

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای بیان موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

مثال: کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام یک غیرمنطقی است.

(الف) رضا می گوید من هر موقع پیراهن آبی را برای امتحان بپوشم نمره خوبی میگیرم. **غیر منطقی**

(ب) عامل اصلی شیوع بیماری کرونا در کشور رعایت نکردن پروتکل های بهداشتی به خصوص نزدن ماسک است. **منطقی**

مثال: آیا طول پاره خط های AB و CD در شکل های مقابل برابرند؟

هر دو پاره خط با هم برابرند اما خطای دید ما باعث شود پاسخ نادرست بدهیم.



مثال: برای مسئله زیر یک مثال نقض بیارید.

حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

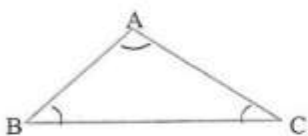
فرض مسئله: اطلاعاتی مسئله (داده های مسئله) و حقایقی که درستی آن ها از قبل برای ما معلوم شده است

حکم مسئله: خواسته های مسئله یا چیزی که سوال از ما می خواهد.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید.

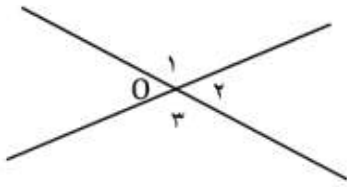
(الف) زاویه های روبه رو در لوزی برابرند **فرض: خواص لوزی** **حکم: برابر بودن زاویه های روبه رو**

(ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نامساوی باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگ تر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچک تر بزرگ تر است. **برای حل مسئله های هندسی که شکل ندارند حتما شکل رسم کنیم**



فرض $\hat{A} > \hat{B}$ و ABC مثلث است
حکم $BC > AC$

مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند



فرض : \hat{O}_1 و \hat{O}_2 دو زاویه متقابل به راس
حکم : $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 \text{ درجه} \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180 \text{ درجه} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

ایستگاه سوال:

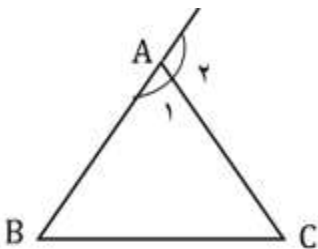
۱) نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقه وزنه برداری بودند هر دو عقیده داشتند که نمیتواند وزنه بردار وزنه ۱۰۰ کیلویی را بلند کند استدلال های دو نفر را ببیند و کدام استدلال قابل اعتماد تر است؟

نیما: هفته پیش تمرینات بهتری انجام داده بود ولی نتوانسته بود وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند. قابل اعتماد است

پژمان: امروز دوشنبه است من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام او هیچ وقت در روزهای زوج موفق نبوده است

۲) ثابت کنید زاویه خارجی دو مثلث برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن

ابتدا شکل آن را رسم میکنیم و بعد از نوشتن فرض و حکم به اثبات آن می پردازیم:



فرض : \hat{A}_2 زاویه ی خارجی مثلث
حکم : $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \text{ درجه} \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \text{ درجه} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

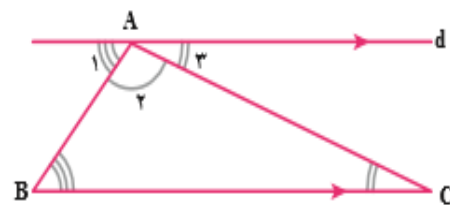
۳) نشان دهید مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

فرض : $\triangle ABC$

حکم : $A + B + C = 180$

خط d را موازی با ضلع BC رسم میکنم که از زاویه A عبور کند

حال اثبات میکنیم:



$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

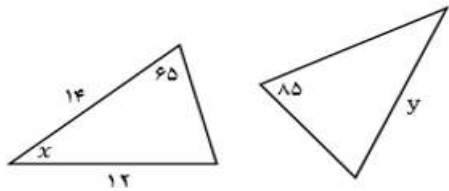
درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

(الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین (ض ض ض) (ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین (ض ض ز) (ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: ابتدا بررسی میکنیم که وترها با هم برابر باشند سپس یک ضلع و یا یک زاویه تند پیدا میکنیم: (الف) وتر و یک زاویه تند (و ز) (ب) وتر و یک ضلع (و ض)

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید.

