توجه : برای سرعت بخشیدن به محاسبه در انتها می توانستیم زاویه خارجی پنج ضلعی را بدست آوریم $۳۶ = ۱۴۴ - ۱۸۰$ و ۳۶۰درجه که مجموع زوایای خارجی را بین ۳۶ زاویه تقسیم کنیم که $۱۰ = \frac{۳۶۰}{۳۶}$

فصل ۴

توان و ریشه :

این فصل از اهمیت بالایی در دروس آینده و سال های بالاتر دارد

با مفهوم توان و ریشه دوم (جذر یک عدد) آشنا هستیم و می دانیم که در صورتی که عدد مربع کامل باشد ریشه دوم عدد مقداری دقیق و در غیر این صورت تقریبی است مانند $\sqrt{۳۶} = ۶$ و $\sqrt{۳۲} \simeq ۵/۶$ اما خواهیم دید که می توانیم ریشه سوم و چهارم و... و n ام را هم بدست آوریم . همچنین با توان منفی آشنا خواهیم شد .

نماد علمی اعداد را برای نمایش اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک معرفی می کنیم و در انتها با جمع و تفریق در اعداد با نماد رادیکالی بحث خواهیم کرد .

توان صحیح :

با مفهوم های زیر آشنا هستیم

$$a^{۱} = a \rightarrow ۱۳۹۵^{۱} = ۱۳۹۵$$

$$a^{۰} = ۰ \rightarrow ۱۳۹۶^{۰} = ۰$$

$$۰^{a} = ۰, ۱^{۱۳۹۷} = ۱$$

به توان زوج و به توان منفی و رابطه آن با علامت منفی دقت کنید ، اهمیت پرانتز فراموش نشود مثال های زیر را با هم مقایسه می کنیم

$$(-۲)^{۲} = +۴ \ , (-۲)^{۳} = -۸ \quad , -۲^{۲} = -۴ \ , \qquad -۲^{۳} = -۸$$

سوال۱ : حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$-۱^{۲n} + (-۱)^{۲n} + ۱^{۲n} + ۱^{۱۳۹۶} =$$

سوال ۲ : مجموع مکعب عدد دو با مجذور عدد حاصل چقدر می شود ؟

توجه : توان های متوالی در اعداد بستگی به پرانتز در آنها دارد در صورتی که پرانتز بین آنها باشد توانها در هم ضرب می شوند در غیر این صورت هر بار دو عدد بالاتر را در نظر گرفته و حاصل عدد را به صورت توانی به دست می آوریم و این کار را تا پایین تر عدد ادامه می دهیم .

$(a^m)^n = a^{mn}$ و a^{m^n} دو عبارت متفاوت هستند

$$(((۲^{۳})^{۲})^{۴})^{۳} = ۲^{۳\times۲\times۴\times۳} = ۲^{۷۲}$$

$$-۲^{۲^{۳^{۲}}} = -۲^{۲^{۹}} = -۲^{۵۱۲}$$

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$((۳^{۲})^{۴})^{۲^{۳}} = ۳^{۲\times۴\times۲^{۳}} =$$

نکته : با توجه به قانون توان ها داریم $a^n \times a^m = a^{m+n}$ و همین طور از عکس رابطه داریم

(قانون تبدیل جمع در توان به ضرب)

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

همین طور داریم : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ و همین طور از عکس رابطه داریم

(قانون تبدیل تفریق در توان به تقسیم)

$$a^{m-n} = a^m \div a^n$$

قانون پخش توان داخل پرانتز :

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(a \div b)^m = a^m \div b^m$$

$$(\frac{a}{b})^m = a^m \div b^m$$

$$((\frac{۳}{۴})^۳ \times ۰/۷۵^۲)^۲ = (\frac{۳}{۴})^۶ \times ۰/۷۵^۴ = (\frac{۳}{۴})^{۱۰}$$

$$(۳^{۱۰} \div (\frac{۱}{۲})^{۱۰})^۳ = ۳^{۳۰} \div (\frac{۱}{۲})^{۳۰} = (۳ \times \frac{۲}{۱})^{۳۰} = ۶^{۳۰}$$

تجزیه در عبارت های توان دار :

در عبارت های توان دار ابتدا می توانیم پایه ها را تجزیه کنیم و سپس از نکات بالا استفاده کنیم

مثال :

$$۱۲^۳ \times ۱۸^۴ = (۳ \times ۲^۲)^۳ \times (۲ \times ۳^۲)^۴ =$$

قانون توان منفی :

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$$

$$۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$$

$$(\frac{۲}{۳})^{-۲} = \frac{۱}{(\frac{۲}{۳})^۲} = (\frac{۳}{۲})^۲$$

از عبارت بالا داریم به طور کلی :

$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^{n}$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

$(-۳)^{-۳} \times (-۲)^{-۳} =$

$((\frac{۲}{۳})^{-۲})^{۲} =$

$(-(\frac{۲}{۳})^{-۲})^{۲} =$

$۲^{۲^{۳}} + (۲^{۲})^{۳} + ۲^{۰} =$

$۷^{۱۸} \times ۲۱^{۳} \times ۳^{۱۸} =$

$\frac{۳^{۱۳۹۵} + ۳^{۱۳۹۶} + ۳^{۱۳۹۷}}{۳^{۱۳۹۵}} =$

$۲۵^{-۶} \times ۱۶^{-۳} = (۵^{۲})^{-۶} \times (۲^{۴})^{-۳} =$

$(۰/۵)^{-۷} \times (۰/۲۵)^{۵} =$

سوال : اگر $A = ۳^{۲۵}$ و $B = ۹^{۲۰}$ باشد ، حاصل عبارت $۸۱B^{۲} \div ۹A^{۴}$ را به صورت عدد توان دار بنویسید .

سوال : اگر $a^{b} = c$ و $c^{d} = e$ و $e^{f} = g$ باشد حاصل a^{bdf} را بدست آورید .

سوال : اگر $x^{y} = z$ و $z^{v} = x$ باشد حاصل $(yv)^{۲}$ را بدست آورید .

سوال : ثلث عدد $۹^{۸۱}$ و ربع عدد $۸^{۴^{۲}}$ را بدست آورید

سوال : دو عدد $۱۶^{۲۵}$ و $۶۴^{۱۶}$ را باهم مقایسه می کنیم :

از تجزیه پایه ها استفاده می کنیم :

سوال : اعداد $۹^{-۹}$ و $۲۷^{-۵}$ چطور ؟ (راهنمایی : در انتها به مقایسه کسرهای کوچکتر از واحد دقت می کنیم!)

