

بسم الله الرحمن الرحيم

درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله‌ای

به عبارتهای جبری $5x^2$ ، $-\frac{1}{3}xy$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}xy^2z^4$ یک جمله‌ای می‌گویند. هر یک جمله‌ای، از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می‌آید. در یک جمله‌ای، توان متغیرها باید عدد صحیح نامنفی (غیرمنفی) باشد. هر یک جمله‌ای از دو قسمت ضرب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است.

عبارت حرفی	ضرب عددی	یک جمله‌ای	عبارت حرفی	ضرب عددی	یک جمله‌ای
a^2bc^3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}a^2bc^3$	x^2y	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}x^2y$
$a^x b^y$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}a^x b^y$	x	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$

دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک جمله‌ای محسوب می‌شود. مانند: $\frac{1}{3}$ ، 5 و $\sqrt{2}$.

عبارتهایی مانند $\frac{2}{a}$ ، $\frac{3x}{y}$ ، \sqrt{x} و $\sqrt[3]{x^2}$ یک جمله‌ای نیستند، چون توان متغیرها در آنها عدد صحیح نامنفی نیست. برای مثال:

توان a منفی است، پس عبارت یک جمله‌ای نیست. $-\frac{2}{a} = -2a^{-1}$

توان y منفی است، پس عبارت یک جمله‌ای نیست. $\frac{3x}{y} = 3xy^{-1}$

در عبارتهای \sqrt{x} و $\sqrt[3]{x^2}$ ، توان x کسری می‌شود، بنابراین عبارتهای یک جمله‌ای نیستند (بعداً در مورد این عبارتهای توضیح کامل‌تری می‌دهیم).

در یک جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ ، توان متغیر a ، مساوی ۱ است، بنابراین می‌گوییم درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، برابر ۱ است. توان x در

این یک جمله‌ای برابر ۳ است، پس می‌گوییم درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x ، ۳ است یا این یک جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی سوم

است. درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به دو متغیر x و b برابر ۵ است ($2 + 3 = 5$). درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به تمامی متغیرهایش

توان x توان b

۶ است ($1 + 2 + 3 = 6$). یک جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ را می‌توان به صورت $\frac{2}{3}ab^2x^3y^0z^0$ نوشت، بنابراین درجه‌ی این یک جمله‌ای برای مثال

توان x توان b توان a

نسبت به y و z ، صفر است.

همان‌طور که گفتیم، عددهای ثابت مانند 2 ، $\frac{1}{5}$ ، $\sqrt{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ و π یک جمله‌ای هستند. برای مثال یک جمله‌ای ۲ را می‌توان به صورت

نوشت که درجه‌ی این یک جمله‌ای صفر است. $2x^0a^0b^0y^0$

عدد صفر هم یک جمله‌ای است، اما برای عدد صفر (یک جمله‌ای ثابت صفر) درجه تعریف نمی‌شود.

یک جمله‌ای‌های متشابه

دو یا چند یک جمله‌ای را متشابه می‌گوییم که متغیرها و توان‌های مربوط به هر متغیر در آن‌ها یکسان باشد. (متشابه بودن یک جمله‌ای‌ها به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.)

یک جمله‌ای‌های روبه‌رو متشابه‌اند. $-x^2yz$, $\frac{y}{9}yzx^2$, $\sqrt{5}x^2zy$, $-\frac{y}{9}x^2yz$

یک جمله‌ای‌های $2a^3$ و $2a^2$ ، $2a$ متشابه نیستند.

یک جمله‌ای‌های $-3ab^2$ و $-3a^2b$ ، $-3ab$ متشابه نیستند.

واضح است که یک جمله‌ای‌های $-3a^2b$ و $-3ab^2$ با هم متشابه نیستند، بنابراین یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه نامیده می‌شوند.

دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد.

برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است که ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا از هم کم کنیم و در کنار حاصل، قسمت حرفی یک جمله‌ای‌ها را قرار دهیم.

$$3x^2yz + 4x^2yz = (3+4)x^2yz = 7x^2yz$$

یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه را نمی‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$2x + 3x^2 \neq 5x^2 \quad \text{یا} \quad 5x + 3y \neq 8xy$$

دقت کنید!

$$x + x \neq x^2, 4a + 3a \neq 7a^2 \quad \text{یا} \quad x^2 + x^2 \neq x^4$$

دقت کنید!