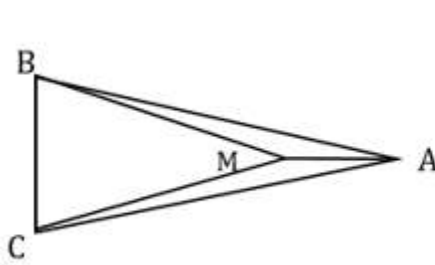


دو مثلث هم نهشت ضلع ها و زاویه های متناظر برابرند.

$$180 - (85 + 65) = 30 \quad x = 30$$

$$y = 14$$

مثال: در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

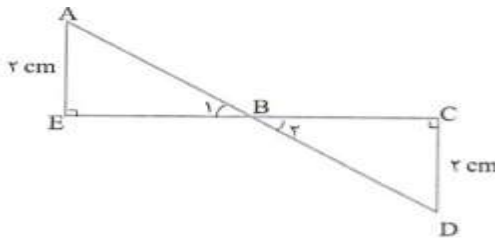


حکم: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$

فرض: $AB = AC, MB = MC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{فرض } MB = MC \\ \text{ضلع مشترک } AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC \quad (\text{ض ض ض})$$

مثال: در شکل مقابل پاره خط های AD و EC یکدیگر را نصف کرده اند دو مثلث ABC و BCD به چه حالتی هم نهشت است.



$$\text{فرض } \left\{ \begin{array}{l} AB = BD \\ EB = BC \\ \text{متقابل به راس } B_1 = B_2 \\ AE = CD = 2 \\ E = C = 90 \end{array} \right.$$

حکم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C} = 90^\circ \\ \text{طبق فرض } AB = BD \\ \text{طبق فرض } BE = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BCD \quad (\text{و ض})$$

به حالت های دیگر هم میتوان هم نهشتی را اثبات کرد.

ایستگاه سوال:

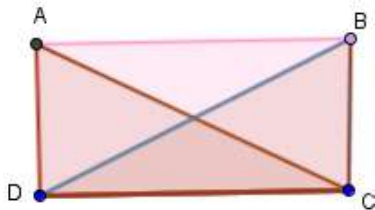
(۱) با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.



فرض $\left\{ \begin{array}{l} OH \text{ بر } AB \text{ است عمود } H_1 = H_2 \\ \text{وتر دایره } OA = OB \end{array} \right.$
 حکم $AH = HB$

$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow AH = HB$
 (اجزای متناظر) (و ض)

۲) ثابت کنید در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

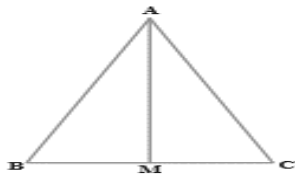


مستطیل است $ABCD$: فرض

حکم $AC = BD$

$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ DC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AC = BD$
 (ض ض ض)

۳) در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM را رسم کرده ایم مثلث های AMB و AMC به چه حالتی همبسته اند؟



فرض $\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \text{میانه } BM = MC \end{array} \right.$
 حکم $ABC \cong AMC$

$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ BM = MC \\ AM = AM \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AMC$
 (ض ض ض)

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

قدم های حل مسئله در هندسه:

۱) درک و فهم ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

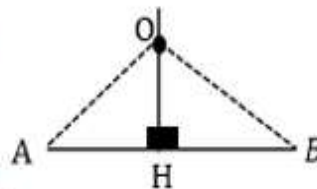
مثال: نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دوسر پاره خط به یک اندازه است.

گام اول: (درک و فهم مسئله) عمود منصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

فرض: OH عمود منصف
 حکم: $OA = OB$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

گام دوم: (رسم شکل)



$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AH = HB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow OA = OB$
 (اجزای متناظر) (ض ض ض)

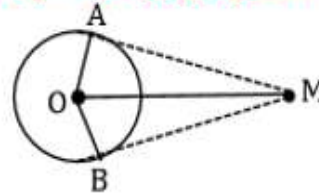
مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

حکم: $MA = MB$



گام دوم: (رسم شکل)

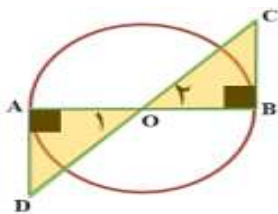
گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$

(اجزای متناظر) (و ض)

ایستگاه سوال:

(۱) در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماسند نشان دهید BC و AD برابرند.