سوال : اعداد $۲^{۶۳}$ و $۳^{۴۳}$ چطور ؟

$$۲^{۶۳} = (۲^{۲۱})^{۳} \to ۸^{۲۱}$$

$$(۳^{۲})^{۲۱} \times ۳ = ۹^{۲۱} \times ۳$$

در نتیجه :

سوال : حاصل عبارت زیر را به صورت توان دار می نویسیم:

$$۳^{۱۰۰} + ۹^{۵۰} + ۵ \times ۸۱^{۲۵} = ۳^{۱۰۰} + (۳^{۲})^{۵۰} + ۵ \times (۳^{۴})^{۲۵} = ۳^{۱۰۰} + ۳^{۱۰۰} + ۵ \times ۳^{۱۰۰} = ۷ \times ۳^{۱۰۰}$$

سوال : اگر $۳^{a} = ۷$ و $۷^{b} = ۳$ باشد ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید

الف : $۳^{۲ab}$

ب : ۲۱^{ab}

پ : $۴۹^{ab+۱}$

پاسخ : الف : $۳^{۲ab} = (۳^{a})^{۲b} = ۷^{۲b} = (۷^{b})^{۲} = ۳^{۲} = ۹$

$$(۳ \times ۷)^{ab} = ۳^{ab} \times ۷^{ab} = (۳^{a})^{b} \times (۷^{b})^{a} =$$

$$۴۹^{ab+۱} = ۴۹^{ab} \times ۴۹^{۱} = (۷^{۲})^{ab} \times ۴۹^{۱} = (۷^{b})^{۲a} \times ۴۹ =$$

سوال : نسبت مجذور عدد $۴^{x+۱}$ به جذر عدد $۱۶^{۲x}$ کدام است ؟

۱) $۴^{x+۲}$ ۲) $۲^{۴x}$ ۳) $۲^{۴}$ ۴) $۴^{۲x}$

سوال : خمس عدد 5^{5k-10} را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت $(2^3)^2 \times 2^{-3^2} \times 2^{-2^3}$ را بدست آورید

سوال : مساحت مربعی برابر با 3^{32} متر مربع می باشد محیط آن را بدست آورید

سوال : اگر روز اول یک ماه a تومان پول داشته باشیم و هر روز پول ما سه برابر شود مطلوب است محاسبه پول بعد از ۵ روز ، ۱۲ روز و ۳۰ روز .

پاسخ : داریم

روز اول a تومان

روز دوم : $3 \times a$ تومان

روز سوم : $3 \times (3 \times a)$

روز چهارم : $3 \times (3 \times 3 \times a)$

با الگوی موردنظر روز ۵ عبارت است از $3^4 a$ و روز ۱۲ و ۳۰ عبارت است از :

سوال : حاصل عبارت $(-1)^{1395} + \cdots + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^1$ برابر است با :

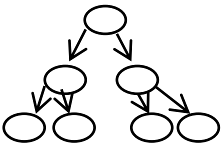
۱) $+1$ ۲) -1395 ۳) $+1395$ ۴) -1

سوال : عدد $۲^{۴}$ را به چه توانی برسانیم تا حاصل آن $۴^{۱۰}$ شود .

سوال: نوعی باکتری داریم که در هر ۵ دقیقه به دو قسمت تقسیم می شوند . بعد از ۸ ساعت تعداد باکتری ها را به دست آورید ؟

پاسخ : اگر هر بار باکتری به دو قسمت تقسیم شوند یعنی هر مرحله دو برابر قبل می شوند یعنی در مرحله n تعداد آنها برابر ۲^{n} خواهد بود

در هر ۵ دقیقه دو برابر می شوند و بعد از یک ساعت $۱۲ = \frac{۶۰}{۵}$ بنابراین در یک ساعت ۱۲ مرحله تقسیم باکتری داریم یعنی



$۲^{۱۲}$ باکتری در یک ساعت

حالا بعد از ۸ ساعت $۹۶ = ۸ \times ۱۲$ مرحله تقسیم باکتری و تعداد آنها $۲^{۹۶}$ عدد ! خواهد بود .

سوال : بین $۲^{۴}$ و $-۲^{۵}$ چند عدد صحیح و طبیعی وجود دارد ؟

توجه : اگر $a^{۲} < a$ باشد در مورد a داریم $۰ < a < ۱$

نکته : در صورتی که یکان عددی رقم های ۰ و ۱ و۵ و ۶ باشد به هر توانی آن را برسانیم یکان تغییر نخواهد کرد

$$۶^{۲} = ۳۶ \quad , \quad ۱۶^{۲} = ۲۵۶ \ , ۱۱^{۲} = ۱۲۱ \quad , \qquad ۵^{۳} = ۱۲۵ \ , ۱۰^{۲} = ۱۰۰$$

سوال : داریم $A = ۱۱^{۱۰۰}$ و $B = ۶^{۲۰۰}$ و $C = ۱۵^{۱۳۹۶}$ مجموع یکان عددهای A و B و C را بدست آورید .

توجه : رقم یکان را اگر ۹ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۹^{۲} = ۸۱$$

$$۹^{۱} = ۹$$

$$۹^{۳} = ۷۲۹$$

می بینیم توان فرد یکان ۹ و توان زوج یکان ۱ تولید می کند .

توجه ۲ : رقم یکان را اگر ۴ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۴^{۱} = ۴$$

$$۴^{۲} = ۱۶$$

می بینیم توان فرد یکان ۴ و توان زوج یکان ۶ تولید می کند .

مثال : مجموع یکان در عبارت زیر را مشخص کنید

$$۱۳۹۶^{۳} + ۱۴۰۴^{۴} = \cdots ۶ + \cdots ۶ = \cdots ۱۲$$

نکته : برای مشخص کردن تعداد ارقام یک عدد توان دار می توانیم با تجزیه پایه ها به ۲ و ۵ پایه ای از ۱۰ بسازیم در سوالات می توانیم برای تقریب از $۱۰۰۰ \simeq ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ نیز استفاده کنیم به مثال زیر دقت کنیم:

مثال : عدد $۱۲۵^{۲۵} \times ۱۶^{۲۰}$ چند رقمی است ؟

$$۱۲۵^{۲۵} \times ۱۶^{۲۰} = (۵^{۳})^{۲۵} \times (۲^{۴})^{۲۰} = ۵^{۷۵} \times ۲^{۸۰}$$

در صورتی می توانیم پایه ۱۰ بسازیم که توان ها برابر باشند بنابراین ... $(۵^{۷۵} \times ۲^{۷۵}) \times ۲^{۵} = ۱۰^{۷۵} \times ۳۲ = ۳۲\ldots$ که عدد موردنظر ۳۲ با ۷۵ تا صفر جلوی آن خواهد بود بنابراین تعداد رقم ها برابر ۷۷ خواهد بود . در مورد مجموع ارقام این عدد می توانیم بگوییم مجموع ارقام برابر با $۵ = ۲ + ۳$ می باشد .

