فصل ۴

فصل چهارم : توان و ریشه

درس اول : توان صحیح

توان منفی : اگر n یک عدد طبیعی و a یک عدد مخالف صفر باشد داریم :

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$$

مثال : حاصل عبارت $\frac{۹^{-۱}+۹^{-۲}}{۹^{-۳}}$ چقدر است ؟

حل:

$$\frac{۹^{-۱}+۹^{-۲}}{۹^{-۳}} = \frac{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۸۱}}{\frac{۱}{۷۲۹}} = \frac{\frac{۱۰}{۸۱}}{\frac{۱}{۷۲۹}} = \frac{۹۰}{۱} = ۹۰$$

نکته : اگر عدد بین صفر و یک به توان یک عدد طبیعی برسد کوچک تر خواهد شد.

مثال : اگر $۱۰^{۲n} = ۳۰$ باشد آن گاه مقدار $۱۰۰^{۲n+۱}$ مساوی است با :

حل:

$$۱۰۰^{۲n+۱} = ۱۰^{۲(۲n+۱)} = ۱۰^{۴n+۲} = ۱۰^{۴n} \times ۱۰^{۲} = (۱۰^{۲n})^{۲} \times ۱۰^{۲} =$$

$$= (۳۰)^{۲} \times ۱۰^{۲} = ۳۰۰^{۲} = ۹۰۰۰۰$$

نکته : در برخی از سوال ها در نگاه اول متوجه می شویم که قواعد اصلی توان در مورد آن ها صد ق نمی کند . در این مواقع یکی از روش های زیر را به کار می بریم:

الف) از روش تجزیه استفاده می کنیم

مثال : کسر $\frac{۱۲۵^{۳}\times۴۹^{۲}\times۱۲۸}{۵^{۴}\times۷^{۲}\times۱۶^{۲}}$ را ساده کنید.

حل: توجه داشته باشید که نه توان ها یکسان هستند و نه پایه ها ولی اگر همه ی عددهای پایه ها را تجزیه کنیم به کسر زیر می رسیم:

$$\frac{(۵^{۳})^{۳}\times(۷^{۲})^{۲}\times۲^{۷}}{۵^{۴}\times۷^{۲}\times(۲^{۴})^{۲}} = \frac{۵^{۹}\times۷^{۴}\times۲^{۷}}{۵^{۴}\times۷^{۲}\times۲^{۸}} = ۵^{۵} \times ۷^{۲} \times ۲^{-۱}$$

ب) باید جمع را به ضرب تبدیل کنیم:

پ) از ویژگی اعداد گویا استفاده می کنیم :

مثال : حاصل عبارت $\frac{۸^{۹}+۸^{۸}+۸^{۷}+۸^{۶}}{۸^{۶}}$ برابر است با :

حل : خوب در این مورد از تفکیک کسر ها استفاده می شود

$$\frac{۸^{۹}+۸^{۸}+۸^{۷}+۸^{۶}}{۸^{۶}} = \frac{۸^{۹}}{۸^{۶}} + \frac{۸^{۸}}{۸^{۶}} + \frac{۸^{۷}}{۸^{۶}} + \frac{۸^{۶}}{۸^{۶}} = ۸^{۳} + ۸^{۲} + ۸ + ۱ = ۵۸۵$$

ت) باید از فاکتور گیری استفاده شود:

مثال : حاصل عبارت $\frac{۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}}{۲^{x+۳}-۲^x}$ را به دست آورید.

حل:
$$\frac{۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}}{۲^{x+۳}-۲^x}=\frac{۲^x(۱+۲^۱+۲^۲)}{۲^x(۲^۳-۱)}=\frac{۲^x(۷)}{۲^x(۷)}=۱$$

مقایسه اعداد تواندار :

اعداد توان دار را در سه حالت می توان با هم مقایسه کرد

الف) در صورت امکان مقدار هر کدام را محاسبه کرده و بعد با هم مقایسه می کنیم:

مثال : عبارت های $۹۹۹^۱$, $۲^{۱۱}$, $۸۷۶^۰$, $۹^{۱۰۱}$ را با هم مقایسه کنید.