چند جمله‌ای

از جمع دو یا چند یک جمله‌ای غیرمتشابه یک چند جمله‌ای حاصل می‌شود. برای مثال: عبارت‌های $2x + 1$ ، $3x^2 + 4y$ و $x^2 + y$ دو جمله‌ای هستند.

عبارت $3x + 4y - 2y^2 - 2y^2 + a + a^2 + a^2 + 7$ عبارت سه جمله‌ای و عبارت $a^2 + a^2 + a + 7$ یک چهار جمله‌ای است.

توجه داشته باشید که یک جمله‌ای‌ها نیز چند جمله‌ای محسوب می‌شوند.

اگر متغیری مانند x در یک چند جمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چند جمله‌ای وجود دارد، درجه‌ی آن چند جمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

برای مثال چند جمله‌ای‌های $x + 7$ ، $2xy + y - z$ و $1 + \frac{\sqrt{2}}{5}z^2 - \frac{x}{4}y^2$ نسبت به x از درجه‌ی ۱ هستند.

چند جمله‌ای‌های $2 + xy - x^2 + 11$ ، $x^2 + xy^3 + z^4 - 19 - 7y^2 + x - 6zyx^2$ نسبت به x از درجه‌ی ۲ هستند.

چند جمله‌ای‌های $2 - xyz + 7x^2yz + yx^3 - \frac{x}{5} + \frac{yx^2}{7}$ و $x^2y^2z - \frac{x}{5} + \frac{yx^2}{7}$ نسبت به x از درجه‌ی ۳ هستند.

چند جمله‌ای استاندارد

هر گاه همه‌ی جمله‌های یک چند جمله‌ای را بر حسب توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر، مرتب کنیم؛ آن چند جمله‌ای را استاندارد می‌گوییم.

چند جمله‌ای

$$-5x + 10 + 3x^2$$

$$4y^2 - 3 - y^5 + y$$

$$7 - b^3 + 2b^2 - 4b^6 - b^9$$

نمایش استاندارد چند جمله‌ای

$$3x^2 - 5x + 10$$

$$-y^5 + 4y^2 + y - 3$$

$$-b^9 - 4b^6 - b^3 + 2b^2 + 7$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها

الف) $3a^2b^3 \times 7ab^4 = (3 \times 7)a^2ab^3b^4 = 21a^{2+1}b^{3+4} = 21a^3b^7$

به تساوی‌های مقابل دقت کنید.

ب) $-\frac{1}{4}x^2y^3z \times 8xy^2z^2 = (-\frac{1}{4} \times 8)x^2xy^3y^2zz^2 = -2x^3y^5z^3$

ضرب چندجمله‌ای‌ها

الف) $(x+2)(x+7) = x(x+7) + 2(x+7) = x^2 + 7x + 2x + 14 = x^2 + 9x + 14$

به تساوی‌های روبه‌رو دقت کنید.

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم و سپس عبارت حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن می‌نویسیم.

حاصل ضرب چندجمله‌ای $x^2y + yz - 3$ را در چندجمله‌ای $x^2 - y^2 + 4$ به دست آورید.

$(x^2 - y^2 + 4)(x^2y + yz - 3) = x^2(x^2y + yz - 3) - y^2(x^2y + yz - 3) + 4(x^2y + yz - 3)$

$= x^4y + x^2yz - 3x^2 - x^2y^2 - y^2z + 3y^2 + 4x^2y + 4yz - 12$

اتحاد

به جدول زیر دقت کنید.

x	$(x+5)^2$	$x^2 + 10x + 25$	x	$(x+5)^2$	$x^2 + 10x + 25$
-2	$(-2+5)^2 = 3^2 = 9$	$(-2)^2 + 10(-2) + 25 = 9$	0	$(0+5)^2 = 25$	$0^2 + 10 \times 0 + 25 = 25$
7	$(7+5)^2 = 12^2 = 144$	$7^2 + 10 \times 7 + 25 = 144$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}+5)^2 = (\frac{11}{2})^2 = \frac{121}{4}$	$(\frac{1}{2})^2 + 10 \times \frac{1}{2} + 25 = \frac{121}{4}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، تساوی $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ به ازای هر مقدار دلخواه x همواره درست است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌گوییم. به طور کلی اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آن‌ها را یک اتحاد جبری می‌نامیم.