سوال : (تیزهوشان) عدد $۱۶^{۸} \times (۰/۲۵)^{۳} \times ۱۲۵^{۹}$ چند رقمی است ؟

سوال : (انرژی اتمی) عدد $۲^{۴۰}$ چند رقمی است ؟

پاسخ : از نکته استفاده کنیم $۱۰^{۱۲} = (۱۰^{۳})^{۴} = (۲^{۱۰})^{۴}$ که عدد موردنظر ۱۳ رقمی می تواند باشد

سوال : الگوی مربوط به عبارت های زیر را بدست آورید ؟

$$۱۰^{۲} - ۱۰^{۱} = ۱۰۰ - ۱۰ = ۹۰$$

$$۱۰^{۳} - ۱۰^{۱} = ۱۰۰۰ - ۱۰ = ۹۹۰$$

$$۱۰^{۳} - ۱۰^{۲} = ۱۰۰۰ - ۱۰۰ = ۹۰۰$$

$$۱۰^{n} - ۱۰^{m} = ۹۹ \ldots ۹۹۰۰۰ \ldots ۰۰۰$$

نکته : الگوی مربوط به عبارت توانی

$$۱۰^{n} - ۱۰^{m} = ۹۹ \ldots ۹۹۰۰۰ \ldots ۰۰۰$$

به صورت زیر می باشد :

تعداد رقم های ۹ برابر است با :

و تعداد رقم های صفر برابر است با :

سوال : با توجه به الگوی بالا مجموع ارقام در عبارت $۱۰^{۲۵} - ۱۰^{۱۹}$ را بدست آورید ؟

سوال : مجموع ارقام در عبارت $۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n}$ را بدست آورید ؟

$$۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n} = ۹۹۹ \ldots ۹۹۹۰۰۰ \ldots ۰۰۰$$

که تعداد ارقام ۹ برابر است با : تفاضل توان ها یعنی $۸n - ۳n = ۵n$ و تعداد صفرها برابر $۳n$ بنابراین مجموع ارقام عبارت است از $۹ \times ۵n = ۴۵n$

سوال : اگر $۴a + ۲۰ = ۲^{۱۶}$ باشد در این صورت عبارت $۲^{۳۰}$ را بر حسب a بنویسید .

پاسخ : $۲^{۳۰} = \frac{۲^{۳۲}}{۲^{۲}} = \frac{(۲^{۱۶})^{۲}}{۴} = (\frac{۴a+۲۰}{۴})^{۲} = (a+۵)^{۲}$

سوال : عبارات زیر را با توان مثبت بنویسید

$$\frac{۸^{-۵} \times ۳^{-۷}}{۳^{-۹} \times ۲^{-۱۸}} =$$

$$\frac{a^{-۴} \div b^{-۵}}{(a^{۴}b^{۵})^{-۱}} =$$

$$(\frac{a^{-۲} \times b^{-۲}}{b^{-۲} \div a^{-۲}})^{-۱} =$$

$$\frac{۳^{۷} - ۳^{-۳}}{۳^{۸} - ۳^{-۲}} = \frac{۳^{-۳}(۳^{۱۰} - ۱)}{۳^{-۲}(۳^{۱۰} - ۱)} =$$

$$۱۲ \times ۲^{-۳} - ۱۵ \times ۲^{-۳} + ۴ \times ۲^{-۳} = ۲^{-۳}(۱۲ - ۱۵ + ۴) =$$

$$\frac{۲^{۱۴} + ۲^{۱۶} + ۲^{۱۸} + ۲^{۲۰}}{۲^{-۸} + ۲^{-۱۰} + ۲^{-۱۲} + ۲^{-۱۴}} =$$

سوال :آیا تساوی $(-۳^{۳})^{۲} = (-۳^{۲})^{۳}$ می تواند درست باشد ؟

سوال : اگر $۹^{x} = ۱۰۰$ باشد ، مطلوب است عبارهای زیر :

$۳^{۳x+۱}$

$(\frac{۱}{۲۹})^{۲-x}$

$۸۱^{x-۱}$

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$۳^۲ - ۲^۳(۲^۲ - ۲^۳(۳^۲ - ۱)^{-۱})^{-۱} =$$

پاسخ :

$$۹ - ۸(۴ - ۸(۹ - ۱)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸(۴ - ۸(۸)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸\left(۴ - ۸\left(\frac{۱}{۸}\right)\right)^{-۱} = ۹ - ۸(۳)^{-۱} = ۹ - \frac{۸}{۳}$$

سوال :

$$\frac{۵ \times ۳^{۵۰} + ۷ \times ۹^{۲۵} - ۲ \times ۳^{۵۰} - ۸ \times ۹^{۲۵}}{(\frac{۱}{۹})^{۲۰} \times (\frac{۱}{۳})^{۱۰}} =$$

$$\left[-\left(\frac{۱}{۸۱}\right)^{۳^{-۱}} - ۳^{-۳}\right]^{-۲} =$$

$$\frac{-۲^{۲^۳} \times (۳^۲)^۴}{۴^۳ \times (-۹^۲)} =$$

$$(a^{-۲}bc^{-۲})^{\frac{۱}{۴}} \times (a^{-۱}b^{-۳}c^{-۴})^{-\frac{۱}{۳}} =$$

$$\frac{(۰/۲۵)^{-۳} \times ۶۴^۲}{(۰/۱۲۵)^۳ \times ۲^{-۳}} =$$

سوال : اگر $a = ۳^{k-۱}$ و $b = ۳^k$ و $c = ۳^{k+۱}$ باشند بین این سه عدد روابط موجود را مشخص کنید ؟

$$\frac{a}{b} =$$

$$\frac{c}{b} =$$

سوال : قطر خورشید حدود ۱۴×۱۰^۸ متر و قطر اتم هیدروژن $۱۰^{-۱۰}$ متر است . قطر خورشید چند برابر قطر اتم هیدروژن است ؟

تمرین :

$$\left[(۲^{-۱}+۴^{-۱})^{-۱}+(\frac{۱}{۲})^{-۱}\right]^{-۲}=$$

سوال : اگر $A=(x^{x^x})^{x^x}$ باشد ، A^x برابر است با : (علامه طباطبایی)

