

قسمت هفتم: توان و ریشه

نکته: اگر $a > 0$ آنگاه $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

سوال ۱: در مورد $\sqrt[3]{-8}$ چه می توان گفت؟

سوال ۲: در مورد $(-8)^{\frac{1}{3}}$ چه می توان گفت؟

نکته: اگر $a < 0$ باشد، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف شده نیست. $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{2}{4}}$ تعریف شده نیستند. پس در عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ باید $a > 0$ باشد.

نکته: اگر $a > 0$ باشد، $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ،

نکته: اگر $a > 0$ باشد، $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ ،

سوال ۳: حاصل عبارت مقابل به صورت عدد تواندار کدام است؟ $7^{2^{3^2}} \times (7^2)^{3^2} \times ((7^2)^3)^2$

(۱) 7^{1084} (۲) 7^{542} (۳) 7^{246} (۴) 7^{36}

سوال ۴: حاصل عبارت $2 \times 2^2 \times 2^{2^2} \times 2^{2^3} \times 2^{2^4} \times 2^{2^5} \times \dots \times 2^{2^{30}}$ به صورت عدد تواندار کدام است؟

(۱) $2^{2^{30}}$ (۲) $2^{2^{31}}$ (۳) $2^{2^{31}-1}$ (۴) $2^{2^{31}} - 1$

نکته: توان منفی $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

نکته: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ و $n \in \mathbb{N}$

سوال ۵: حاصل عبارت $7^{2^0} + 6(7^{2^0} + 7^{2^1} + 7^{2^2} + \dots + 7^{100})$ به صورت عدد تواندار کدام است؟

(۱) 7^{101} (۲) 7^{106} (۳) 7^{107} (۴) 6×7^{101}

سوال ۶: حاصل عبارت $(\dots(4(1+4(1+4(1+\dots+4(1+4))))))$ که تعداد ۴ها در آن ۱۰۰ تا می باشد، چه قدر است؟

(۲) $\frac{1}{3}(4^{100} - 100)$

(۱) $4^{100} - \frac{100(100+1)}{2}$

(۴) $\frac{1}{3}(4^{100} - 4)$

(۳) $\frac{1}{3}(4^{101} - 4)$

سوال ۷: حاصل عبارت $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ به کدام عدد زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

سوال ۸: مقایسه کنید: $\frac{2^{100}}{1+2^{100}}$ $\frac{2^{99}}{1+2^{99}}$

سوال ۹: چند عدد به شکل n^y که n عدد طبیعی باشد، وجود دارد به طوری که بین اعداد $5^{21} + 1$ و $2^{49} + 1$ قرار داشته باشند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

نماد علمی

سوال ۱۰: نمایش علمی عدد $0.0000001398 \times 10^{n-1}$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $1/398 \times 10^4$ (۲) $1/398 \times 10^5$ (۳) $1/398 \times 10^{2n+4}$ (۴) $1/398 \times 10^{2n-6}$

سوال ۱۱: عدد $2^{10} \times 3^2$ ، چندمین عدد طبیعی زوج است؟

- (۱) ۴۶۰۷ (۲) ۴۶۰۸ (۳) ۴۶۰۹ (۴) ۴۶۱۰

نکته: اگر پس از تجزیه به عوامل اول، همه‌ی توان‌ها زوج باشند، آن عدد مربع کامل و اگر توان‌ها مضرب ۳ باشند، آن عدد مکعب کامل و اگر توان‌ها مضرب ۶ باشند، آن عدد، هم مربع کامل و هم مکعب کامل است.
توجه: عدد ۱، هم مربع کامل و هم مکعب کامل است.

سوال ۱۲: از ۱ تا $8^{10} + 1$ ، چند عدد طبیعی وجود دارد که هم مربع کامل و هم مکعب کامل هستند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶۴ (۳) ۱۵ (۴) ۳۲

سوال ۱۳: عددی را به ما داده‌اند. آن را ۲ برابر کرده و از آن ۱ واحد کم می‌کنیم. این کار را ۹۸ بار دیگر

انجام می‌دهیم. اگر نتیجه‌ی نهایی عدد $2^{100} + 1$ شود، عددی که در ابتدا به ما داده بودند، چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

نکته: اگر کاغذی را n بار از وسط و فقط به صورت افقی یا فقط به صورت عمودی، "تا" بزنیم، تعداد خطوط موازی ایجاد شده روی کاغذ از رابطه‌ی $2^n - 1$ به دست می‌آید.

