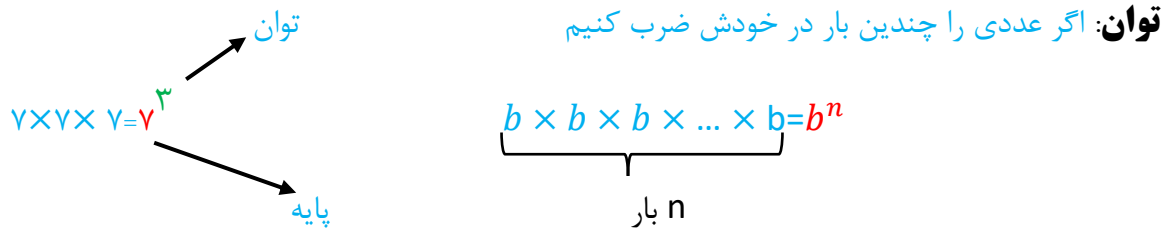


فصل چهارم: توان و ریشه

درس اول: توان صحیح



قواعد توان:

(۱) هر عددی به توان صفر برسد برابر است با یک (به شرطی که پایه صفر نباشد) $a^0 = 1 \quad a \neq 0$

مثال: $5^0 = 1$ و $(-3)^0 = 1$

(۲) هر عددی به توان یک برسد برابر است با خود عدد. $m^1 = m$ مثال: $4^1 = 4$ و $(-9)^1 = -9$

(۳) اگر عددی دو بار به توان برسد توان ها در هم ضرب می شوند (به شرطی که پایه داخل پرانتز باشد)

مثال: $(a^n)^m = a^{m \times n}$ $(3^2)^5 = 3^{10}$

(۴) ضرب اعداد توان دار:

(الف) اگر پایه ها با هم برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

مثال: $7^4 \times 7^5 = 7^9$ $(\frac{1}{7})^3 \times (0.15)^4 = (0.15)^7$

(ب) اگر توان ها با هم برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم. $a^m \times b^m = (ab)^m$

مثال: $11^4 \times 5^4 = (11 \times 5)^4 = 55^4$ $(-2)^{13} \times (4)^{13} = (-8)^{13}$

(۵) تقسیم اعداد توان دار:

(الف) اگر پایه ها با هم برابر باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

مثال: $\frac{18^8}{18^2} = 18^{8-2} = 18^6$ $(-10)^{11} \div (-10)^3 = (-10)^8$

(ب) اگر توان ها با هم برابر باشد: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم. $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$

مثال: $15^8 \div 3^8 = 5^8$ $6^5 \div 18^5 = (\frac{6}{18})^5 = (\frac{1}{3})^5$

۶) توان منفی: برای بدست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس می کنیم تا توان مثبت شود $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

مثال: $\left(\frac{3}{1}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+5}$ $\left(\frac{6}{11}\right)^{-7} = \left(\frac{11}{6}\right)^{+7}$

نکته: به طور کلی اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت منتقل شود توان آن قرینه می شود یا به عبارت دیگر هر جا به جایی صورت و مخرج توان را قرینه می کند.

نکته: در جمع چند عدد با پایه و توان برابر ابتدا آن ها را به ضرب تبدیل می کنیم و مانند قواعد ضرب حاصل آن را بدست می آوریم.

مثال: $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^1 \times 3^5 = 3^6$ $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 = 5^1 \times 5^7 = 5^8$

نکته: در ضرب و تقسیم اعداد باید به دنبال این باشیم که پایه برابر یا توان برابر پیدا کنیم. اگر نبود می توانیم پایه و یا توان را تجزیه کنیم

مثال: $8^5 \times 2^7 = (2^3)^5 \times 2^7 = 2^{15} \times 2^7 = 2^{22}$ $9^2 \div 2^7 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3^1$

ایستگاه سوال:

۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

برای جمع و تفریق توان های منفی ابتدا توان را مثبت می کنیم

الف) $3^{-1} + 2^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

ب) $3^{-2} \times 4^{-2} = (3 \times 4)^{-2} = 12^{-2} = \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$