۱) $x^{x^{x^{۲x}}}$ ۲) $x^{x^{x^۲}}$ ۳) $x^{x^{۲x+۱}}$ ۴) $x^{x^{x+۲}}$

پاسخ : $A=(x)^{x^x\times x^x}=(x)^{x^{۲x}}$

$$A=(x)^{x^{۲x}}\rightarrow A^x=((x)^{x^{۲x}})^x=(x)^{x^{۲x}\times x}=x^{x^{۲x+۱}}$$

سوال : اگر داشته باشیم $M=۲^۱\times۲^۵\times۲^۹\times\ldots\times۲^{۸۵}$ و $N=۲^۲\times۲^۶\times۲^{۱۰}\times\ldots\times۲^{۸۶}$ حاصل $\frac{M}{N}$ را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

$$A=۲^{-۱}+۲^{-۲}+۲^{-۳}+۲^{-۴}+\cdots$$

$$B=۳^{-۱}+۳^{-۲}+۳^{-۳}+۳^{-۴}+\cdots$$

$$C=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۲۵۶}+\cdots$$

پاسخ :

در فصل اول داشتیم مجموع دنباله های هندسی (هر جمله از ضرب عددی در جمله قبل باشد) از فرمول مشخصی بدست می آید اما در صورتی که اعداد کوچکتر و کوچکتر شوند از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\text{جمله اول}}{\text{قدرنسبت} - ۱}$$

بنابراین داریم

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots$$

و طبق فرمول

$$\frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱$$

اما چرا این فرمول را استفاده می کنیم :

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots \rightarrow ۲A = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots \rightarrow ۲A = ۱ + A \rightarrow ۲A - A = ۱ \rightarrow A = ۱$$

تمرین : کدام عدد بزرگتر است ؟ $۲^{۹۰}$ و $۳^{۷۵}$ و $۴^{۶۰}$ و $۵^{۴۵}$

تمرین : حاصل $۱ \times (-۱)^{۱} + ۲ \times (-۱)^{۲} + ۳ \times (-۱)^{۳} + \cdots + ۱۳۹۶ \times (-۱)^{۱۳۹۶}$ را بدست آورید .

$$۱ \times (-۱)^{۱} + ۲ \times (-۱)^{۲} + ۳ \times (-۱)^{۳} + \cdots + ۱۳۹۶ \times (-۱)^{۱۳۹۶}$$
$$= -۱ + ۲ - ۳ + ۴ - \cdots - ۱۳۹۵ + ۱۳۹۶ = ۱ + ۱ + \cdots + ۱ = ۶۹۸$$

سوال : حاصل عبارت $A = ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \cdots + ۲^{۱۳۹۵}$ را بدست آورید

$$A + ۲ = ۲ + (۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \cdots + ۲^{۱۳۹۵}) = ۲ \times ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \cdots + ۲^{۱۳۹۵}$$
$$= ۲^{۲} + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \cdots + ۲^{۱۳۹۵} =$$

روش دوم : طبق فرمول نیز می توانیم به نتیجه برسیم :

$$\frac{۲(۱-۲^{۱۳۹۵})}{۱-۲}$$

تمرین : مطلوب است مقدار عددی $\frac{۳^۶-۳^۵-۳^۴-۳^۳}{۳^۳}$

تمرین :مطلوب است حاصل کسر توانی $A=\frac{۲^x+x^{x+۱}+۲^{x+۲}}{۲^{x+۳}-۲^x}$

سوال : مطلوب است : $۲^{۱۳۹۶}-۲^{۱۳۹۵}-۲^{۱۳۹۴}-\cdots-۲^۱$

راهنمایی : $۲^{۱۳۹۶}-۲^{۱۳۹۵}=۲^{۱۳۹۵}(۲-۱)=۲^{۱۳۹۵}$

توجه : به یاد داریم که مجذور کامل ساختن به توان های زوج و مکعب کامل مضارب ۳ نیاز دارد .

مثال : کوچک ترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب می شود حاصل مجذور کامل می شود کدام عدد است ؟

پاسخ : در تجزیه عدد ۳۶۰ با توان های زوج عامل ها عبارت اند از :

$$۳۶۰=۲^۲\times۳^۲\times۲\times۵$$

توان های غیر زوج عبارتند از ۲ و ۵ که باید زوج شوند بنابراین $۲^۲\times۳^۲\times۲\times۵\times۲\times۵=۲^۴\times۳^۲\times۵^۲$

که کوچکترین عدد ضرب شده برای مجذور کامل شدن ۱۰ می باشد

مثال : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مجذور کامل عبارت است از $۴^۲$ تا $۹^۲$ برابر با پنج عدد می باشد

تعداد همین اعداد مجذور کامل سه رقمی برابر است با : $۱۰^۲$ تا $۳۱^۲$ برابر با ۲۲ می باشد .

مثال : کوچک ترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب می شود حاصل مکعب کامل می شود کدام عدد است ؟

پاسخ :

$$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \rightarrow (۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵) \times ۳ \times ۵^۲$$

مثال : چند عدد مکعب کامل دو رقمی داریم : $۳^۳$ و $۴^۳$ و اعداد مکعب کامل ۳ رقمی از $۵^۳$ تا $۹^۳$ برابر ۵ عدد می باشد .

سوال : بین اعداد ۱۰۰۱ تا $۲^{۱۵} - ۱$ چند عدد مکعب داریم

$$۱۰۰۱ = ۱۰^۳ + ۱ \text{ و } ۱۱^۳ \text{ و } ... \text{ و } ۲^{۱۵} - ۱ = (۲^۵)^۳ = ۳۲^۳ - ۱ \rightarrow ۱۱^۳, ..., ۳۱^۳$$

معادلات توانی :

به هر معادله ای که مجهول در توان قرار گرفته باشد معادله توانی یا نمایی می گوییم

بریا حل این معادلات کافی است پایه ها را مساوی کنیم تا بتوانیم توان ها را نیز با هم مساوی کنیم

مثال :

$$۳^{۲x-۱۰} = ۱$$

$$۳^{۲x-۱۰} = ۳^۰ \rightarrow ۲x - ۱۰ = ۰ \rightarrow ۲x = ۱۰ \rightarrow x = ۵$$

مثال ۲ :

$$۳^{۲x-۵} = ۲۷$$

مثال ۳: $۲^{۲x-۱} = ۵^{۴x-۲}$

$$۲^۰ = ۵^۰ = ۱ \rightarrow ۲x - ۱ = ۴x - ۲ = ۰$$

$$۲x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$۴x - ۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

