

توان و ریشه

توان: اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

توان
پایه
 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^n$$

مانند:

ضرب اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$4^7 \times 4^3 = 4^{10}$$

مانند:

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$12^7 \times 3^7 = 36^7$$

مانند:

تقسیم اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$\frac{9^5}{9^3} = 9^2$$

مانند:

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$20^8 \div 4^8 = 5^8$$

مانند:

نکته: اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

$$4^8 \times 2^3 = (2^2)^8 \times 2^3 = 2^{16} \times 2^3 = 2^{19}$$

تجزیه

$$9^2 \div 27 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3$$

تجزیه

مانند:

نکته: اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

$$2^6 + 2^6 = 2 \times 2^6 = 2^7$$

$$9^5 + 9^5 + 9^5 = 3 \times 9^5 = 3 \times (3^2)^5 = 3^{11}$$

تجزیه

مانند:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

توان منفی: برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود.

نکته: تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته: اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$$5^{-6} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$3^{-4} \times 3^2 \div 27 = 3^{-4} \times 3^2 \div 3^3 = 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\frac{5^{2-6}}{5^2 \times 4^{-6}} = \frac{5^{-4}}{5^2} = 5^{-8} = \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

$$\frac{4^7 \times 3^{-6}}{3^3 \times 4^{-2}} = \frac{4^7 \times 4^2}{3^3 \times 3^6} = \frac{4^9}{3^9} = \left(\frac{4}{3}\right)^9$$

توان و ریشه

نکته: هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$3^2 + 5^0 - 2^{-2} = 9 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{40 - 1}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

نماد علمی: برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته: به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند:

$$241000000 = 2.41 \times 10^8 \quad \text{رقم ۸}$$

$$14752/93 = 1.475293 \times 10^4 \quad \text{رقم ۴}$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی): ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند:

$$0.0000037 = 3.7 \times 10^{-6} \quad \text{رقم ۶}$$

$$0.00678 = 6.78 \times 10^{-3}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$530000 \times 0.00027 = 5.3 \times 10^5 \times 2.7 \times 10^{-4} = 14.31 \times 10^1 = 1.431 \times 10^2$$

ریشه گیری (الف): ریشه دوم اعداد: هر عدد دارای دو ریشه دوم است: (یکی مثبت و دیگری منفی)

مانند: ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و -۴

$$4^2 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \text{ و } -4$$

نکته: اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد: هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[3]{a}$ نشان می دهیم.

مانند:

$$3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{و} \quad (-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مثال: حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{64 \times \frac{1}{9}} = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt[4]{-125} = 4 \times -5 = -20$$

$$\sqrt{64} \times \sqrt[3]{-64} = 8 \times -4 = -32$$

$$\sqrt[3]{0.001} \times \sqrt{\sqrt{16}} = 0.1 \times 2 = 0.2$$

فرجه یا ریشه

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها: اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته: اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال: حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$2\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

$$8\sqrt{50} \div 4\sqrt{2} = 2\sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

$$9\sqrt[3]{54} \div 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

ساده کردن رادیکال ها: بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضربی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

ریشه دوم

$$\sqrt{128} = \sqrt{2 \times 64} = 8\sqrt{2}$$

ریشه سوم

$$\sqrt{81} = \sqrt{3 \times 27} = 3\sqrt[3]{3}$$

ریشه سوم

مانند:

جمع و تفریق رادیکال ها: اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$5\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$$

مانند:

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3 \times 25} - \sqrt{3 \times 2 \times 36} + 4\sqrt{3} = -16\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} + 3\sqrt{-54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 9} + 3\sqrt[3]{4 \times -27} + \sqrt[3]{2 \times 8} - 2\sqrt{2 \times 4} = -\sqrt{2} - 7\sqrt[3]{2}$$

گویا کردن مخرج کسره های رادیکالی: گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

مانند:

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7}$$

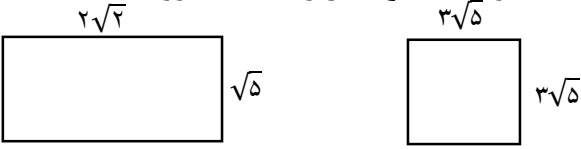
3 - 1 = 2

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

3 - 2 = 1

مانند:

توان و ریشه

ردیف	سوال	ردیف	سوال
۱	حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان دار بنویسید. $\left(\frac{4}{7}\right)^{\Delta} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\Delta} =$ $\frac{12^{\circ} \times (2^3)^2 \times 1^{12}}{2^{\Delta} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} =$	۷	مساحت و محیط هر شکل را به دست آورید.  $S = \dots$ $P = \dots$
۲	حاصل هر عبارت را به دست آورید. $4^{-2} + 3 - 2^2 =$ $\frac{3^{-2} + 3^{-1}}{2^{-3}} =$	۸	اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. 8 و $(2^2)^3$ و 2^{2^3} و 4^2 و 2^2
۳	اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید. $0.0000036 =$ $2700000 \times 10^{-4} =$ $2400000 \times 0.00273 =$	۹	نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید. $6/4 \times 10^5 =$ $7/3 \times 10^{-4} =$
۴	جرم زمین تقریباً 6×10^{24} کیلو گرم و جرم خورشید تقریباً 2×10^3 کیلو گرم است. جرم خورشید چند برابر جرم زمین است.	۱۰	در هر قسمت مقدار x را به دست آورید. الف) $9^x \times 9^{-7} = 9^5$ ب) $5^4 \div 5^x = 5^{-6}$ ج) $x^{-2} \div 3^{-2} = 4^{-2}$
۵	حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید. $\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$ $-6\sqrt{24} \div 2\sqrt{3} =$	۱۱	الف) ریشه دوم اعداد زیر را بنویسید. 36 $\frac{4}{9}$ 12 ب) ریشه سوم اعداد زیر را بنویسید. -8 0.001 64
۶	حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید. $4\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{50} =$ $\sqrt{2} - 4\sqrt{40} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{54} =$	۱۲	مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. $\sqrt{\frac{2}{5}} =$ $\frac{3}{2\sqrt{x}} =$