حل: $۹۹۹ = ۹۹۹^۱$, $۲۰۴۸ = ۲^{۱۱}$, $۱ = ۸۷۶^۰$ و عدد $۹^{۱۰۱}$ عدد خیلی بزرگی است . به این ترتیب آن ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

ب) باید کاری کنیم که توان همه ی اعداد با هم برابر باشند. برای این کار توان ها را طوری تجزیه می کنیم که یک عامل مشترک بین آن ها پیدا شود سپس توان های اضافه را به پایه داده و آن را به عدد تبدیل می کنیم سپس با هم مقایسه می کنیم

مثال : اعداد $۲^{۵۵}$, $۳^{۴۴}$, $۶^{۲۲}$, $۵^{۳۳}$ را با هم مقایسه کنید.

حل: $۳۲^{۱۱} = ۲^{۵\times۱۱} = ۲^{۵۵}$, $۸۱^{۱۱} = ۳^{۴\times۱۱} = ۳^{۴۴}$, $۳۶^{۱۱} = ۶^{۲\times۱۱} = ۶^{۲۲}$, $۱۲۵^{۱۱} = ۵^{۳\times۱۱} = ۵^{۳۳}$

حالا که توان ها با هم برابر شده اند عددی بزرگ تر است که پایه ی بزرگ تری داشته باشد.

پ) شرط سوم مقایسه مساوی بودن پایه ها است. روش کار به این صورت است که پایه ها را با استفاده از تجزیه با هم مساوی می کنیم.

نکته : برای ضرب و تقسیم دو عدد به صورت نماد علمی اعداد توان دار را در هم ضرب می کنیم سپس اعداد صحیح را ضرب می کنیم در نهایت جواب این دو را به صورت نماد علمی می نویسیم.

نکته : در جمع و تفریق این اعداد باید توان ها مساوی باشند تا بتوانیم با هم جمع یا تفریق کنیم.

نکته : برای هر a داریم : $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال : حاصل عبارت $\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}-\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}$ را به دست آورید.

حل:
$$\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}-\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|-|۱+\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}-۱-۱-\sqrt{۲}=-۲$$

به قوانین زیر دقت کنید.

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt[۳]{ab}=\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}$

$$\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}} = \sqrt[۳]{\frac{a}{b}} \quad , \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[۳]{a \pm b} \neq \sqrt[۳]{a} \pm \sqrt[۳]{b} \quad و \quad \sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

مثال: عبارت $\sqrt[۳]{۸۱} + \sqrt[۳]{-۲۴} - \sqrt[۳]{۰/۰۰۳}$ را ساده کنید.

حل : $\sqrt[۳]{۸۱} + \sqrt[۳]{-۲۴} - \sqrt[۳]{۰/۰۰۳} = \sqrt[۳]{۲۷ \times ۳} + \sqrt[۳]{-۸ \times ۳} - \sqrt[۳]{۰/۰۰۱ \times ۳} = ۳\sqrt[۳]{۳} - ۲\sqrt[۳]{۳} - ۰/۱\sqrt[۳]{۳} = ۰/۹\sqrt[۳]{۳}$

نکته:اگر عددی توان دار زیر رادیکال باشد می توان توان را با فرجه ی رادیکال ساده کرد.

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی:

اعدادی که در مخرج آن ها رادیکال وجود دارد را می توان به گونه ای نوشت که در مخرج کسر رادیکال نباشد. به این کار گویا کردن مخرج کسر می گوییم که از روابط زیر پیروی می کند.

۱) $\frac{c}{a\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$

۲) $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

۳) $\frac{c}{\sqrt[۳]{a^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{a}} = \frac{c\sqrt[۳]{a}}{a}$

۴) $\frac{c}{\sqrt[۳]{a}} \times \frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}} = \frac{c\sqrt[۳]{a^۲}}{a}$