توجه : در حالتی که پایه ها بعد از تجزیه نیز یکی نشدند باید از ترفند مثال ۳ استفاده کنیم یعنی توان ها را صفر در نظر می گیریم

سوال : معادله های توانی زیر را حل کنید

$۱۶^{x+۱} = ۲۵۶$

$(۰/۲)^{x-۱۴} = ۱۲۵^{۲x}$

$۵^{x-۲} = ۷^{۳x+y+۱}$

(از نکته توان صفر استفاده کنید)

$(\frac{۱}{۱۶})^{۴-x} = ۸^{۲x+۲}$

$(۰/۰۰۸)^{x-۲} = ۲۵^{۳+x}$

$۳^{x} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۴} = ۸۱۹$

$۵^{x+۲} - ۵^{x-۱} = ۶۲۰$

$(\frac{۱}{۱۶})^{۳x} = ۲^{x+۱}$

سوال : تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $k+۳$ عضوی ۱۱۲ واحد از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی بیش تر است .عدد k را مشخص کنید .

سوال : در معادله ی $۲^{۲x} \times ۴ + ۲۴ = ۲۸۰$ مقدار x برابر است با :

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) صفر

سوال : جواب معادله ی $۲x^۵ - ۶ = ۹۰ - x^۵$ کدام است ؟

۱) ۵   ۲) ۲   ۳) ۲-   ۴) ۲$\pm$

سوال : در معادله ی توانی $۲^{۲^{۲^n}} = ۱۶^{۶۴}$ مقدار n کدام است ؟

۱) ۳   ۲) ۸   ۳) ۱۶   ۴) ۶۴

پاسخ : از تجزیه سمت راست شروع کنیم

$$۲^{۲^{۲^n}} = ۱۶^{۶۴} = (۲^۴)^{۶۴} = ۲^{۲۵۶}$$

پایین ترین پایه ها را مرحله اول خط می زنیم در این صورت داریم :

$$۲^{۲^n} = ۲۵۶$$

و روند بالا را ادامه می دهیم :

تمرین : اگر داشته باشیم $۳^{x^۲+۲}+۳^{x^۲+۱}+۳^{x^۲}=۱۰۵۳$ حاصل $x^۴+۶۵$ بر کدام عدد بخش پذیر است ؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

تمرین : اگر $۴^x\times ۶^y=۴۸^{۱۲}$ مقدار $x+y$ کدام است ؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۸ ۴) ۳۶ ۵) ۳۲

تمرین : اگر $۳^{x-۲}+۳^{x-۱}+۳^x=۳۹$ باشد مقدار x کدام است ؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) ۳

تمرین : معادله ی $x^{۱۰}=۱۰^x$ چند جواب صحیح دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

تمرین : مقدار x در معادله ی $۲^{۲x-۳}+۸=۴۰$

سوال : جواب معادله ی $۵^{۲+۴+۶+\cdots+۲x}=(۰/۰۴)^{-۲۸}$ کدام است

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۸ ۴) -۸

سوال : اگر $۹^{y} = ۳^{x-۹}$ ، $۲^{x} = ۸^{y+۱}$ باشد مقدار $x + y$ برابر است با : (تیزهوشان)

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

سوال : در تساوی $۱۱۱۱^{۲} - ۱۱۱۱۱۱۱ = ۱۰ \times ۱۱۱^{x}$ مقدار x کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سوال : مقدار x در معادله ی $۵^{۲x+۱} \times ۲^{۲x} = ۰/۰۰۰۵$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

نماد علمی :

برای نمایش اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک در ریاضیات آنها را به صورت حاصل ضرب یک عدد اعشاری مثبت یک رقمی در توانهای ۱۰ نمایش می دهیم به این نمایش نماد علمی می گوییم

نمایش یک عدد اعشاری بصورت $a \times ۱۰^{n}$ است که $۱ \leq a < ۱۰$ و n عددی صحیح است .

مثال :

$$۱۳۹۶۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۳۹۶ \times ۱۰^{۹}$$

$$۱۳۹۶ = ۱/۳۹۶ \times ۱۰^{۳}$$

$$۰/۰۰۰۳ = ۳ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۱۲۳/۴ \times ۱۰^{۶} \times ۰/۰۰۱۲۳ = ۱/۲۳۴ \times ۱۰^{۸} \times ۱/۲۳ \times ۱۰^{-۳} = ۱/۵۱۷۸۲ \times ۱۰^{۵}$$

سوال : بصورت نماد علمی بنویسید

$۰/۰۰۰۰۰۰۶ \times ۷۰۰۰۰۰۰۰ =$

$۳۴۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۲۰۰۰۰۰۰۰۰ =$

$۱/۱\bar{۶} \times ۱۰^{۵} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۱۱/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۱۱/\bar{۶} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۶ \times ۱۰^{۴}$

سوال : اگر جرم ذره ای ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۸ کیلوگرم باشد جرم آن را با نماد علمی بنویسید

سوال : نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید

$۱۲/۱۳ \times ۱۰^{-۳} =$

$۳/۲۱ \times ۱۰^{۴} =$

سوال : جرم زمین تقریبا ۶×۱۰^{۲۴} و جرم خورشید ۲×۱۰^{۳۰} کیلوگرم است جرم خورشید چند برابر جرم زمین است ؟

سوال : نماد علمی عدد A را بنویسید

$$A = \frac{۱/\bar{۵} \times (۰/۱)^{-۲}}{۲/\bar{۳} \times ۱۰^{۵}} =$$

پاسخ :

$۱/\bar{۵} = \frac{۱۵-۱}{۹} = \frac{۱۴}{۹}, \quad (۰/۱)^{-۲} = (\frac{۱}{۱۰})^{-۲} = ۱۰^{۲}$

$۲/\bar{۳} = \frac{۲۳ - ۲}{۹} = \frac{۲۱}{۹}$

$$A=\frac{۱/\bar{۵}\times(۰/۱)^{-۲}}{۲/\bar{۳}\times ۱۰^{۵}}=\frac{\frac{۱۴}{۹}\times ۱۰^{۲}}{\frac{۲۱}{۹}\times ۱۰^{۵}}=\frac{۱۴}{۲۱}\times ۱۰^{-۳}=\frac{۲}{۳}\times ۱۰^{-۳}=۰/\bar{۶}\times ۱۰^{-۳}$$

ریشه گیری :

در صورتی که $a^n=b$ باشد ، آن گاه ریشه ی n ام b برابر a می باشد که آن را به صورت $\sqrt[n]{b}$ نشان می دهیم .