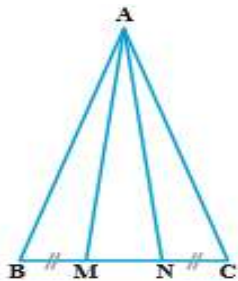


فرض $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OB = OA \\ O_1 = O_2 \end{cases}$
حکم $AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OA = OB \\ \text{متقابل به رأس } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{رض ز}} \hat{DOA} = \hat{COB}$$

اجزای متناظر $AD = BC$

(۲) در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = NC$.



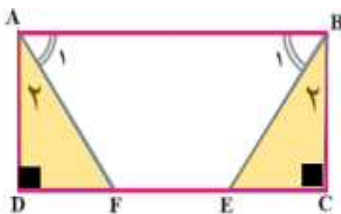
فرض $\begin{cases} AB = AC \\ BM = NC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$
حکم $AM = AN$

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{فرض } \hat{B} = \hat{C} \\ \text{فرض } MB = NC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{رض ز}} \triangle ABM \cong \triangle ACN$$

اجزای متناظر $AM = AN$

(۳) در مستطیل ABCD پاره خط های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی اند.



فرض $\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{cases}$
حکم $AF = BE$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{رض ز}} \triangle ADF \cong \triangle BCE$$

اجزای متناظر $AF = BE$

درس پنجم: شکل های متشابه

دو شکل متشابه: دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک و بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد

نکته: دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته: دو مستطیل همواره متشابه نیستند (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته: دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند (چون ممکن است زاویه ها دو به دو با هم برابر نباشند)

نکته: دو شکل هم نهشت همواره متشابه هستند و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

نکته: نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را **نسبت تشابه** می گویند.

مثال: اگر دو لوزی با هم متشابه باشند و اندازه ضلع بزرگتر لوزی ۱۸ و ضلع کوچکتر آن ۱۲ باشد نسبت تشابه را بدست

$$\text{نسبت تشابه} \quad \frac{18}{12} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{2} \quad \text{آورید.}$$

نکته: در سوال بالا نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ هم می تواند باشد یعنی هر دو شکل متشابه دو نسبت تشابه دارد خودش با معکوشش.

مثال: مثلثی با اضلاع ۴ و ۵ و ۸ با مثلث دیگری با اضلاع $x - 1$ و 10 و $4y$ با هم متشابه هستند مقدار y و x را

بدست آورید. ابتدا نسبت تشابه را بدست آوریم $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

$$\frac{4}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad x-1=8 \rightarrow x=9$$

$$\frac{8}{4y} = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad 4y=16 \rightarrow y=\frac{16}{4}=4 \rightarrow y=4$$

مثال: مقیاس نقشه ای $\frac{1}{10000}$ است اگر طول جاده روی نقشه ای ۸ سانتی متر باشد. طول واقعی جاده چند متر است؟

$$\frac{\text{اندازه نقشه}}{\text{اندازه واقعی}} \rightarrow \frac{1}{10000} = \frac{8}{x} \quad \xrightarrow{\text{با طرفین وسطین}} \quad x=80000$$

چونکه براساس متر خواسته پس به متر تبدیل میکنیم $80000 \div 100 = 800$

ب) اگر اندازه یکی از زاویه ها در روی نقشه ۵۰ درجه باشد در واقعیت چه قدر است؟ در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند پس ۵۰ درجه است.

ایستگاه سوال:

(۱) در یک نقشه، مقیاس ۱ : ۲۰۰ است فاصله دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتیمتر است فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چه قدر است؟

$$\frac{1}{200} = \frac{3/5}{x} \Rightarrow x = \frac{200 \times 3/5}{1} = 700 \text{ cm}$$

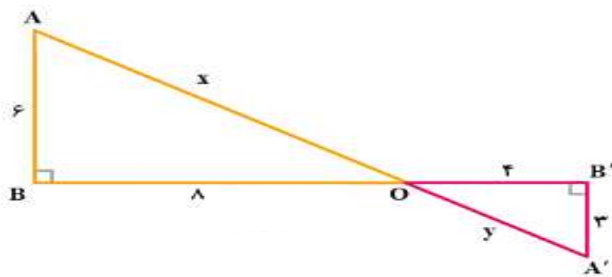
$$x = 7 \text{ m}$$

(۲) اگر نسبت تشابه دو مربع $\frac{3}{5}$ باشد و اندازه ضلع مربع بزرگ تر ۳۰ باشد اندازه ضلع مربع کوچک تر چه قدر است؟

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{30} \rightarrow 5y = 3 \times 30$$

$$5y = 90 \rightarrow y = \frac{90}{5} = 18$$

(۳) در شکل زیر:



(الف) مقادیر x و y را بدست آورید.