۲) در جای خالی علامت < یا > قرار دهید

$3^{-1} > 3^{-2}$	$(0.5)^{-2} > (0.6)^{-2}$	$2^{11} < 8^4$	$-5^2 < (-5)^2$
$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	2^{11}	$-\left(\frac{1}{5}\right)^2$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	2^{12}	$-\frac{1}{25}$
	$\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}$	$(2^3)^4$	$\left(\frac{1}{-5}\right)^2$
	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$		$\frac{1}{25}$
	$(2)^{-2}$		

۳) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $3^{-4} \times 3^2 \div 2^7 = 3^{-4+2} \div 2^7 = 3^{-2} \div 2^7 = 3^{-2} \div 3^3 = 3^{-2-(3)} = 3^{-2-3} = 3^{-5}$

$$\text{ب) } \frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = 2^{8-4} \times 5^{10-6} = 2^4 \times 5^4 = 10^4$$

$$\text{پ) } (0.2)^{-4} \times 25^{-4} = (0.2)^{-4} \times (5^2)^{-2} = (0.2)^{-4} \times 5^{-4} = (0.2 \times 5)^{-4} = 1$$

$$\text{ت) } \frac{9^4 \div 9^{-2}}{3^{-7} \times 3^2} = \frac{9^{4-(-2)}}{3^{-7+2}} = \frac{9^6}{3^{-5}} = \frac{(3^2)^6}{3^{-5}} = \frac{3^{12}}{3^{-5}} = 3^{12-(-5)} = 3^{12+5} = 3^{17}$$

درس دوم: نماد علمی

نماد علمی: برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم

نکته: به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد بزرگتر از یک (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مثال:

$$47890000 = 4.789 \times 10^7$$

$$3756 = 3.756 \times 10^3$$

$$37564/93 = 3.756493 \times 10^4$$

ب) نماد علمی اعداد بین صفر و یک (توان منفی): ابتدا یک رقم به غیر از صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم

$$0.0000768 = 7.68 \times 10^{-5} \quad 0.00678 = 6.78 \times 10^{-3} \quad 0.967 = 9.67 \times 10^{-1}$$

نکته: اگر عدد به صورت نماد علمی باشد می توان آن را به صورت نمایش اعشاری نوشت

الف) اگر توان مثبت باشد به اندازه عدد توان ممیز را به سمت راست می بریم

$$3/456 \times 10^{+4} = 34560$$

ب) اگر توان منفی باشد به اندازه عدد توان ممیز را به سمت چپ می بریم

$$8/3 \times 10^{-3} = 0.0083$$

$$7/8 \times 10^{-1} = 0.78$$

ایستگاه سوال:

۱) هر یک از عدد های داده شده را با نماد علمی بنویسید

$$2450000 = 2.45 \times 10^6$$

$$0.007 = 7 \times 10^{-3}$$

$$14.4 = 1/4.4 \times 10^{+3}$$

$$.72 = 7/2 \times 10^{-5}$$

(۲) نمایش اعشاری عدد های زیر را بنویسید

$$9/0.4 \times 10^{-3} = .000904$$

$$7 \times 10^{+6} = 7000000$$

(۳) حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت نماد علمی بنویسید

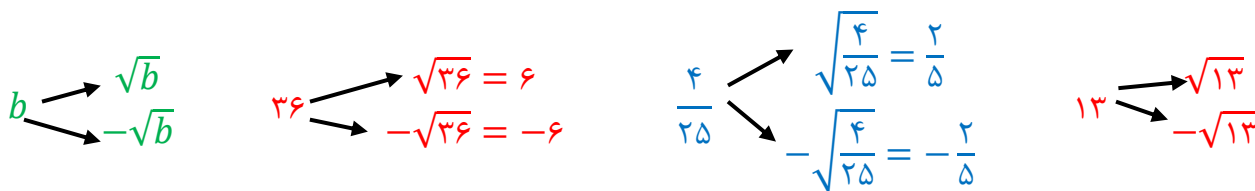
الف) $(.000009 \times 4 \times 10^{11}) = 9 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{11} = 36 \times 10^{-6+11} = 36 \times 10^{+5} = 3/6 \times 10^{+1} \times 10^{+5} = 3/6 \times 10^{+6}$

ب) $\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{12/5}{25} \times \frac{10^{-4}}{10^{-19}} = .48 \times 10^{+15} = 48 \times 10^{-1} \times 10^{+15} = 48 \times 10^{-1+15} = 48 \times 10^{+14}$

درس سوم: ریشه گیری

ریشه

الف) ریشه دوم اعداد: به طور کلی هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دوم دارد.