ریشه ی دوم b را به صورت $\sqrt[۲]{b}$ یا $\sqrt{b}$ نشان می دهیم

ریشه دوم را با عبارت جذر نیز مشخص می کنیم

$$۵^{۲}=۲۵\rightarrow\sqrt{۲۵}=$$

$$۲^{۳}=۸\rightarrow\sqrt[۳]{۸}=$$

$$۴^{۳}=$$

$$۲^{۴}=$$

توجه : داریم $۲۵=۵^{۲}$ و $۲۵=(-۵)^{۲}$ در این صورت ریشه دوم ۲۵ هر کدام از این اعداد می باشد اما طبق قرارداد برای جذر عدد مثبت را به عنوان جواب قبول می کنیم .

ریشه ی دوم عدد a هر یک از اعداد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ می باشد

ریشه ی سوم ۲۷ و ریشه ی چهارم ۱۶ را مشخص کنید

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$\sqrt{۱/۲۱}+\sqrt{۰/۱۶}+\sqrt{۰/۰۰۰۹}=$$

مثال : در مورد دو عبارت زیر چه می توان گفت ؟

$$\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=$$

$$\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۲۵}-\sqrt{۹}=$$

نتیجه :

سوال :

$$\sqrt{۲۵+۴\sqrt{۲۱+۳\sqrt{۷+۲\sqrt{۸۱}}}}=$$

توجه : در صورتی که $۰ < a < ۱$ در این صورت $\sqrt{a} > a$ و $a > a^{۲}$

توجه : داریم $\sqrt{x^{۲}} = |x|$ بنابراین داریم :

$$\sqrt{۴^{۲}}=$$

$$\sqrt{(-\frac{۲}{۳})^{۲}}=\left|-\frac{۲}{۳}\right|=$$

$$\sqrt{x^{۲}}+\sqrt{y^{۲}}-\sqrt{z^{۲}}=$$

سوال را در حالت هایی حل می کنیم که x و y و z مثبت و منفی باشند

$$\sqrt{(۱-۲\sqrt{۲})^{۲}}=$$

$$\sqrt{۲^{۴}}=$$

$$\sqrt{۲^{۴}\times ۶^{۲}}=$$

$$\sqrt{۵^{۲}\times ۲^{۶}\times ۳^{۴}}=$$

توجه: اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه ی سوم آن را با نماد $\sqrt[۳]{a}$ نمایش می دهیم .

$$(\sqrt[۳]{a})^{۳}=a$$

$$\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^{۳}}=(\sqrt[۳]{۲})^{۳}=۲$$

$$\sqrt[۳]{-۸}=\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}}=(\sqrt[۳]{(-۲)})^{۳}=-۲$$

دیدیم که ریشه سوم هر عدد منحصر به فرد است و یک ریشه سوم داریم

سوال :

$$\sqrt[۳]{۶۴a^{۳}}+\sqrt[۳]{۰/۰۰۸}=$$

$$\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}} - \sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}} + \sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}} =$$

$$\sqrt{a^۲b^۴} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^۴}}{\frac{۱}{۴}b^۲}} =$$

$$\frac{\sqrt{(a+b)^۲}}{\sqrt[۳]{(a+b)^۳}}, a > ۰, b > ۰$$

$$\sqrt[۳]{b\sqrt{\frac{۱}{b^۲}}} =$$

$$\sqrt{ab^۳\ \sqrt[۳]{a^۶b^۳}} =$$

سوال :اگر $\sqrt[۳]{x} = \frac{۲۵}{۳۶}$ باشد مقدار $\sqrt{x}$ را به دست آورید .

پاسخ $(\sqrt[۳]{x})^۳ = (\frac{۴}{۲۵})^۳ = \frac{۲۵^۳}{۳۶^۳} = \frac{(۵^۲)^۳}{(۶^۲)^۳} = \frac{۵^۶}{۶^۶} = (\frac{۵}{۶})^۶ \rightarrow x = (\frac{۵}{۶})^۶$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\frac{۵}{۶})^۶} = (\frac{۵}{۶})^۳$$

سوال : اگر $x = (\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲}$ در این صورت حاصل $x^۲ - ۳x + ۱$ را بدست آورید

پاسخ :

$$x = (\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲} = (\frac{۹}{\sqrt{۳}})^۲ = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷$$

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۲۷^۲ - ۳(۲۷) + ۱$$

سوال : اگر $۳^A = (\frac{۹^{\sqrt{۲۷}}}{۳^{\sqrt{۸۱}}})^۳$ مقدار A را به دست آورید .

$$۳^A = (\frac{۹^{\sqrt{۲۷}}}{۳^{\sqrt{۸۱}}})^۳$$

$$۹^{\sqrt{۲۷}} = (۳^۲)^{۳\sqrt{۳}}$$

$$۳^{\sqrt{۸۱}} =$$

سوال : اگر $3^{2k+1} = 6a$ باشد مقدار $27^{\frac{k}{3}}$ را بر حسب a بدست آورید .

$$3^{2k+1} = 3^{2k} \times 3^{1} = 6a \to 3^{2k} = 2a$$

$$27^{\frac{k}{3}} = (3^3)^{\frac{k}{3}} = 3^k = \sqrt{3^{2k}} = \sqrt{2a}$$

سوال : اعدادی را مشخص می کنیم که $\sqrt{x} < 3$ باشد.

برای این کار می توانیم از تعریف توان استفاده کنیم دو طرف نامساوی را به توان دو می رسانیم :

توجه : برای دو عبارت یا چند عبارت رادیکالی داریم :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \times b \times c}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

سوال : ساده کنید

$$\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{12} = \quad \sqrt[3]{18 \times 12} =$$

$$\sqrt[3]{x(a+b)^2} \times \sqrt[3]{-x(a+b)^1} \times \sqrt[3]{-8x} =$$

$$\frac{\sqrt{8x^3y^2z^5}}{\sqrt{2xz}} = \sqrt{\frac{8x^3y^2z^5}{2xz}} =$$

سوال : حاصل عبارت $\sqrt{(-2)^6}$ برابر است با :

۱) $(-2)^3$ ۲) -2^3 ۳) 2^3

پاسخ : از مفهوم قدرمطلق عبارت استفاده کنیم :

سوال : مقدار عبارت $\sqrt{(x-۳)^۲}$ در صورتی که $x>۳$ باشد را به دست آورید

سوال : ساد ه شده ی عبارت $\sqrt{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲}$ را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}$ را بدست آورید