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

$$y^2 = 3^2 + 4^2$$

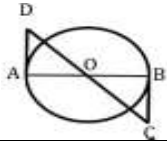
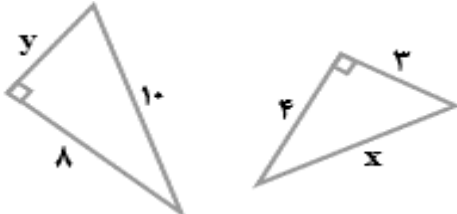
$$y^2 = 9 + 16 = 25$$

$$y = \sqrt{25}$$

(ب) آیا دو مثلث با هم متشابه هستند؟ بله چونکه نسبت تشابه همه ضلع ها $\frac{1}{3}$ است.

ایستگاه سوالات پایان فصل

۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (الف) دو مستطیل دلخواه همیشه با هم متشابه هستند (ب) در هر مربع قطرهای نیمساز زاویه های روبه رو هستند (پ) داده های یک مسئله را فرض می گویند (ت) در دایره کمان های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی هستند
۲	جاهای خالی را کامل کنید. (الف) در هر لوزی زاویه های مجاور به یک ضلع هستند (ب) استفاده از ویژگی های استدلال در یک عضو برای سایر اعضا را می نامند.

<p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>الف) نسبت تشابه دو مربع $\frac{3}{5}$ است. اگر محیط یکی ۲۴ سانتیمتر باشد. اندازه ضلع مربع دیگری چقدر است؟ <input type="radio"/> ۴۰ (۱) <input type="radio"/> ۳۰ (۲) <input type="radio"/> ۱۰ (۳) <input type="radio"/> ۸ (۴)</p> <p>ب) شکل های کدام گزینه همواره متشابه نیستند؟ <input type="radio"/> دو مربع (۱) <input type="radio"/> دو لوزی (۲) <input type="radio"/> دو مثلث متساوی الاضلاع (۳) <input type="radio"/> دو پنج ضلعی منتظم (۴)</p> <p>ج) نسبت مساحت های دو مربع متشابه $\frac{1}{16}$ می باشد. نسبت تشابه آن ها کدام است؟ <input type="radio"/> $\frac{1}{4}$ (۱) <input type="radio"/> $\frac{1}{8}$ (۲) <input type="radio"/> $\frac{1}{16}$ (۳) <input type="radio"/> $\frac{1}{32}$ (۴)</p> <p>د) اگر در طبیعت زاویه بین دو خیابان 65° باشد زاویه بین آنها در نقشه چند درجه است؟ <input type="radio"/> ۶۵ درجه (۱) <input type="radio"/> $32/5$ درجه (۲) <input type="radio"/> ۱۳۰ درجه (۳) <input type="radio"/> صفر درجه (۴)</p>	۳
<p>استدلال زیر را کامل کنید.</p> <p>لوژی نوعی است. در متوازی الاضلاع برابر است.</p> <p>در لوژی زاویه های روبه رو در متوازی الاضلاع } \Rightarrow</p>	۴
<p>ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع های رو به رو با هم مساوی هستند.</p>	۵
<p>در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس هستند نشان دهید که BC و AD با هم برابرند.</p> 	۶
<p>نشان دهید هر نقطه که روی عمود منصف پاره خط قرار دارد از دو سر آن به یک فاصله است. (فرض و حکم نوشته شود) فرض: حکم:</p>	۷
<p>مثلی به اضلاع ۷ و ۵ و x با مثلث دیگری به اضلاع ۱۵ و ۲۴ با هم متشابه هستند مقادیر x و y را بدست آورید.</p>	۸
<p>با ارائه یک مثال نقض ادعای زیر را رد کنید. « حاصل ضرب دو عدد گنگ همیشه عددی گنگ است »</p>	۹
<p>دو شکل زیر با هم متشابه اند مقدار x و y را بدست آورید</p> 	۱۰