نتیجه: اگر کاغذی را n بار به صورت افقی و m بار به صورت عمودی "تا" کنیم، $2^m + 2^n - 2$ خط روی کاغذ ایجاد می‌شود.

سوال ۱۴: یک ماشین حساب فضایی، فقط این عملیات را انجام می‌دهد. یک عدد را در ۲ یا ۳ ضرب می‌کند یا به توان ۲ یا ۳ می‌رساند. با شروع از عدد ۱۵، کدام یک از مقادیر زیر با ۵ بار استفاده‌ی متوالی از این ماشین حساب می‌تواند به دست آید؟

- (۱) $2^8 \times 3^5 \times 5^6$ (۲) $2^8 \times 3^4 \times 5^2$ (۳) $2^2 \times 3^3 \times 5^3$ (۴) $2^6 \times 3^6 \times 5^4$

سوال ۱۵: نفر اول، عدد ۱ را نوشت. نفر دوم عدد ۲ و نفر سوم و به بعد، عدد ما قبل را به قبل تقسیم کرد. دهمین دانش آموز چه عددی را می نویسد؟

- (۱) 2^{-10} (۲) ۲۵۶ (۳) 2^{-55} (۴) 2^{34}

سوال ۱۶: معکوس عدد $\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $-17 + 3\sqrt{2}$ (۲) $-17 - 3\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$

سوال ۱۷: کوچک ترین عدد طبیعی n که به ازای آن رابطه ی

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$$

برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰۰ (۳) ۵۱۲۱ (۴) ۱۰۲۰۰

سوال ۱۸: حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \dots$ برابر است با:

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

سوال ۱۹: اگر $(2 + \sqrt{2})^4 + (2 - \sqrt{2})^4 = 136$ باشد، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از $(2 + \sqrt{2})^4$ کدام است؟

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۶۹ (۳) ۱۰۲ (۴) ۶۷

سوال ۲۰: ساده شده ی عبارت $\sqrt[3]{\frac{96^3 + 160^3}{33^3 + 55^3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{32}{11}$ (۲) $\frac{64}{11}$ (۳) $\frac{22}{32}$ (۴) $\frac{32}{22}$

پاسخ تشریحی سؤالات قسمت هفتم (توان و جذر)

۱- عدد (۲-)

۲- تعریف نشده است.

۳- گزینه (۲)

$$7^{2^{2^2}} = 7^{2^9} = 7^{512}, (7^2)^{2^2} = (7^2)^9 = 7^{18}, ((7^2)^2)^2 = 7^{12} \Rightarrow 7^{512} \times 7^{18} \times 7^{12} = 7^{542}$$

۴- گزینه (۳)

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{30} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{30} - 1 = 2^{31} - 1$$

۵- گزینه (۱)

$$\underbrace{7^{2^0} + 6 \times 7^{2^0}}_{7^{2^1}} + 6 \times 7^{2^1} + 6 \times 7^{2^2} + \dots + 6 \times 7^{1^0} = 7^{1^0}$$

۶- گزینه (۳) از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر استفاده می‌کنیم:

$$4(1+4) = 4 + 4^2$$

$$4(1+4(1+4)) = 4(1+4+4^2) = 4 + 4^2 + 4^3$$

:

$$4(1+4(1+4(\dots(1+4(1+4)))) \dots) = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100} \\ 4A = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{101} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 3A = 4^{101} - 4 \Rightarrow A = \frac{1}{3}(4^{101} - 4)$$

۷- گزینه (۱)

$$\left. \begin{array}{l} A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ 3A = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

۸- طرفین وسطین می‌کنیم. داریم:

$$2^{100}(1+2^{99}) \square 2^{99}(1+2^{100}) \Rightarrow 2^{100} + 2^{199} \square 2^{99} + 2^{199} \Rightarrow 2^{100} \square 2^{99}$$

۹- گزینه (۲)

$$\left. \begin{array}{l} 2^{49} + 1 = (2^7)^7 + 1 = 128^7 + 1 \\ 5^{21} + 1 = (5^3)^7 + 1 = 125^7 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 125^7 + 1 < 126^7 < 127^7 < 128^7 < 128^7 + 1$$