پاسخ :

$$\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}=|۱+\sqrt{۲}|=$$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|=$$

مثال : اگر عدد a مجذور کامل باشد ، دومین و سومین مجذور کامل بعد از a را بدست آورید

پاسخ : عدد a موردنظر بصورت $a=n^۲$ می باشد در این صورت $n=\sqrt{a}$ می باشد

مجذور کامل بعدی (دومین مجذور کامل) عدد $(n+۱)^۲$ می باشد یعنی

$$(n+۱)^۲=(\sqrt{a}+۱)(\sqrt{a}+۱)=$$

سومین مجذور کامل بعدی برابر است :

$$(n+۱)^۳=(n+۱)^۲(n+۱)=$$

توجه : یادمان باشد اعدادی که یکان آنها ۲ و ۳ و ۷ و ۸ باشد مجذور کامل نیستند و تعداد صفرهای سمت راست در مجذور کامل همواره زوج است .

مثال : آیا عبارت زیر می تواند یک مجذور کامل می باشد

$۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times\ldots\times n+۴$

$۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times\ldots\times n+۳$

در مورد عددی که از حاصل ضرب بدست می آید می توان گفت یکان این عدد حتما صفر است چون عامل های ۲ و ۵ در عدد یکان را صفر می کند و اولین عدد یکانش ۴ می شود . طبق نکته بالا می دانیم در صورتی که یکان عددی ۴ باشد آن عدد می تواند مجذور کامل باشد ولی در مورد دومی نمی توان گفت مجذور کامل است

مثال : x در عبارت زیر کدام عدد باشد تا عدد موردنظر مجذور کامل باشد

$$abc۰x۰۰$$

با توجه به اینکه تعداد صفرهای سمت راست عدد مجذور کامل باید زوج باشد x عدد صفر است .

سوال : تعداد اعداد طبیعی که فاصله جذرشان از عدد ۹ از یک واحد کمتر باشد را بدست آورید

پاسخ :

$$۸ < \sqrt{n} < ۱۰ \rightarrow ۶۴ < n < ۱۰۰$$

تعداد این اعداد عبارت است از $۳۷ = ۱ + (۶۴ - ۱۰۰)$

سوال : کوچک ترین عدد صحیح بزرگتر از $-\sqrt{۴۷}$ کدام است ؟

سوال : برای آن که حاصل عبارت $(k+۱)+(k+۲)+\cdots+(K+۹)$ یک عدد مربع کامل باشد ، کوچک ترین عدد دو رقمی k چه قدر است ؟

پاسخ :

$$(k+۱)+(k+۲)+\cdots+(K+۹)=(k+k+\cdots+k)+(۱+۲+\cdots+۹)=۹k+\frac{۹\times ۱۰}{۲}$$
$$=۹k+۴۵=۹(k+۵)$$

برای آنکه مجذور کامل باشد عدد ۹ و k+۵ باید مجذور کامل باشد بنابراین k+۵ باید مجذور کامل باشد و k می تواند ۱۱ باشد تا کوچکترین عدد مجذور کامل ۱۶ خواهد بود

مثال : جذر عدد ۱۳۹۶ را بصورت تقریبی بدست آورید

تمرین : جذر تقریبی عدد های ۱۳۶۸ ، ۷۶۷ و ۲۰۱۶ را بدست آورید

توجه : امتحان درستی جذر :

دو برابر جذر به اضافه ی یک بزرگ تر از باقی مانده باشد .

مجذور جذر به اضافه ی باقی مانده برابر عدد اولیه شود .

مثال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۸}-\sqrt{۳۲}=\sqrt{۲\times ۹}+\sqrt{۳\times ۴}+۳\sqrt{۲\times ۴}-\sqrt{۲\times ۱۶}=$$

$$\sqrt{۱۲}+۲\sqrt{۲۷}+۳\sqrt{۴۸}=\sqrt{۳\times ۴}+۲\sqrt{۳\times ۹}+۳\sqrt{۳\times ۱۶}=$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۱۶}=$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲\times ۲۷}=\sqrt[۳]{۲\times ۳^۳}=۳\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۲\times ۸}=\sqrt[۳]{۲\times ۲^۳}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$۲\sqrt{x}+۴\sqrt{xy}+\sqrt{x}-۲\sqrt{xy}=$$

توجه دیدیم که عبارتی مانند $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ جوابی مانند $\sqrt{۵}$ ندارد ! یعنی زیر رادیکال جمع نمی شود

$$۲\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt{۱۲}-۳\sqrt[۳]{۶۴}-۲\sqrt[۳]{۲}=$$

نتیجه ۱ : اگر فرجه ها یکسان باشد $a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x}=(a+b)\sqrt[n]{x}$

نکات تکمیلی :

ضرب و تقسیم رادیکال ها

الف : اگر فرجه ها یکسان باشد عدد های زیر رادیکال را در هم ضرب و ضرایب را نیز در هم ضرب می کنیم برای تقسیم نیز عملیات تقسیم را پیش می گیریم

مثال : ضرب و تقسیم های زیر را انجام می دهیم

$$۲\sqrt{۳} \times ۵\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۶}$$

$$\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

$$\frac{۳x^۲y\sqrt[۳]{x^۲y}}{۲x\sqrt[۳]{xy}} = \frac{۳}{۲}xy\sqrt[۳]{\frac{x^۲y}{xy}} = \frac{۳}{۲}xy\sqrt[۳]{x}$$

نتیجه ۲ :

$$\left(a\sqrt[n]{x}\right)\left(b\sqrt[n]{y}\right) = ab\sqrt[n]{xy}$$

$$\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

ب : اگر فرجه ها یکسان نباشد دو مرحله زیر را پیش می گیریم :

۱ – ک.م.م فرجه ها را بدست می آوریم

۲ –فرجه اولیه را در هر عددی که ضرب کرده ایم تا به ک.م.م برسد زیر رادیکال را نیز به همان تاون می رسانیم

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} =$$

مرحله اول : ک.م.م :

$$[۳,۲] = ۶$$

مرحله دوم :

$$\frac{۶}{۳} = ۲ \to \sqrt[۳\times۲]{۲^۲} \to \sqrt[۶]{۲^۲}$$

$$\frac{۶}{۲} = ۳ \to \sqrt[۲\times۳]{۳^۳} \to \sqrt[۶]{۳^۳}$$

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} = \sqrt[۶]{۲^۲} \times \sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt[۶]{۲^۲ \times ۳^۳} = \sqrt[۶]{۱۰۸}$$