آیا $x^2 + 9 = (x+3)^2$ یک اتحاد است؟

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 \neq x^2 + 9$

خیر. زیرا:

اتحاد مربع دوجمله‌ای

برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم:

الف) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ب) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

به هر یک از تساوی‌های بالا، اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌گویند. تساوی قسمت «ب» را اثبات می‌کنیم.

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

پس همواره داریم:

تجزیه

$x(y+z) = x(y+z) = xy + xz$


اگر ضرب مقابل را انجام دهیم، داریم:


این ضرب را توزیع‌پذیری یا خاصیت پخش عمل ضرب نسبت به جمع می‌گوییم، اکنون اگر عبارت $xy + xz$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری

$xy + xz = x(y+z)$

بنویسیم، داریم:

این عمل، یعنی تبدیل جمع یا تفریق یک عبارت جبری به صورت ضرب را، تجزیه می‌گویند.

سه جمله‌ای $x^2 + 12x + 36$ را تجزیه کنید. 

روش اول:  $x^2 + 12x + 36 = \underline{x^2 + 6x} + \underline{6x + 36} = x(x+6) + 6(x+6) = (x+6)(x+6) = (x+6)^2$

روش دوم: در این عبارت دو جمله‌ی x^2 و 36 مربع کامل هستند و جمله‌ی $12x$ ، مساوی دو برابر جذر جملات مربع کامل است. پس می‌توان

عبارت را با اتحاد مربع کامل تجزیه کرد. یعنی: $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$



این اتحاد به صورت مقابل است:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(2a-3b)(2a+3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$



این اتحاد در عین سادگی، کاربردهای زیادی در محاسبات عددی، سهولت در ساده کردن عبارتهای جبری و تجزیهی عبارتهای جبری دارد.

حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.



الف) $202 \times 198 = (200+2)(200-2) = 40000 - 4 = 39996$

ب) $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2-1)} = (x^2+1)(x^4+1) = x^6 - 1$

استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیهی عبارتهای جبری

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

به این مثالها دقت کنید:

$$a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

$$t^2 - \frac{1}{4} = (t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{2})$$

اتحاد جمله مشترک

در این اتحاد یک جملهی مشترک و دو جملهی غیرمشترک داریم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جملهی مشترک ← x^2
 جملههای غیرمشترک ← $(a+b)x$ و ab
 حاصل ضرب دو جملهی غیرمشترک ← ab
 مجموع دو جملهی غیرمشترک ← $(a+b)x$

حاصل عبارتهای زیر را با استفاده از اتحاد جمله مشترک حساب کنید.



الف) $(x+2)(x+3) =$

ب) $(x-8)(x+5) =$

الف) $(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = x^2 + 5x + 6$



ب) $(x-8)(x+5) = x^2 + (-8+5)x + (-8)(5) = x^2 - 3x - 40$

استفاده از اتحاد جمله مشترک برای تجزیهی عبارتهای جبری

با چند مثال، کاربرد این اتحاد را در تجزیهی عبارتهای جبری نشان می دهیم.

الف) $x^2 + 8x + 12 =$

ب) $x^2 - 8x + 15 =$

عبارتهای روبهرو را تجزیه کنید.



الف) باید دو عدد بیابیم که حاصل ضرب آنها ۱۲+ و مجموع آنها ۸+ باشد. چون حاصل ضرب دو عدد مثبت است (۱۲+)، پس دو عدد



هم علامت هستند و چون حاصل جمع نیز مثبت است (۸+)، بنابراین دو عدد مثبت هستند، از روی حاصل ضرب، دو عدد را می یابیم.

$$x^2 + 8x + 12 =$$

$$1 \times 12 = 12$$

$$2 \times 6 = 12$$

حاصل ضرب دو عدد مجموع دو عدد

دو عدد موردنظر چون مجموع آنها ۸+ است.

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، یکی از سه حالت زیر برای دو عدد وجود دارد:

$$a > b$$

الف) a بزرگ‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

$$a = b$$

ب) a مساوی b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

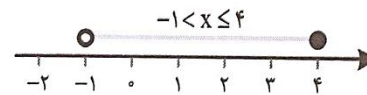
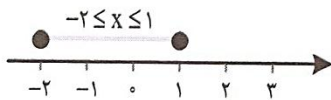
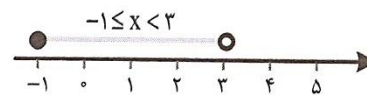
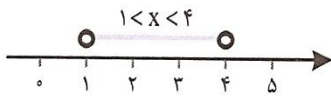
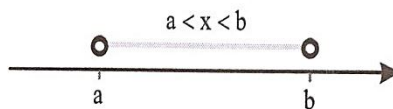
$$a < b$$

ج) a کوچک‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

● اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، یعنی a یا مثبت است یا صفر، که می‌نویسیم: $a \geq 0$ (می‌خوانیم: a بزرگ‌تر یا مساوی صفر است).

● اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد، یعنی a یا منفی است یا صفر که می‌نویسیم: $a \leq 0$

● برای سه عدد حقیقی a ، b و x : اگر x بین a و b باشد ($a < b$)، آن‌گاه می‌نویسیم: $a < x < b$ (به محور زیر توجه کنید).



خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

۱- اگر دو طرف یک نابرابری (نامساوی) را با عددی مانند m جمع کنیم، جهت نابرابری (نامساوی) تغییر نمی‌کند.

$$a < b \Rightarrow a + m < b + m \xrightarrow{\text{مثال}} -4 < -1 \Rightarrow \overbrace{-4+5} < \overbrace{-1+5}$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$a < b, m > 0 \Rightarrow \begin{cases} am < bm \\ a \div m < b \div m \end{cases}$$

$$4 < 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \times 2 < 6 \times 2 \Rightarrow 8 < 12 \\ 4 \div 2 < 6 \div 2 \Rightarrow 2 < 3 \end{cases}$$



۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی منفی ضرب و یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می کند.

$$a < b, m < 0 \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \end{cases}$$

$$12 < 18 \Rightarrow \begin{cases} \frac{12 \times (-2)}{-24} > \frac{18 \times (-2)}{-36} \\ \frac{12 \div (-3)}{-4} > \frac{18 \div (-3)}{-6} \end{cases}$$



نامعادله

اگر یک نابرابری شامل متغیر (مجهول) باشد، به آن نامعادله می گوئیم، مانند نابرابری های مقابل:

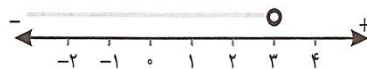
$$2x > 3, 4x - 1 < 7$$

● به مجموعه ای مقادیر (عددهایی) که به ازای آن ها نامعادله به یک نابرابری درست، تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله می گوئیم و این مجموعه جواب را با حرف D نمایش می دهیم. مجموعه جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می توان نشان داد. به مثال های زیر دقت کنید.

نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن ها را مشخص کنید و مجموعه جواب هر نامعادله را روی محور نیز نمایش دهید.

الف) $2x < 6$ ب) $3x \leq 12$ ج) $x + 2 \geq 3$

الف) $2x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{2} \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$



ب) $3x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{12}{3} \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\}$



ج) $x + 2 \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 - 2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$



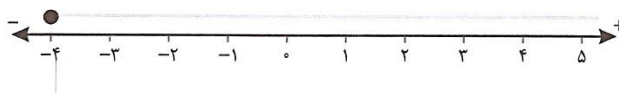
همان طور که در سه مثال بالا مشاهده کردید، روش حل نامعادله دقیقاً مانند روش های حل معادله است، فقط به جای علامت مساوی، علامت نامساوی داریم و این نکته را فراموش نکنید که اگر ضریب متغیر عدد منفی باشد و طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می کند. به مثال های زیر دقت کنید.

نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را بنویسید و روی محور نیز مشخص کنید.

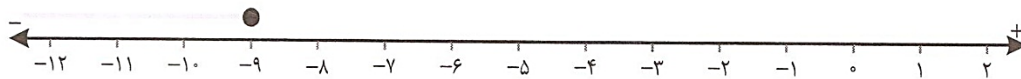
الف) $-2x \leq 8$ ب) $-\frac{2}{3}x \geq 6$

الف) $-2x \leq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{-2} \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -4\}$

توجه



$$\text{ب) } -\frac{2}{3}x \geq 6 \Rightarrow \underbrace{x \leq 6 \div \left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{توجه}} \Rightarrow x \leq 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x \leq -9 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -9\}$$



$$-2x + 1 \geq -3$$

نامعادله‌ی مقابل را حل کنید و مجموعه‌جواب را روی محور نمایش دهید.



$$-2x + 1 \geq -3 \Rightarrow -2x \geq \underbrace{-3 - 1}_{-4} \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow \underbrace{x \leq \frac{-4}{-2}}_{\text{توجه}} \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$



WWW.WIKI-DARS.IR
WWW.CLASS80M.IR