عدد ۳

۱۰- گزینه (۱)

$$\underbrace{0.\dots\dots\dots 1398}_{\text{رقم } n-6} \times 10^{n-1} = 1/398 \times 10^{-(n-5)} \times 10^{n-1} = 1/398 \times 10^{-n+5+n-1} = 1/398 \times 10^4$$

۱۱- گزینه (۲) عدد $3^2 \times 2^1$ ، ۹۲۱۶ آمین عدد طبیعی است.

$$2^1 \times 3^2 = 1024 \times 9 = 9216 \Rightarrow 9216 \div 2 = 4608$$

۱۲- گزینه (۴)

$$8^1 = (2^3)^1 = 2^3 = (2^5)^6 = 32^6$$

تعداد ۳۲ تا است. $\Rightarrow 1^6, 2^6, 3^6, 4^6, \dots, 32^6$

۱۳- گزینه (۲) عدد داده شده را a در نظر بگیرید. عدد بدست آمده در هر مرحله، به صورت زیر است:

مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)	مرحله (۹۹)
$2a - 1$	$2(2a - 1) - 1$	$2(2^2a - 2 - 1) - 1$	$2^{99}a - 2^{98} - 2^{97} - \dots - 2 - 1$
	$= 2^2a - 2 - 1$	$= 2^3a - 2^2 - 2 - 1$	

در مرحله ی (۹۹) داریم:

$$2^{99}a - (2^{98} + 2^{97} + 2^{96} + \dots + 2 + 1) = 2^{99}a - 2^{99} + 1 = 2^{100} + 1 \Rightarrow 2^{99}a = 2^{100} + 2^{99}$$

$$\xrightarrow{\div 2^{99}} a = 2 + 1 = 3$$

۱۴- گزینه (۴)

$$15 = 3 \times 5 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} 2 \times 3 \times 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۳}} 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^6 \times 3^6 \times 5^4$$

۱۵- گزینه (۴) اعداد زیر به دست می آیند:

$$1, 2^1, 2^{-1}, 2^2, 2^{-3}, 2^5, 2^{-8}, \dots$$

اگر عدد ۱ را، 2^0 در نظر بگیریم و قدر مطلق توان ها را در نظر بگیریم، اعداد $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ به دست می آیند که جملات دنباله ی فیبوناتچی هستند. پس دهمین دانش آموز، عدد 2^{34} را می نویسد.

۱۶- گزینه (۴)

$$\sqrt{17} - 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\sqrt{17} - 3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}{17 - 18} = -\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$$

۱۷- گزینه (۴) با گویا کردن مخرج کسر ها، عبارت زیر حاصل می شود:

$$-1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots - \sqrt{n} + \sqrt{n+1} = -1 + \sqrt{n+1} \geq 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 101 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n+1 \geq 10201 \Rightarrow n \geq 10200$$

۱۸- گزینه (۳)

$$A = 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots}}} \Rightarrow A = 2\sqrt{3 + A}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^2 = 4(3 + A) \Rightarrow A^2 - 4A - 12 = 0 \Rightarrow (A - 6)(A + 2) = 0 \begin{cases} A = 6 & \text{قابل قبول} \\ A = -2 & \text{غ ق} \end{cases}$$

۱۹- گزینه (۱) حاصل عبارت $(2-\sqrt{2})^4$ ، بین ۰ و ۱ است. پس می توان نوشت:

$$(2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 = 136 \Rightarrow (2+\sqrt{2})^4 = 136 - \underbrace{(2-\sqrt{2})^4}_{\text{بین } 0 \text{ و } 1}$$

بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر، عدد ۱۳۵ است. $\Rightarrow 135 < (2+\sqrt{2})^4 < 136$

۲۰- گزینه (۱)

$$\sqrt[3]{\frac{96^3 + 160^3}{33^3 + 55^3}} = \sqrt[3]{\frac{(25 \times 3)^3 + (25 \times 5)^3}{(3 \times 11)^3 + (5 \times 11)^3}} = \sqrt[3]{\frac{215 \times 3^3 + 215 \times 5^3}{3^3 \times 11^3 + 5^3 \times 11^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{215(3^3 + 5^3)}{11^3(3^3 + 5^3)}} = \sqrt[3]{\frac{215}{11^3}} = \frac{215}{11} = \frac{32}{11}$$

وحید اسدی کیا