سوال

$\sqrt[۵]{۳} \times \sqrt{۳} = :$

نتیجه ۳:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}}} \times \sqrt[k]{b^{\frac{k}{m}}} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}} \times b^{\frac{k}{m}}} \quad , \qquad k = [n, m]$$

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\begin{aligned}(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲})^{۲} &= \left(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}\right)\left(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}\right) \\ &= \left(۲\sqrt{۳}\right)\left(۲\sqrt{۳}\right) - \left(۲\sqrt{۳}\right)\left(۳\sqrt{۲}\right) - \left(۳\sqrt{۲}\right)\left(۲\sqrt{۳}\right) + \left(۳\sqrt{۲}\right)\left(۳\sqrt{۲}\right) \\ &= ۴\sqrt{۹} - ۶\sqrt{۶} - ۶\sqrt{۶} + ۹\sqrt{۴} = ۱۲ - ۱۲\sqrt{۶} + ۱۸ = ۳۰ - ۱۲\sqrt{۶}\end{aligned}$$

توجه : در فصل بعد این سوال را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای نیز می توانیم حل کنیم

$\left(۲\sqrt{۵} - \sqrt{۲}\right)\left(۳\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}\right) =$

نکته : ضریب رادیکال را می توانیم به زیر رادیکال برگردانیم به این ترتیب که آن عدد را به توان فرجه می رسانیم و زیر رادیکال می بریم

مثال :

$۲\sqrt{۳} = \sqrt{۲^{۲} \times ۳} = \sqrt{۱۲}$

$۳\sqrt[۳]{۲} =$

$-۴\sqrt{۲} =$

$$-۳\sqrt[۳]{۳} =$$

نتیجه ۴ : داریم :

$$x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \times y}$$

می بینیم فرجه تغییری نمی کند .

تبدیل رادیکال مرکب به رادیکال ساده :

الف : اگر رادیکال مرکب به شکل زیر باشد

$$\sqrt[x]{a\sqrt[y]{b\sqrt[z]{c}}} = \sqrt[x]{a} \times \sqrt[x\times y]{b} \times \sqrt[x\times y\times z]{c} = \sqrt[x\times y\times z]{a^{y\times z} \times b^{z} \times c}$$

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = \sqrt[۳\times۲\times۳]{۲^{۲\times۳} \times ۳^{۳} \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۲^{۶} \times ۳^{۳} \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴}$$
$$= \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

توجه : سوال بالا را به کمک نکته زیر نیز می توانیم حل کنیم :

$$\sqrt[۲]{۲} = \sqrt[۲]{۲^{۱}} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\sqrt[۲]{۳} =$$

$$\sqrt[۳]{۲} =$$

$$\sqrt[۶]{۳} =$$

$$\sqrt[۱۸]{۴} =$$

بنابراین :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۶}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = ۲^{\frac{۶}{۱۸}} \times ۳^{\frac{۳}{۱۸}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = \sqrt[۱۸]{۲^{۶} \times ۳^{۳} \times ۴^{۱}}$$
$$= \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

نتیجه ۵ : به طور کلی از این نکته استفاده کردیم که : $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

یعنی همان عدد زیر رادیکال را به عنوان پایه و توان در صورت و فرجه در مخرج

مثال :

$$\sqrt[۴]{x^۸} = x^{\frac{۸}{۴}} = x^۲$$

تمرین :

$$\sqrt[۳]{۴\sqrt[۵]{۳}} =$$

$$\sqrt[۴]{x\sqrt[۲]{x^۲\ \sqrt[۳]{x}}} =$$

ب : رادیکال های مرکب نوع دوم به شکل $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ می باشند که این رادیکال ها در فصل بعد به کمک اتحادها حل می شوند .

گویا کردن مخرج کسر رادیکالی

برای محاسبات آسان تر لازم است مخرج کسرها از حالت رادیکالی خارج شود برای این کار به کمک روش های زیر مخرج کسر را از حالت رادیکالی خارج می کنیم به این کار گویا کردن کسر رادیکالی می گویند .

مثال :

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\times$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{z^2}}=$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}\times\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})^2}=\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}$$

نتیجه :

هر گاه مخرج کسر شامل یک رادیکال به صورت $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$ باشد برای گویا کردن کسر را در $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$ ضرب می کنیم .دقت داریم که این کسر ضرب شده برابر واحد است و در ضرب کسر اصلی را تغییر نمی دهد.

توجه : اگر مخرج کسر بیش از یک رادیکال بود آن را به کمک اتحاد مزدوج در فصل بعد گویا می کنیم

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

نکته تکمیلی : برای گویا کردن کسر زیر از اتحاد چاق و لاغر استفاده شده است که در فصل بعد به طور کامل بررسی می کنیم .

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

توجه : اتحاد چاق و لاغر بصورت زیر می باشد

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\left(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}\right)\left(\sqrt[۳]{a^{۲}}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}}\right)=\left(\sqrt[۳]{a}\right)^{۳}+\left(\sqrt[۳]{b}\right)^{۳}=a+b$$

تمرین تکمیلی : کسر اول را به کمک اتحاد مزدوج و دومی را با چاق و لاغر گویا کنید

$$\frac{۲}{۲-\sqrt{۳}}=$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=$$

یادداشت فصل :

خدایا توان من کم است و چشم به توانی دارم که از سوی تو همیشه سایه بر سر ما داشته است ، ما می دانیم که دوستان خوب همچون پایه ای مساوی هستند که توان های ما را با هم جمع می کنند و تا توانسته ایم توان هایمان را از همدیگر کم نکرده ایم و نخواهیم کرد مگر آنکه پایه ی کاری باشیم منفی که در آن کار، خیر و برکتی نباشد و تو توان را از ما کم کنی

خدایا همچون جذر که فقط ریشه ی مثبت اعداد را می بیند با اعمال ما برخورد کن و از منفی هایش بگذر و تو چه خوب می دانی که اعداد منفی جذر ندارند خدایا هر جا که گره گنگی در کار ما دیدی تو گویایش کن و ساده اش کن و ما را از آن گنگی خارج کن که همه اعمال گویای آن باشد که به نیت تو است و کار گنگی نداشته باشیم

خدایا دستان ما را پر کن از فرجه های زوج تا که منفی ها در زیر دستمان ما جایی نداشته باشند و تا لحظه آخر عمر منتظر توان های زوج تو هستیم که تمام پرانتزهای ما را خالی از منفی کند و مثبت باشیم به امید توان تو، خدایا نگهدار ما باش –