد حاصل $\frac{y^۲+z^۲}{۳y^۲-z^۲}$ چه قدر است ؟

حل:

$$y^۲ + z^۲ - ۲yz = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد}} (y - z)^۲ = ۰ \Rightarrow y = z$$

$$\frac{y^۲+z^۲}{۳y^۲-z^۲} = \frac{y^۲+y^۲}{۳y^۲-y^۲} = \frac{۲y^۲}{۲y^۲} = ۱$$

مثال: اگر $x + y = ۷$ و $xy = ۵$ باشد حاصل $x^۲ + y^۲$ کدام است؟

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و جایگذاری به جواب می رسیم:

$$(x + y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲ \rightarrow (۷)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲ \times ۵ \xrightarrow{\text{حل معادله}} x^۲ + y^۲ = ۳۹$$

نکته: در برخی از عبارت های سه جمله وقتی بخواهیم آن ها را تجزیه کنیم به یک مشکل برخورد می کنیم و آن این است که جمله ای که باید ۲ برابر جمله ی اول در دوم باشد کم تر یا بیشتر از مقدار واقعی است. در این موارد با اضافه یا کم کردن مقدار عبارت لازم می توان اتحاد را تکمیل کرد.

مثال: با افزودن کدام عدد به عبارت $۴x^۲ - ۶x + \frac{۱}{۴}$ مربع یک دو جمله ای حاصل می شود؟

حل : جمله ی ۶x- جمله ای است که مساوی دو برابر جمله اول در دوم است اگر جمله اول ۲x باشد با تقسیم ۶x ابتدا بر ۲ سپس بر جمله اول خواهیم دید که جمله ی دوم $-\frac{۳}{۲}$ می باشد

$$۴x^۲-۶x+\frac{۱}{۴}=۴x^۲-۶x+\frac{۱}{۴}+\boxed{\frac{۸}{۴}}=۴x^۲-۶x+\frac{۹}{۴}=\left(۲x-\frac{۳}{۲}\right)^۲$$

نکته : روش پرکاربرد در تجزیه ی $ax^۲+bx+c$

$$ax^۲+bx+c=\frac{۱}{a}(ax+m)(ax+n)$$

$$\begin{cases} m+n=b \\ m\times n=ac \end{cases}$$

مثال : عبارت $۲x^۲+۷x-۹$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\begin{cases} ۲x^۲+۷x-۹=\frac{۱}{۲}(۲x+m)(۲x+n) \\ m+n=۷ \\ mn=-۱۸ \end{cases} \rightarrow m=۹\ ,n=-۲ \Rightarrow$$

$$۲x^۲+۷x-۹=\frac{۱}{۲}(۲x+۹)(۲x-۲)=(۲x+۹)(x-۱)$$

نکته : اگر جمع ضرائب در یک چند جمله ای صفر باشد عبارت عامل x-۱ دارد و اگر مجموع جملات درجه فرد با مجموع جملات درجه زوج برابر باشد . عامل x+۱ خواهد داشت.

اتحاد مزدوج : $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

تجزیه به روش اتحاد مزدوج : اگر عبارتی دو جمله ای مفروض باشد که هر دو جمله ی آن مربع کامل بوده و بین آن ها علامت منفی باشد آن عبارت دو جمله ای توسط اتحاد مزدوج به صورت زیر تجزیه می شود.

(جذر جمله دوم – جذر جمله اول) (جذر جمله ی دوم + جذر جمله اول) = دو جمله ای

مثال : چند جمله ای مقابل را تجزیه کنید. $x^۲y^۴-۹z^۲$

حل: عبارت دو جمله ای می باشد و هر دو جمله مربع کامل بوده و علامت بین آن ها منفی است . پس می توان از اتحاد مزدوج استفاده کرد.

$$x^۲y^۴-۹z^۲=(xy^۲)^۲-(۳z)^۲=(xy^۲+۳z)(xy^۲-۳z)$$

نکته : از اتحاد مزدوج می توان برای محاسبات پیچیده بهره برد.

مثال: حاصل $۹۹۹۸^۲-۴$ را به دست آورید.

حل : $۹۹۹۸^۲-۴=(۹۹۹۸-۲)(۹۹۹۸+۲)=۹۹۹۶\times ۱۰۰۰۰=۹/۹۹۶\times ۱۰^۷$

نکته : می توانیم از تعویض متغیر نیز استفاده کنیم.

مثال : $۴x^۲ - ۱۰x - ۶$ را تجزیه کنید.

حل: جمله ی اول به ما نشان می دهد که مربع عدد $۴x^۲ = (۲x)^۲$ است پس چند جمله ای را برحسب $۲x$ مرتب می کنیم. داریم :

$$۴x^۲ - ۱۰x - ۶ = (۲x)^۲ - ۵(۲x) - ۶$$

سپس با استفاده از $t = ۲x$ چند جمله ای را تبدیل و تجزیه می کنیم.

$$(۲x)^۲ - ۵(۲x) - ۶ = t^۲ - ۵t - ۶ = (t+۱)(t-۶) \Rightarrow (۲x+۱)(۲x-۶)$$

اتحاد مکعبات دو جمله ای (اتحاد چاق و لاغر)

$$\begin{cases}(a-b)(a^۲+ab+b^۲) = a^۳ - b^۳\\(a+b)(a^۲-ab+b^۲) = a^۳ + b^۳\end{cases}$$

تجزیه به کمک اتحاد مکعبات

اگر عبارتی دو جمله ای داشته باشیم که هر دو جمله ی آن مکعب باشند : آنگاه این عبارت را می توان به روش زیر تجزیه کرد.

$$\text{دو جمله ای} = \left(\sqrt[3]{\text{جمله اول}} \pm \sqrt[3]{\text{جمله دوم}}\right)\left(\left(\sqrt[3]{\text{جمله اول}}\right)^2 \mp \sqrt[3]{\text{جمله اول} \times \text{جمله دوم}} + \left(\sqrt[3]{\text{جمله دوم}}\right)^2\right)$$

مثال: عبارت $a^۶ - ۶۴b^۶$ را تجزیه کنید.

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$\begin{cases}(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳\\(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳\end{cases}$$

ترکیب و تعمیم اتحاد ها:

$$x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲ - ۲xy$$

$$x^۲ + y^۲ = (x-y)^۲ + ۲xy$$

$$(x+y)^۲ - (x-y)^۲ = ۴xy$$

$$(x-y)^۲ - (x+y)^۲ = -۴xy$$

$$x^۳ + y^۳ = (x+y)^۳ - ۳xy(x+y)$$

$$x^۳ - y^۳ = (x-y)^۳ + ۳xy(x-y)$$

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz = (x+y+z)(x^۲ + y^۲ + z^۲ - xy - xz - yz)$$

$$(x-y)^۲ + (x+y)^۲ = ۲x^۲ + ۲y^۲$$