مثال: عدد ۶- ریشه دوم ندارد

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند

ب) ریشه سوم اعداد: به طور کلی همه ی اعداد حقیقی یک ریشه سوم دارند. فرجه یا ریشه سوم $\sqrt[3]{a}$

مثال: ریشه سوم $\sqrt[3]{8} = 2$ (یعنی چه عددی را سه بار در خودش ضرب کنیم ۸ می شود)

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[3]{14^3} = 14$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10}$$

ضرب و تقسیم رادیکال ها:

نکته: اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب می کنیم و یا بر هم تقسیم کنیم.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

نکته: اگر پشت رادیکال ها اعداد صحیح باشد ابتدا عددهای صحیح را در هم ضرب و یا تقسیم می کنیم سپس رادیکال ها

$$2\sqrt{2} \times 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2 \times 8} = 6\sqrt{16} = 6 \times 4 = 24$$

$$\frac{\sqrt{8 \times 5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

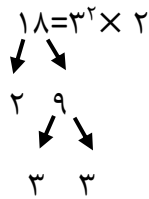
$$9\sqrt[3]{54} \div 3\sqrt[3]{2} = \frac{9\sqrt[3]{54}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{9}{3} \times \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 3 \times \sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

$$\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{60}}{1} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 60}{5}} = \sqrt[3]{18 \times 12} = \sqrt[3]{216} = 6$$

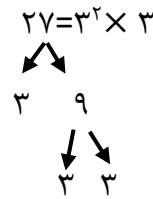
ساده کردن رادیکال ها: بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد به این صورت که با توجه به هر رادیکال عددهای زیر رادیکال را تجزیه درختی می کنیم و براساس فرجه توان دار می کنیم و هر پایه که توان آن با فرجه برابر باشد از زیر رادیکال ها بیرون می آید.

مانند:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$



$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$



$$\sqrt{128} = \sqrt{(2^3 \times 2^3 \times 2)} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

تجزیه درختی میکنیم و سپس حاصل را به صورت روبه رو بدست می آوریم

ایستگاه سوال

(۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$$

↑ منفی
↑ مثبت
↑ قرینه

(الف) اگر $y > 0$ و $x < 0$ باشد:

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = -x - (-y) = -x + y$$

↑ منفی
↑ منفی

(ب) اگر $y < 0$ و $x < 0$ باشد:

(۲) جاهای خالی را پر کنید:

$$-\sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{7}{4} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

(الف) ریشه دوم عدد $\frac{49}{16}$ برابر است با

$$\sqrt{-5}$$

(ب) ریشه سوم عدد -5 برابر است با

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = +1$$

پ) عبارت $\sqrt{(-1)^2} = -1$ نادرست است زیرا

۳) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

الف)
$$\frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{15}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 54}}{\sqrt[3]{9 \times 15}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2}$$

ب)
$$-5\sqrt{3} \times 2\sqrt{12} = -10 \times \sqrt{36} = -10 \times 6 = -60$$

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال ها

جمع و تفریق رادیکال ها: برای جمع و تفریق رادیکال ها باید فرجه ها با هم برابر و هم چنین عبارت های زیر رادیکال با هم برابر باشد آنگاه عددهای پشت رادیکال را با هم جمع و تفریق می کنیم.

$$3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1\sqrt{5}$$

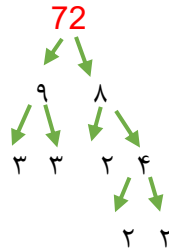
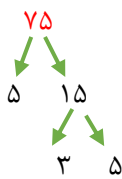
مانند:

$$-7\sqrt[3]{14} - 5\sqrt[3]{14} = -12\sqrt[3]{14}$$

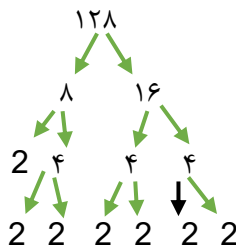
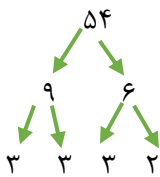
نکته: اگر فرجه ها با هم برابر باشند ولی عبارت زیر رادیکال با هم برابر نباشند آنگاه عبارت زیر رادیکال ها را ساده می کنیم تا با هم برابر باشند سپس جمع و تفریق می کنیم.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5^2 \times 3} - 3\sqrt{3^2 \times 2 \times 2} + 4\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 3 \times 2 \times 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 18\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -16\sqrt{2} - 1\sqrt{3}$$



$$5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128} = 5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3^3 \times 2} - 4\sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2} = 5\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$



گویا کردن مخرج کسرها:

الف) اگر مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد: صورت و مخرج کسر را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \qquad \frac{1}{3\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{9 \times \sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{9 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم با این تفاوت که بررسی می کنیم چقدر توان مخرج کم دارد تا به ۳ برسد که با فرجه برابر باشد حال که عدد زیر رادیکال را پیدا کردیم در صورت و مخرج ضرب می کنیم.

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

(توان ۵ عدد یک است پس یک ۵^۲ کم داریم تا با فرجه برابر شود.)

$$\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{4 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2 \times a}} = \frac{4 \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{4 \sqrt[3]{a}}{a}$$

ایستگاه سوال

۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{2^2 \times 5} + 2 - \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{10}$
 $= 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{2^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

۲) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

۳) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) در جای خالی علامت > یا = یا < قرار دهید.

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} > \sqrt{5+4}$$

$\sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{16} > \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0$$

(ب) در جای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = \frac{\cancel{12}^2}{\cancel{4}^1 \times \cancel{3^2}^2} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{9}^2} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

ایستگاه سوالات پایان فصل

<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $(-\frac{1}{5})^{-2} = \frac{1}{5}$</p> <p>(ب) $180000 = 1/8 \times 10^4$</p> <p>(ت) $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$</p>	<p>۱</p>
<p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>(الف) ریشه ی سوم عدد -27 مساوی است</p> <p>(ب) حاصل $5^{-1} + 3^{-1}$ برابر است.</p>	<p>۲</p>
<p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>(الف) حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$ کدام گزینه است.</p> <p>(۱) $\sqrt{2} - 2$</p> <p>(۲) $2 - \sqrt{2}$</p> <p>(۳) صفر</p> <p>(۴) $\pm(\sqrt{2} - 2)$</p> <p>(ب) حاصل $(-\frac{1}{10})^{-1}$ گزینه می باشد.</p> <p>(۱) 10</p> <p>(۲) -10</p> <p>(۳) $\frac{1}{10}$</p> <p>(۴) $-\frac{1}{10}$</p>	<p>۳</p>
<p>حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.</p> $\frac{20^1 \times 5^2}{5^2 \times 4^1} =$	<p>۴</p>
<p>در جای خالی علامت $< = >$ قرار دهید.</p> <p>$5^{-2} \square (-5/5)^{-2}$</p> <p>$(-4)^{-2} \square 4^{-2}$</p>	<p>۵</p>
<p>حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید</p> $25 \times 10^{-19} \times 4/2 \times 10^7 =$	<p>۶</p>

<p>حاصل عبارت زیر را بدست آورید.</p> $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{32}}{\sqrt{8}} =$	۷
<p>عبارت های زیر را ساده کنید.</p> $5\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{75} =$ $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{50}) =$	۸
<p>مخرج کسر زیر را گویا کنید.</p> $\frac{5}{\sqrt{8}}$	۹
<p>اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.</p> $1^{-1000}, 8^{-4}, 0/25^{-5}, 25^3, 2^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^0, (-1)^{13}$	۱۰